[illegible]

[illegible]

vollkommen consequenten

Systems der Mathematik,

[illegible]

Professor Dr. Martin Ohm,

[illegible]

[illegible] Theil.

Mit einer Figurentafel.

Nürnberg, 1852.

Verlag der Friedr. Korn'schen Buchhandlung.

Versuch

eines

vollkommen consequenten

Systems der Mathematik,

vom

Professor Dr. Martin Ohm,

an der Königl. Friedrich-Wilhelms-Universität und an der Königl. Allgemeinen Kriegsschule zu Berlin; der Kaiserl. Russischen Akademie der Wissenschaften zu St. Petersburg, der Königl. Bayer. Akademie der Wissenschaften zu München, so wie mehrerer andern gelehrten Gesellschaften korrespond. Mitglied; Ritter des Rothen Adler-Ordens IV. Klasse.

Neunter Theil.

Mit einer Figurentafel.

Nürnberg, 1852.

Verlag der Friedr. Korn'schen Buchhandlung.

Die Auswerthungs-Methoden
bestimmter Integrale,

so wie

die Theorie

der Reihen und der Integrale des Fourier,

vom

Professor Dr. Martin Ohm,

an der Königl. Friedrich-Wilhelms-Universität und an der Königl. Allgemeinen Kriegsschule zu Berlin; der Kaiserl. Russischen Akademie der Wissenschaften zu St. Petersburg, der Königl. Bayer. Akademie der Wissenschaften zu München, so wie mehrerer andern gelehrten Gesellschaften korrespond. Mitglied; Ritter des Rothen Adler-Ordens IV. Klasse.

Mit einer Figurentafel.

Nürnberg, 1852.

Verlag der Friedr. Korn'schen Buchhandlung.

Die Auswerthungs-Methoden

bestimmter Integrale,

in der

[illegible]

der Reihen und der Integrale des Fourier,

[illegible]

von

Professor Dr. Martin Ohm,

[illegible]

Nürnberg, 1859.

Verlag der Friedr. Korn'schen Buchhandlung.

Vorrede.

Die Lehre der bestimmten Integrale, die durch Euler einen bescheidenen Anfang gemacht hatte, hat sich in der Neuzeit als eine der wichtigsten Lehren herausgestellt, besonders wegen der erfolgreichen Anwendungen, welche von den bestimmten Integralen zur Beantwortung von schwierigeren physikalischen Fragen gemacht worden sind. Während Laplace und Legendre in dem letzten Viertel des vorigen Jahrhunderts die Arbeiten Euler's fortgesetzt und bedeutend erweitert haben, ist es dem genialen Fourier vorbehalten gewesen, eine neue Bahn zu eröffnen, in welcher die bestimmten Integrale ihre glänzendste Rolle zu spielen begonnen haben. Keiner kann jetzt mehr sagen, daß er ein Mathematiker sey, oder etwas als solcher zu leisten hoffe, der sich nicht mit diesen Arbeiten auf das genaueste bekannt gemacht hat. Es fehlte aber bisher an einem Werke, in welchem der Anfänger alles wesentliche, was in dieser Beziehung bis jetzt geleistet worden ist, nicht bloß gesammelt und geordnet fände, sondern auch möglichst in eine wissenschaftliche Einheit gebracht. Der Verfasser hofft, daß der gegenwärtige neunte Theil seines größeren Werkes diesem Bedürfnisse abhelfen werde. — Außerdem wird der geübte Leser auch mehreres Neue finden und manches Aeltere genießbar gemacht.

Kramp, Poisson, Rabe und Andere, darunter neuerdings auch Schlömilch haben in ihren Schriften neben vielem Guten doch nicht selten die Werthe von solchen bestimmten Integralen angegeben, welche in der That gar keinen Werth haben, oder deren Werth (nicht der angegebene, sondern) unendlich-groß ist. Der Verf. glaubt dies hier hervorheben zu müssen, damit man ihn nicht beschuldige, die Mittheilung solcher Resultate aus Unkenntniß derselben unterlassen zu haben. Man muß nie versäumen, bevor man sich die Mühe giebt, ein bestimmtes Integral auszuwerthen, sich immer erst zu überzeugen, daß solches auch wirklich einen (bestimmten, endlichen) Werth habe.

Schließlich glaubt der Verf. auf die letzte (vierte) Abhandlung noch in's Besondere aufmerksam machen zu müssen.

Berlin im März 1852.

M. Ohm.

Inhalts-Verzeichniß des neunten Theils.

Erste Abhandlung.

Verschiedene Auswerthungs-Methoden bestimmter Integrale.

Erstes Kapitel.

Erste Methode der Auswerthung bestimmter Integrale.

Zweites Kapitel.

Auswerthung bestimmter Integrale mittelst Zurückführung derselben auf andere bereits bekannte bestimmte Integrale, vermöge a) der theilweisen Integration, b) der Substitution, und c) der Differenziation und der Integration nach einer noch vorkommenden allgemeinen Konstante.

Drittes Kapitel.

Verschiedene andere Methoden zur Auswerthung bestimmter Integrale.

Viertes Kapitel.

Einige Arbeiten Cauchy's über bestimmte Integrale. — Achte Methode der Auswerthung bestimmter Integrale.

Zweite Abhandlung.

Die Eigenschaften der Gamma-, der Psi- und der Phi-Funktionen und der Euler'schen Integrale überhaupt.

Fünftes Kapitel.

Zusammenstellung der Eigenschaften der Phi- und der Gamma-Funktionen und somit der Euler'schen Integrale erster und zweiter Klasse.

Dritte Abhandlung.

Von den Reihen und den Integralen des Fourier.

Sechstes Kapitel.

Von den Fourier'schen Reihen.

Siebentes Kapitel.

Die Fourier'schen Integrale.

Vierte Abhandlung.

Von der Umformung der Doppel-, drei- und mehrfachen Integrale.

Achtes Kapitel.

Von der Umformung der Doppel-Integrale und der mehrfachen Integrale überhaupt.

Erste Abhandlung.

Verschiedene Auswerthungs-Methoden bestimmter Integrale.

Einleitung.

Wir setzen in dieser Abhandlung (über die verschiedenen Auswerthungs-Methoden bestimmter Integrale) als bekannt voraus

a) die §§. 84.—98. des vorhergehenden 8ten Theiles dieses Werkes, welche die Theorie der bestimmten Integrale enthalten;

b) die Einleitung zu dem gedachten 8ten Theile;

endlich

c) die bekanntesten Sätze über die Summation der Reihen.

Wir verstehen aber hier unter einem „bestimmten Integral" $\int_a^b f \cdot dx$, allemal das numerisch-bestimmte, d. h. die Summe der unendlich-vielen unendlich-kleinen Produkte

$$f_a \cdot dx + f_{a+dx} \cdot dx + f_{a+2dx} \cdot dx + f_{a+3dx} \cdot dx + \cdots + f_{b-dx} \cdot dx,$$

während $dx = \frac{b-a}{n}$ und n unendlich-groß gedacht wird. (Vgl. VIII. Th. §. 84.).

Erstes Kapitel.

Erste Methode der Auswerthung bestimmter Integrale.

§. 1.

In allen den Fällen, wo man das unbestimmte Integral finden kann, nämlich

$$\int f \cdot dx = \varphi_x,$$

ergiebt sich das bestimmte Integral $\int_a^b f \cdot dx$, wenn solches kein unterbrochenes und kein divergentes ist, so daß es wirklich einen Werth hat, sogleich aus dem Satze (VIII. Th. §§. 86. 87.), nach welchem

$$(\odot) \cdots \quad \int_a^b f \cdot dx = \int_{b \div a} f \cdot dx\text{*)} \quad \text{d. h.} \quad = \varphi_b - \varphi_a$$

ist (S. noch VIII. Th. §. 90.).

Wir müssen aber jetzt in diesem und den folgenden Paragraphen nachweisen, was bei der Anwendung dieses Satzes noch besonders zu berücksichtigen ist.

Zunächst aber ist Folgendes zu bemerken: Die Gleichung $(\odot)$ ist nicht nothwendig eine vollkommene (vollständige) Glei-

---

*) Wir nennen das Zeichen $\int_{b \div a} f \cdot dx$ ein allgemein-bestimmtes Integral und wir bezeichnen damit die Reihe der Operationen, die mit f_x vorgenommen werden müssen, um nach und nach die Funktion φ_x und dann $\varphi_b - \varphi_a$ zu erhalten; diese Folge von Operationen aber nicht allein, sondern auch den zuletzt erhaltenen Ausdruck $\varphi_b - \varphi_a$ selbst. (Vergl. VIII. Th. §. 84.).

chung, welche links und rechts gleich viele und dieselben Werthe hätte, sondern sie hat häufig zur Rechten mehrere, ja unendlich-viele Werthe, während wir immer voraussetzen, daß die zu findende Summe (unendlich-vieler unendlich-kleiner Produkte) zur Linken, nur einen einzigen Werth hat, — weil wir auch in dem Falle, wo die Funktion f_x mehrförmig seyn sollte, doch immer nur eine bestimmte dieser Formen als vorgelegt voraussetzen. — Es muß daher in jedem Einzelfalle von den mehreren oder unendlich-vielen Werthen zur Rechten, derjenige noch näher herausgehoben werden, welcher die gesuchte Summe zur Linken wirklich liefert.

So ist z. B., weil $\int \frac{1}{x} \cdot dx = \mathit{log}\, x$ gefunden wird,

$$\int_a^b \frac{1}{x} \cdot dx = \int_{b \div a} \frac{1}{x} \cdot dx = \mathit{log}\, b - \mathit{log}\, a = \mathit{log}\, \frac{b}{a},$$

während $\mathit{log}\, b$ und $\mathit{log}\, a$ unendlich-viele Werthe haben.

Eben so ist wegen $\int \frac{1}{1+x^2} \cdot dx = \frac{1}{Tg} x$ und $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \cdot dx = \frac{1}{Sin} x$,

$$\int_a^b \frac{1}{1+x^2} \cdot dx = \frac{1}{Tg} b - \frac{1}{Tg} a$$

und

$$\int_a^b \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \cdot dx = \frac{1}{Sin} b - \frac{1}{Sin} a,$$

wo sowohl $\frac{1}{Tg} b$ und $\frac{1}{Tg} a$, als auch $\frac{1}{Sin} b$ und $\frac{1}{Sin} a$ unendlich-viele Werthe haben. (S. VIII. Th. Einl. §. 10.).

Weil jedoch, wenn $\int f_x \cdot dx = \varphi_x$ gefunden worden, die Summe aller $f_x \cdot dx$, wie sie durch das bestimmte Integral

---

*) Durch $\frac{1}{Tg} x$, $\frac{1}{Sin} x$ bezeichnen wir (nach Einleit. zum VIII. Th.) allemal die unendlich-vielen Werthe, deren Tangente, oder deren Sinus dem gegebenen x gleich ist, während wir durch $\mathit{Arc\,tg.}\, x$, $\mathit{Arc\,sin.}\, x$ jedesmal den reellen, zwischen $-\frac{1}{2}\pi$ und $+\frac{1}{2}\pi$ liegenden einzigen dieser Werthe bezeichnen. — Das Zeichen $\mathit{Arc\,tg.}\, x$ setzt daher x reell voraus; das Zeichen $\mathit{Arc\,sin.}\, x$ setzt aber auch noch voraus, daß x zwischen -1 und $+1$ liegt. In den obigen Zeichen kann x beliebig reell oder imaginär seyn.

$\int_a^b f_x \cdot dx$ ausgedrückt wird, nichts weiter als die Summe der durch

$$\varphi_{a+dx}-\varphi_x, \quad \varphi_{a+2dx}-\varphi_{a+dx}, \quad \varphi_{a+3dx}-\varphi_{a+2dx}, \quad \text{ꝛc. ꝛc.}$$

$\varphi_b-\varphi_{b-dx}$ vorgestellten Differenzialien ist, diese letzteren aber alle eine und dieselbe Form von φ voraussetzen, so folgt, daß in dem Ausdruck zur Rechten der Gleichung (⊙), sowohl φ_b als auch φ_a **einer und derselben Form** von φ_x angehören.

§. 2.

Danach findet sich z. B., wenn a und b beliebig positiv gedacht werden

$$\int_a^b \frac{1}{x}\cdot dx = log\,b - log\,a = (Lb+2\nu\pi\cdot i)-(La+2\nu\pi\cdot i)$$

(nach VIII. Th. Einleitg. §. 5.), wo ν im Minuenden und Subtrahenden eine und dieselbe ganze Zahl vorstellt, wenn nicht Null; deshalb ergiebt sich ohne Weiteres, wenn nur a und b positiv sind

$$1) \qquad \int_a^b \frac{1}{x}\cdot dx = Lb - La = L\left(\frac{b}{a}\right),$$

wobei wir nicht übersehen wollen, daß (nach §. 5. der Einleitung zum VIII. Th.) Lz, so oft z positiv ist, allemal den reellen Werth des natürlichen Logarithmen von z bezeichnet, während wir den allgemeinen, unendlich-vieldeutigen natürlichen Logarithmen von z stets durch das Zeichen $log\,z$ ausdrücken.

Auch ist danach, wenn $-a$ und $-b$ negative Zahlen vorstellen

$$\int_{-a}^{-b} \frac{1}{x}\cdot dx = log(-b) - log(-a)$$

$$= [Lb+(2\nu+1)\pi i]-[La+(2\nu+1)\pi i] = Lb - La = L\frac{b}{a}.$$

Eben so findet sich (nach VIII. Th. Einleitg. §. 11. I. 3.) augenblicklich

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \cdot dx = \frac{1}{Sin} 1 - \frac{1}{Sin} 0$$

$$= [\nu\pi + (-1)^\nu \cdot Arc\,sin.\, 1] - [\nu\pi + (-1)^\nu \cdot Arc\,sin.\, 0],$$

wo ν eine und dieselbe positive oder negative ganze Zahl, wenn nicht die Null vorstellt. Dies giebt aber

2) $$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \cdot dx = (-1)^\nu \cdot \tfrac{1}{2}\pi = \pm \tfrac{1}{2}\pi,$$

wo offenbar das + Zeichen gilt, oder das − Zeichen, je nachdem $\sqrt{1-x^2}$ zur Linken als durchweg positiv, oder als durchweg negativ gedacht wird.

Ferner ergiebt sich (nach VIII. Th. Einleitg. §. 11. III. 4.), wenn a und b reell vorausgesetzt werden,

$$\int_a^b \frac{1}{1+x^2} \cdot dx = \frac{1}{Tg} b - \frac{1}{Tg} a = [\nu\pi + Arc\,tg.\, b] - [\nu\pi + Arc\,tg.\, a]$$

wo ν eine und dieselbe positive oder negative ganze Zahl, wenn nicht die Null vorstellt, — so daß man sogleich hat

$$\int_a^b \frac{1}{1+x^2} \cdot dx = Arc\,tg.\, b - Arc\,tg.\, a\ ^{*)},$$

---

*) Ist $Arc\,tg.\, b = u$ und $Arc\,tg.\, a = v$, so ist $Tg\, u = b$, $Tg\, v = a$, also $Tg\,(u-v) = \frac{b-a}{1+ba}$, folglich $u - v = \frac{1}{Tg} \frac{b-a}{1+ba}$,

d. h. $Arc\,tg.\, b - Arc\,tg.\, a = \frac{1}{Tg} \frac{b-a}{1+ba}$. —

Sind nun a und b beide positiv oder beide negativ, — weiß man also, daß u und v beide positiv oder beide negativ sind, so ist $u-v$ positiv oder negativ, aber an sich $< \frac{1}{2}\pi$; also ist dann

$Arc\,tg.\, b - Arc\,tg.\, a = Arc\,tg.\, \frac{b-a}{1+ba}$ zu setzen. Ist aber b, also u positiv und a, also v negativ, oder u negativ und v positiv, so ist $u-v$ positiv oder negativ, aber an sich der Summe der beiden absoluten Werthe gleich; es kann also nun $\pm(u-v) > \frac{1}{2}\pi$ werden, und es wird dies allemal, so oft $1+ba$ vom Positiven zum Negativen übergeht; und dann darf man also nicht $Arc\,tg.\, \frac{b-a}{1+ba}$ statt $Arc\,tg.\, b - Arc\,tg.\, a$ setzen,

daher auch

3) $$\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\cdot dx = \tfrac{1}{4}\pi = \int_1^\infty \frac{1}{1+x^2}\cdot dx;$$

4) $$\int_0^\infty \frac{1}{1+x^2}\cdot dx = \tfrac{1}{2}\pi \quad \text{und} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}\cdot dx = \pi.$$

(Vgl. VIII. Th. §. 98. I. und ebend. Einleitg. §. 11.).

Wir übergehen die Betrachtung derselben Integrale zwischen imaginären Grenzen, weil der §. 1. auch für sie gilt und bei Anwendung desselben nur die Einleitg. §. 5. und §. 11. III. 1. oder 2. und 3. des VIII. Th., statt daselbst III. 4. in Anwendung kommen müssen, eben so Einleitg. §. 11. I. 1. 2. und 4. statt ebendaselbst I. 3.

Dagegen wollen wir noch

$$\int_0^\infty \frac{1}{b^2+x^2}\cdot dx$$

finden, während wir b reell oder imaginär aber von der Form $k+g\cdot i$ voraussetzen, weil diese Aufgabe uns die Gelegenheit giebt, dieselben so eben angeführten und bisher von den Analysten weniger benutzten, ja selbst in den Lehrbüchern zum Theil gar nicht, zum Theil nicht immer ganz richtig aufgestellten Formeln (der Einleitung §. 11. zum VIII. Th.) in Anwendung zu bringen, das gewonnene Resultat aber später (im §. 23.) gebraucht wird, um auf die einfachste Weise allgemeinere Resultate zu erzielen.

Man hat zunächst $\int \frac{1}{b^2+x^2}\cdot dx = \frac{1}{b}\cdot \overset{1}{Tg}\frac{x}{b}$,

also

$$\int_0^\infty \frac{1}{b^2+x^2}\cdot dx = \frac{1}{b}\cdot \left[\overset{1}{Tg}\frac{x}{b}\right]_{\infty \div 0}^{*)}.$$

Nun ist aber, so oft x reell gedacht wird und $b = k+g\cdot i$,

---

weil *Arc tg.* allemal nur einen Bogen bezeichnen soll, welcher an sich $< \frac{1}{2}\pi$ ist (VIII. Th. Einleit. §. 10.).

*) Wir schreiben öfter $[f_x]_{b\div a}$ statt $f_b - f_a$.

$$\frac{x}{b} = \frac{x}{k+g \cdot i} = \frac{kx}{k^2+g^2} - \frac{gx}{k^2+g^2} \cdot i;$$

also ist auch

$$\frac{1}{Tg}\frac{x}{b} = \frac{1}{Tg}\left(\frac{kx}{k^2+g^2} - \frac{gx}{k^2+g^2} \cdot i\right) = \frac{1}{Tg}(p+q \cdot i),$$

wenn

$$\frac{kx}{k^2+g^2} = p \quad \text{und} \quad -\frac{gx}{k^2+g^2} = q$$

gesetzt wird. Nimmt man nun die Formel (VIII. Th. Einleitg. §. 11. III. 1., nämlich)

$$\frac{1}{Tg}(p+q \cdot i) = \nu\pi + \varphi + \tfrac{1}{4} L \frac{p^2+(1+q^2)}{p^2+(1-q^2)} \times i,$$

wo ν sowohl Null als auch jede positive oder negative ganze Zahl vorstellt, während φ bestimmt ist durch die Gleichung

$$\varphi = Arc\,tg. \frac{p^2+q^2-1+\sqrt{(p^2+q^2-1)^2+4p^2}}{2p},$$

in welcher Gleichung die Wurzel ihren positiven Werth vorstellt, — setzt man hier statt p und q ihre Werthe, — bemerkt man, daß der logarithmische Theil sowohl für $x = \infty$, als auch für $x = 0$ in $L1$ d. h. in Null übergeht, — bedenkt man ferner, daß (nach §. 1.) sowohl für $x = \infty$ als auch für $x = 0$ die ganze Zahl ν stets dieselbe bleibt, so folgt

$$\left[\frac{1}{Tg}\left(\frac{kx}{k^2+g^2} - \frac{gx}{k^2+g^2} \cdot i\right)\right]_{\infty \div 0} = [\varphi_x]_{\infty \div 0}.$$

Weil aber φ_x für $x = 0$ in $Arc\,tg. \frac{-1+\sqrt{1+4p^2}}{2p}$ übergeht, während $p = 0$ wird, so folgt, wenn man den $\frac{0}{0}$ Werth gehörig bestimmt,

$$\varphi_x = 0 \quad \text{für} \quad x = 0.$$

Für $x = \infty$ dagegen geht

$$\frac{p^2+q^2-1+\sqrt{(p^2+q^2-1)^2+4p^2}}{2p}$$

in $\frac{p^2+q^2}{p}$, d. h. in $\frac{x}{k}$ d. h. in $\pm\infty$ über, je nachdem $k\begin{Bmatrix}\text{positiv}\\ \text{negativ}\end{Bmatrix}$ ist. Also ist für $x=\infty$,

$$\varphi_{x,} = \pm\frac{\pi}{2}, \text{ je nachdem } k\begin{Bmatrix}\text{positiv}\\ \text{negativ}\end{Bmatrix} \text{ ist.}$$

Es ist also, wenn $b = k+g\cdot i$ gedacht wird,

$$5)\quad \int_0^\infty \frac{1}{b^2+x^2}\cdot dx = \pm\frac{\pi}{2b}, \text{ je nachdem } k\begin{Bmatrix}\text{positiv}\\ \text{negativ}\end{Bmatrix}. \text{*)}$$

Dabei kann g beliebig reell, also auch der Null gleich seyn, so daß dann $k = b$ selbst wird und b beliebig reell ist. — Für $b = 1$ geht aus der N. 5. wieder die N. 4. hervor.

Anmerkg. 1. Hat man, ohne den ferneren Inhalt des §. 1. zu berücksichtigen, bloß (nach ⊙ des §. 1.) gefunden

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\cdot dx = \nu\pi+(-1)^\nu\cdot\tfrac{1}{2}\pi,$$

so könnte man den Werth von ν (der immer positiv oder negativ ganz oder Null seyn muß, und der zur Zeit noch unbe-

---

*) Setzt man $b = k+g\cdot i$ und denkt man sich k positiv, so giebt diese Gleichung 5. sogleich

$$\int_0^\infty \frac{1}{k^2-g^2+x^2+2kg\cdot i}\cdot dx = \frac{\frac{1}{2}\pi}{k+g\cdot i}.$$

Multiplicirt man nun links Zähler und Nenner mit $k^2-g^2+x^2-2kg\cdot i$, rechts aber mit $k-g\cdot i$, so erhält man

$$\left.\begin{aligned}&\int_0^\infty \frac{k^2-g^2+x^2}{(k^2+g^2)^2+2(k^2-g^2)x^2+x^4}\cdot dx = \frac{\frac{1}{2}k\pi}{k^2+g^2}\\ &\text{und}\\ &\int_0^\infty \frac{1}{(k^2+g^2)^2+2(k^2-g^2)x^2+x^4}\cdot dx = \frac{\frac{1}{4}\pi}{k(k^2+g^2)}\end{aligned}\right\}\text{wenn nur } k \text{ beliebig positiv und } g \text{ beliebig reell ist,}$$

so daß auf diesem Wege namentlich das Integral $\int_0^\infty \frac{1}{a+bx^2+x^4}\cdot dx$ ausgewerthet sich sieht, so oft a positiv ist und $>\frac{1}{4}b^2$, in so ferne solches dann auch allemal convergent ist (Vgl. VIII. Th. §§. 91. 94.).

stimmt ist) noch dadurch näher bestimmen, daß man dasselbe bestimmte Integral vergleicht mit einem andern, z. B. mit

$$\int_0^1 \frac{1}{+\sqrt{1-x}} \cdot dx = \left[-2\sqrt{1-x}\right]_{1\div 0} = 2,$$

welches völlig bestimmt ist, und welches nothwendig größer als das vorige seyn muß, weil für alle Werthe von x zwischen 0 und 1 allemal $1+x>1$, also $(1+x)(1-x)>1-x$, also $\frac{1}{\sqrt{1-x}} > \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ seyn wird. Da nun $\pi = 3,14159 \cdots$ ist, so kann ν nur der Null gleich seyn, wenn $\nu\pi+\frac{1}{2}\pi$ kleiner als 2 bleiben und doch positiv seyn soll.

Eben so kann man $\int_0^1 \frac{1}{1+x^2} \cdot dx = \nu\pi+\frac{1}{4}\pi$ mit $\int_0^1 1 \cdot dx = 1$ vergleichen (in so ferne für jeden Werth von x zwischen 0 und 1, $\frac{1}{1+x^2}<1$, also das erstere bestimmte Integral kleiner als das andere seyn muß), um zu finden, daß $\nu = 0$ genommen werden müsse.

Dagegen wird man $\int_1^\infty \frac{1}{1+x^2} \cdot dx = \nu\pi+\frac{1}{4}\pi$, um sich zu überzeugen, daß $\nu = 0$ seyn muß, mit $\int_1^\infty \frac{1}{x^2} dx = \left[\frac{-1}{x}\right]_{\infty\div 1} = 1$ vergleichen. Das erstere Integral muß nämlich kleiner seyn, als das letztere, weil für alle Werthe von x zwischen 1 und ∞, allemal $\frac{1}{1+x^2} < \frac{1}{x^2}$ seyn wird.

Diese und ähnliche Mittel sind aber eben so unbequem als dem §. 1. zu Folge, überflüssig.

Anmerkg. 2. Man mache sich aber ja nicht die Mühe, ein bestimmtes Integral auszuwerthen, bevor man nicht sich überzeugt hat, daß dasselbe auch wirklich einen bestimmten Werth

habe. Nun gehört $\int_a^\infty \frac{1}{1+x^2} \cdot dx$ allemal zu den convergenten (nach VIII. Th. §§. 91. 94.), und eben so unterbricht zwar $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ oder $\frac{1}{(1+x)^{\frac{1}{2}}} \cdot \frac{1}{(1-x)^{\frac{1}{2}}}$ für $x=1$ ihr Daseyn aber auf die (im VIII. Th. §. 92.) erlaubte Weise, so daß $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \cdot dx$ ebenfalls noch einen bestimmten Werth hat. — Dagegen würden die bestimmten Integrale $\int_0^\infty \frac{1}{1+x} \cdot dx$, $\int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \cdot dx$, rc. rc. als divergent sich herausstellen, und $\int_0^1 \frac{1}{1-x} \cdot dx$, $\int_0^1 \frac{1}{1-x^2} \cdot dx$, $\int_0^1 \frac{1}{(1-x)^2} \cdot dx$, rc. rc. als solche bestimmte Integrale anerkannt werden müssen, welche wir unterbrochene nannten und die gar keinen Werth haben. — Sobald man dies erkannt hat, wird man sich keine Mühe mehr geben, den Werth des bestimmten Integrals zu finden, der nun gar nicht existirt. Auch würde man nun allemal etwas unrichtiges bekommen, wenn man den §. 1. in Anwendung bringen wollte.

§. 3.

Betrachten wir noch das Beispiel $\int_0^\infty \frac{1}{1 \pm 2x \cdot Cos\,\theta + x^2} \cdot dx$. — Indem man $x + Cos\,\theta = z$ setzt, findet sich das unbestimmte Integral

$$\int \frac{1}{1+2x \cdot Cos\,\theta + x^2} \cdot dx = \frac{1}{Sin\,\theta} \cdot \frac{1}{Tg} \frac{x \cdot Sin\,\theta}{1+x \cdot Cos\,\theta};$$

und, wenn man $-z$ statt x setzt, also $-dz$ statt dx,

$$\int \frac{1}{1-2x \cdot Cos\,\theta + x^2} \cdot dx = \frac{1}{Sin\,\theta} \cdot \frac{1}{Tg} \frac{x \cdot Sin\,\theta}{1-x \cdot Cos\,\theta},$$

welche zweite Gleichung aus der erstern auch dadurch hervorgegangen wäre, daß man $2\pi - \theta$ statt θ gesetzt hätte.

Hieraus folgt aber nun ohne Weiteres für jeden reellen Werth von a:

$$\int_0^a \frac{1}{1 \pm 2x \cdot Cos\,\theta + x^2} \cdot dx = \frac{1}{Sin\,\theta} \cdot Arc\,tg. \frac{a \cdot Sin\,\theta}{1 \pm a \cdot Cos\,\theta}, \text{*)}$$

wo alle oberen Vorzeichen zugleich gelten oder alle unteren zugleich. Wird aber $a = \infty$, so geht $\frac{a \cdot Sin\,\theta}{1 \pm a \cdot Cos\,\theta}$ zunächst in $\frac{Sin\,\theta}{\frac{1}{a} \pm Cos\,\theta}$, also in $\pm tg\,\theta$ über, und da $Arc\,tg.(\pm tg\,\theta)$ nur dann $= \pm \theta$ ist, wenn $\theta < \frac{1}{2}\pi$, (Einleitg. §. 10. zum VIII. Th.), so gelten die beiden Gleichungen

$$6) \qquad \int_0^\infty \frac{1}{1 \pm 2x \cdot Cos\,\theta + x^2} \cdot dx = \pm \frac{\theta}{Sin\,\theta}$$

nur dann, wenn $\theta < \frac{1}{2}\pi$ ist.

§. 4.

Ferner finden sich, wenn man statt $Cos\,bx$ und $Sin\,bx$ die, ihnen gleichen, aus $e^{bx \cdot i}$ und $e^{-bx \cdot i}$ zusammengesetzten Ausdrücke setzt, ohne Weiteres die drei unbestimmten Integrale

$$\int e^{-ax} \cdot dx = -\frac{1}{a} \cdot e^{-ax},$$

---

*) Für $\theta = 0$ erhält man rechts $\frac{0}{0}$; denkt man sich aber

$$Arc\,tg.\,z = z - \tfrac{1}{3}z^3 + \tfrac{1}{5}z^5 - \cdots,$$

so erhält man sogleich

$$\int_0^a \frac{1}{(1-x)^2} dx = \frac{a}{1-a}.$$

Man würde sich aber sehr irren, wenn man von dieser letzteren Gleichung annehmen wollte, daß sie für a positiv und >1 gilt; denn das Integral gehört dann zu den unterbrochenen und hat gar keinen Werth. Wohl aber gilt dieselbe Gleichung für jedes negative a, und für jedes positive a, welches <1 ist.

$$\int e^{-ax} \cdot Sin\, bx \cdot dx = -\frac{1}{a^2+b^2} \cdot e^{-ax} \cdot (a \cdot Sin\, bx + b \cdot Cos\, bx);$$

$$\int e^{-ax} \cdot Cos\, bx \cdot dx = -\frac{1}{a^2+b^2} \cdot e^{-ax} \cdot (a \cdot Cos\, bx - b \cdot Sin\, bx).$$

Weil aber für $x = \infty$, $e^{-ax} = +0$ (d. h. positiv unendlich-klein) wird, wenn a positiv und nicht unendlich-klein ist, so folgt, weil das Unendlich-Kleine $+0$ gegen das Endliche verschwindet, daß die 3 Gleichungen

7) $$\int_0^\infty e^{-ax} \cdot dx = \frac{1}{a},$$

8) $$\int_0^\infty e^{-ax} \cdot Sin\, bx \cdot dx = \frac{b}{a^2+b^2},$$

9) $$\int_0^\infty e^{-ax} \cdot Cos\, bx \cdot dx = \frac{a}{a^2+b^2}$$

gelten, wenn nur a positiv ist und nicht unendlich-klein, und b beliebig reell *).

Anmerkg. Setzt man in den letztern Formeln $b = 1$, so erhält man

$$\int_0^\infty e^{-ax} \cdot Sin\, x \cdot dx = \frac{1}{1+a^2}, \quad \int_0^\infty e^{-ax} \cdot Cos\, x \cdot dx = \frac{a}{1+a^2},$$

wenn a positiv und endlich gedacht wird. — Diese Formeln sind aber eben so allgemein als die 8. und 9., da diese letzteren sich sogleich wieder aus den vorstehenden ergeben, wenn man $x = bz$, also $dx = b \cdot dz$ setzt und zunächst b positiv sich denkt; hernach überzeugt man sich bald durch die bloße Ansicht, daß die neugewonnenen Resultate auch noch für jedes negativ gedachte b wahr bleiben.

---

*) Die Gleichung 7. giebt für $a = +0$ auf beiden Seiten das Unendlich-Große und in so ferne keinen Widerspruch. — Die Gleichungen 8. und 9. dagegen würden, wenn man sie für $a = +0$ gelten lassen wollte, ganz falsche Resultate geben.

§. 5.

Eben so wie in den Beispielen des §. 4. die unbestimmten Integrale zur Rechten nicht mehrdeutig sich gezeigt haben, so gilt dies auch von den beiden nachstehenden Beispielen, obgleich solches dem ersten Anblicke nach anders zu seyn scheint.

Ist nämlich $\int_0^\infty \frac{\left(\frac{1}{Tg}x\right)^m}{1+x^2}\cdot dx$ zu finden, so setze man $\frac{1}{Tg}x = z$, also $\frac{dx}{1+x^2} = dz$, und hat dann

$$\int \frac{\left(\frac{1}{Tg}x\right)^m}{1+x^2}\cdot dx = \int z^m \cdot dz = \frac{z^{m+1}}{m+1} = \frac{1}{m+1}\cdot\left(\frac{1}{Tg}x\right)^{m+1},$$

wo aber $\frac{1}{Tg}x$ links und rechts eine und dieselbe bestimmte ihrer Formen vorstellt. Denkt man sich also links unter $\frac{1}{Tg}x$, da alle Werthe von x zwischen 0 und ∞ liegen, also stets positiv seyn sollen, die bestimmte Form (VIII. Th. Einleitg. §. 11.) $n\pi + Arc\,tg.\,x$, wo n eine völlig bestimmte ganze Zahl ist (oder Null), so hat man

$$\int_0^\infty \frac{(n\pi + Arc\,tg.\,x)^m}{1+x^2}\cdot dx$$
$$= \frac{1}{m+1}\cdot(\tfrac{1}{2}\pi)^{m+1}\cdot[(2n+1)^{m+1}-(2n)^{m+1}],$$

welche Formel jedoch noch allgemeiner gilt, nämlich

a) $$\int_0^\infty \frac{(p + Arc\,tg.\,x)^m}{1+x^2}\cdot dx = \frac{1}{m+1}[(p+\tfrac{1}{2}\pi)^{m+1}-p^{m+1}],$$

wo p beliebig, wenn nur von x unabhängig gedacht ist *), während alle 3 Potenzen nach VIII. Th. Einleitg. §. 4. N. 3. und für einen und denselben Werth von ν zu nehmen sind.

---

*) Man findet dies unmittelbar, wenn man $p + Arc\,tg.\,x = z$ setzt, und das unbestimmte Integral aufsucht.

Für $p = 0$ erhält man hieraus:

10) $$\int_0^\infty \frac{(Arc\,tg.\,x)^m}{1+x^2}\cdot dx = \frac{1}{m+1}\cdot(\tfrac{1}{2}\pi)^{m+1};$$

wo m beliebig reell gedacht ist*) und die Potenzen ihre positiven Werthe vorstellen; — also ist namentlich auch (für $m = 1$)

11) $$\int_0^\infty \frac{Arc\,tg.\,x}{1+x^2}\cdot dx = \tfrac{1}{8}\pi^2.$$

Ganz auf dieselbe Weise findet man

$$\int \frac{(log\,x)^m}{x}\cdot dx = \frac{1}{m+1}\cdot(log\,x)^{m+1},$$

wo rechts und links dasselbe Zeichen $log\,x$ jedesmal einen und denselben seiner unendlich-vielen Werthe vorstellt. Denkt man sich nun die Grenzen a und b des Integrals und daher alle Werthe von x nur positiv, und dann (VIII. Th. Einleitg. §. 5.) $log\,x = Lx + 2n\pi\cdot i$, wo n irgend eine bestimmte ganze Zahl oder Null ist, so hat man

$$\int_a^b \frac{(Lx+2n\pi\cdot i)^m}{x}\cdot dx$$

$$= \frac{1}{m+1}[(Lb+2n\pi\cdot i)^{m+1}-(La+2n\pi\cdot i)^{m+1}],$$

welche Gleichung jedoch auch gilt, wenn statt $2n\pi\cdot i$ jeder beliebige reelle oder imaginäre Ausdruck p gesetzt wird, weil auch $\int \frac{(p+Lx)^m}{x}\cdot dx = \frac{(p+Lx)^{m+1}}{m+1}$ ist.

Also ist

12) $$\int_a^b \frac{(p+Lx)^m}{x}\cdot dx$$

$$= \frac{1}{m+1}\cdot[(p+Lb)^{m+1}-(p+La)^{m+1}],$$

*) Daß m nicht $= -1$ seyn darf, versteht sich von selbst, da wir überall ein für allemal voraussetzen müssen, daß alle Formeln nicht mehr gelten, sobald einer der vorkommenden Nenner oder Logarithmanden, der Null gleich wird.

wenn nur a und b positiv sind, während p beliebig reell oder imaginär gedacht wird, wenn nur die Potenzen nach VIII. Th. Einleitg. §. 4. N. 3. und alle drei für einen und denselben Werth von ν genommen werden.

§. 6.

Betrachten wir aber $\int_a^b \frac{1}{x \cdot log x} \cdot dx$, so erhält man zunächst, wenn $log\, x = z$ gesetzt wird (weil dann $\frac{dx}{x} = dz$ ist),

$$\int \frac{1}{x \cdot log x} \cdot dx = \int \frac{dz}{z} = log\, z = log\,(log\, x),$$

wo rechts der innere $log\, x$ derselbe bestimmte Logarithme wie der zur Linken ist, während der äußere Logarithme zur Rechten seine unendlich-vielen Werthe vorstellt.

Nimmt man daher die Grenzen a und b und somit alle Werthe von x positiv, und zur Linken $log\, x = Lx + 2n\pi \cdot i$, wo n eine völlig bestimmte positive oder negative ganze Zahl ist oder Null, so erhält man

$$\int_a^b \frac{1}{x \cdot (Lx + 2n\pi \cdot i)} \cdot dx = log\,(Lb + 2n\pi \cdot i) - log\,(La + 2n\pi \cdot i),$$

welche Gleichung jedoch noch allgemeiner wahr ist, nämlich

b) $$\int_a^b \frac{1}{x \cdot (p + Lx)} \cdot dx = log\,(p + Lb) - log\,(p + La), \text{*)}$$

wo p jeden reellen oder imaginären, von x unabhängigen Ausdruck bedeutet, während rechts beide Zeichen log jedesmal eine und dieselbe ihrer unendlich-vielen Formen vorstellen und a und b positiv sind.

Ist nun p reell gedacht, so erhält man

13) $$\int_a^b \frac{1}{x(p + Lx)} \cdot dx = L \frac{p + Lb}{p + La},$$

*) Dies geht aus dem unbestimmten Integral hervor, welches gefunden wird, indem man $p + Lx = z$ setzt.

wenn nur a und b positiv sind und $p + Lx$ für keinen der Werthe von x (von $x = a$ bis $x = b$) der Null gleich wird, damit das Integral kein unterbrochenes ist.

§. 7.

Wenn bestimmte Integrale zwischen den Grenzen 0 und ∞, oder zwischen den Grenzen $-\infty$ und $+\infty$ genommen werden sollen und zwar direkt aus dem unbestimmten Integral, so kann das Einsetzen der Grenzwerthe $+\infty$ und $-\infty$ zuweilen einige besondere Aufmerksamkeit erfordern, wie wir in dem Nachfolgenden noch besonders veranschaulichen wollen.

Soll z. B. $\int_0^\infty \frac{f_x}{F_x} \cdot dx$ unter der Voraussetzung ausgewerthet werden

1) daß f_x und F_x ganze Funktionen von x mit reellen Koeffizienten sind,

2) daß f_x wenigstens um 2 Grade niedriger ist als F_x,

3) daß F_x für keinen positiven Werth von x, von $x = 0$ an bis $x = \infty$ hin, der Null gleich wird, und daß endlich

4) F_x lauter ungleiche (negative oder imaginäre) einfache Faktoren habe *), — so muß man F_x in seine Doppel-Faktoren zerlegen und die gebrochene Funktion in ihre Doppel-Partialbrüche von der Form

$$\frac{Px + Q}{x^2 + ax + b}$$

(auf welche Form man auch den übrig bleibenden einfachen Partialbruch $\frac{P}{x+\alpha} = \frac{Px + P\alpha}{x^2 + 2\alpha x + \alpha^2}$ bringen kann, wenn F_x vom ungeraden Grade ist), und dann muß man jeden dieser Partialbrüche integriren. Nun ist aber

*) Die Bedingungen 2.) und 3.) sind nöthig, damit das Integral ununterbrochen und convergent ist, folglich wirklich einen angebbaren Werth hat. Der Faktor $x - \alpha$ heißt (so lange x unbestimmt gedacht wird) **negativ** oder **imaginär**, je nachdem α negativ oder imaginär ist.

$$\int \frac{Px+Q}{x^2+ax+b} \cdot dx$$
$$= \tfrac{1}{2}P \cdot log(x^2+ax+b) + \frac{Q-\frac{1}{2}aP}{\sqrt{b-\frac{1}{4}a^2}} \cdot \frac{1}{Tg} \frac{x+\frac{1}{2}a}{\sqrt{b-\frac{1}{4}a^2}} \text{*)};$$

und diese Gleichung gilt auch noch für einen einfachen Partialbruch, wenn derselbe in einen doppelten verwandelt worden seyn sollte; und es wäre für ihn $Q-\frac{1}{2}aP = 0$.

Nimmt man nun dieses Integral zwischen den Grenzen 0 und x, addirt man dann die Integrale aller Partialbrüche und nimmt man hernach x immer größer und größer und zuletzt $x = \infty$, so wird x^2+ax+b trotz der verschiedenen Werthe von a und b zuletzt immer mehr und mehr dem Werthe x^2 sich nähern und die Summe der ersten Summanden in diesen Theil-Integralen wird daher $= Lx \cdot \Sigma P$, wo $x = \infty$, ΣP aber die Summe aller Koeffizienten P bedeutet, in allen Partialbrüchen. — Weil aber f_x gegen F_x (und auch $f_x \cdot (x+\alpha)$ gegen $F_x \cdot (x+\alpha)$) nach der Voraussetzung 2.) um wenigstens 2 Grad niedriger ist, so ist $\Sigma P = 0$; — folglich wird man haben, weil (nach VIII. Th. Einleitg. §. 16.) allemal $0 \cdot L\infty = 0$ wird,

I. $$\int_0^\infty \frac{f_x}{F_x} \cdot dx = -\tfrac{1}{2}\Sigma(P \cdot Lb)$$
$$+ \Sigma\left(\frac{Q-\frac{1}{2}aP}{\sqrt{b-\frac{1}{4}a^2}}\left[\tfrac{1}{2}\pi - Arc\,tg.\frac{\frac{1}{2}a}{\sqrt{b-\frac{1}{4}a^2}}\right]\right),$$

wo für jeden andern der Partialbrüche die zusammengehörigen Werthe von a, b, P, Q immer andere seyn werden, während das Summenzeichen Σ sich über **alle** Partialbrüche erstreckt.

Dagegen ist aus denselben Gründen

II. $$\int_{-\infty}^\infty \frac{f_x}{F_x} \cdot dx = \pi \cdot \Sigma \frac{Q-\frac{1}{2}aP}{\sqrt{b-\frac{1}{4}a^2}},$$

---

*) Vermöge eines Druckfehlers steht in der hier gebrauchten Formel N. 9. der Anmerkg. zu §. 10. des „Geist der Differ.- und Integral-Rechnung", $\frac{b+2ap}{2\alpha q}$ statt $\frac{b+ap}{\alpha q}$, welches letztere das richtige ist.

sobald nur in diesem letzteren Falle (der II.) F_x auch durch keinen negativen Werth von x (und auch nicht für $x = 0$) der Null gleich wird, also nur imaginäre einfache Faktoren hat (deshalb auch nur vom geraden Grade ist), damit das bestimmte Integral nicht zu den unterbrochenen gehöre, welches gar keinen Werth haben würde.

Die vorkommende Quadratwurzel $\sqrt{b-\frac{1}{4}a^2}$ darf (in I. und in II.) nie negativ genommen werden, also stets positiv oder Null.

Betrachten wir nun hiervon einige besondere Fälle.

§. 8.

Nehmen wir zunächst den Nenner $= x^p-1$, so müssen wir auch den Zähler so nehmen, daß er durch $x-1$ theilbar ist, weil sich sonst die Bedingung N. 3. des §. 7. nicht erfüllt sieht; dagegen muß der Zähler f_x auch noch durch $x+1$ theilbar seyn, sobald p eine gerade Zahl ist und die Formel II. des §. 7. in Anwendung kommen soll, weil dann auch der Nenner diesen Faktor $x+1$ hat, das Integral selbst also zu den unterbrochenen (VIII. Th. §. 92.) gehört, wenn nicht Zähler und Nenner auch mit $x+1$ wegdividirt werden können. — Nehmen wir also statt $\frac{f_x}{F_x}$ zunächst die gebrochene Funktion

$$\frac{x^{n-1}(x^{m-n}-1)}{x^p-1} \quad \text{d. h.} \quad \frac{x^{m-1}-x^{n-1}}{x^p-1},$$

wo wir uns $m-n$ gerade denken müssen, so oft p gerade ist und dabei die Formel II. des §. 7. in Anwendung kommen soll. — Außerdem kann $m-n$ gerade oder ungerade seyn, sowohl bei Anwendung der I., als auch bei Anwendung der II.

Nun hat der Nenner x^p-1 die einfachen Faktoren

$$x-\sqrt[p]{1} \quad \text{d. h.} \quad x-e^{\frac{2a\pi}{p}\cdot i} \quad \text{und} \quad x-e^{-\frac{2a\pi}{p}\cdot i},$$

also den Doppel-Faktor $x^2-2x\cdot Cos\frac{2a\pi}{p}+1$,

mithin den Doppel-Partialbruch *)

$$\frac{2}{p}\cdot\frac{x\cdot\left(Cos\frac{2am\pi}{p}-Cos\frac{2an\pi}{p}\right)+Cos\frac{2a(n-1)\pi}{p}-Cos\frac{2a(m-1)\pi}{p}}{x^2-2x\cdot Cos\frac{2a\pi}{p}+1},$$

wo a nach und nach 1, 2, 3, 4, ꝛc. ꝛc. bedeutet, aber nicht Null, weil der Faktor $x-1$ dem Zähler und Nenner gemeinschaftlich ist und wegdividirt wird. Der letzte Werth von a ist

---

*) Zu dem Nenner $x-e^{\frac{2a\pi}{p}\cdot i}$ gehört der Zähler $\frac{x^{m-1}-x^{n-1}}{N}$ wo $N=\frac{x^p-1}{x-e^{\frac{2a\pi}{p}\cdot i}}$ ist, wenn in diesem Zähler $x=e^{\frac{2a\pi}{p}\cdot i}$ genommen wird, wodurch jedoch N die Form $\frac{0}{0}$ annimmt. Differenziirt man aber Zähler und Nenner von N nach x, so erhält man $p\cdot x^{p-1}$ für $x=e^{\frac{2a\pi}{p}\cdot i}$ statt des $\frac{0}{0}$ Werthes. Der Zähler des einfachen Partialbruches wird daher

$$=\frac{1}{p}(x^{m-p}-x^{n-p}) \text{ für } x=e^{\frac{2a\pi}{p}\cdot i} \text{ genommen,}$$

also

$$=\frac{1}{p}\left(e^{\frac{2am\pi}{p}\cdot i}-e^{\frac{2an\pi}{p}\cdot i}\right),$$

weil $e^{\frac{2ap\pi}{p}\cdot i}=e^{2a\pi\cdot i}=1$ ist. — Der einfache Partialbruch selbst ist daher

$$\frac{1}{p}\cdot\frac{e^{\frac{2am\pi}{p}\cdot i}-e^{\frac{2an\pi}{p}\cdot i}}{x-e^{\frac{2a\pi}{p}\cdot i}};$$

und der zugehörige wird dann auf demselben Wege gefunden

$$=\frac{1}{p}\cdot\frac{e^{-\frac{2am\pi}{p}\cdot i}-e^{-\frac{2an\pi}{p}\cdot i}}{x-e^{-\frac{2a\pi}{p}\cdot i}}.$$

Beide zusammen addirt geben dann den obigen Doppel-Partialbruch.

$=\frac{1}{2}(p-1)$, wenn p ungerade, dagegen $=\frac{1}{2}p$, wenn p gerade und $m-n$ ungerade ist; endlich ist solcher $=\frac{1}{2}(p-2)$, so oft p wieder gerade, aber $m-n$ ebenfalls gerade ist.

Dasmal sind also die Werthe von P, Q, a und b (im vorhergehenden Paragraphen) folgende, nämlich:

$$P=\frac{2}{p}\cdot\left(Cos\frac{2am\pi}{p}-Cos\frac{2an\pi}{p}\right),$$

$$Q=\frac{2}{p}\cdot\left(Cos\frac{2a(n-1)\pi}{p}-Cos\frac{2a(m-1)\pi}{p}\right),$$

$$a=-2\,Cos\frac{2a\pi}{p} \text{ und } b=1;$$

folglich ist auch

$$Lb=0 \text{ und } \sqrt{b-\tfrac{1}{4}a^2}=Sin\frac{2a\pi}{p},$$

welcher Sinus wirklich immer positiv ist, wie solches von der Quadratwurzel verlangt worden; — ferner ist jetzt

$$Arc\,tg.\frac{\frac{1}{2}a}{\sqrt{b-\frac{1}{4}a^2}}=Arc\,tg.\left(-Cotg\frac{2a\pi}{p}\right)=\frac{2a\pi}{p}-\tfrac{1}{2}\pi,$$

folglich auch

$$\tfrac{1}{2}\pi-Arc\,tg.\frac{\frac{1}{2}a}{\sqrt{b-\frac{1}{4}a^2}}=\pi-\frac{2a\pi}{p};$$

endlich wird

$$\frac{p}{2}(Q-\tfrac{1}{2}aP)$$
$$=Cos\frac{2a(n-1)\pi}{p}-Cos\frac{2a(m-1)\pi}{p}$$
$$+Cos\frac{2a\pi}{p}\left(Cos\frac{2am\pi}{p}-Cos\frac{2an\pi}{p}\right)$$
$$=Sin\frac{2a\pi}{p}\cdot\left(Sin\frac{2an\pi}{p}-Sin\frac{2am\pi}{p}\right).$$

Die Gleichungen I. und II. des §. 7. werden daher jetzt zunächst:

$$\text{I.}\quad \int_0^{\infty} \frac{x^{m-1}-x^{n-1}}{x^p-1} \cdot dx = \frac{2\pi}{p} \cdot S\left(Sin\frac{2an\pi}{p} - Sin\frac{2am\pi}{p}\right)$$
$$-\frac{4\pi}{p^2} \cdot S\left(a \cdot Sin\frac{2an\pi}{p} - a \cdot Sin\frac{2am\pi}{p}\right)$$

und

$$\text{II.}\quad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^{m-1}-x^{n-1}}{x^p-1} \cdot dx = \frac{2\pi}{p} \cdot S\left(Sin\frac{2an\pi}{p} - Sin\frac{2am\pi}{p}\right),$$

wo sich das Summenzeichen S auf alle Werthe von a erstreckt, welche 1, 2, 3, ꝛc. ꝛc. und zuletzt $\frac{1}{2}(p-1)$ oder $\frac{1}{2}p$ oder $\frac{1}{2}(p-2)$ sind, je nachdem man p ungerade oder gerade und im letztern Falle $m-n$ ungerade oder gerade hat.

Zur Bewerkstelligung der Summationen auf der rechten Seite dieser Gleichungen I. und II. nimmt man nun folgende Formeln zu Hilfe, nämlich (nach VIII. Th. §. 18.)

$$Sin\,v + Sin\,2v + Sin\,3v + \cdots + Sin\,\mu v = \frac{Cos\frac{1}{2}v - Cos(\mu+\frac{1}{2})v}{2\,Sin\frac{1}{2}v}$$

$$Sin\,v + 2\,Sin\,2v + 3\,Sin\,3v + \cdots + \mu \cdot Sin\,\mu v$$
$$= \frac{(\mu+1)\,Sin\,\mu v - \mu\,Sin(\mu+1)v}{4(Sin\frac{1}{2}v)^2}\ {}^{*)};$$

und man erhält dann, wenn statt v bald $\frac{2n\pi}{p}$, bald $\frac{2m\pi}{p}$

*) Die erstere dieser Summen erhält man, wenn man solche mit $Sin\frac{1}{2}v$ multiplicirt, die Produkte der Sinus in Differenzen von Cosinus verwandelt und dann wieder durch $Sin\frac{1}{2}v$ dividirt; oder sie kann auch nach §. 18. Th. VIII. gefunden werden, indem man von

$$z + z^2 + z^3 + \cdots + z^\mu = \frac{z(z^\mu - 1)}{z-1}$$

ausgeht, zuletzt aber $z = 1$ nimmt. — Die andere Summation macht sich (nach §. 19. des VIII. Th.) dadurch, daß man die gesuchte Summe $= V$ setzt, dann $\int V \cdot dv$ findet, und letzteres Resultat, welches eine Reihe von Cosinussen ist, wieder dadurch summirt, daß man selbige mit $Sin\frac{1}{2}v$ multiplicirt und die Produkte von Sinus und Cosinus in Differenzen von Sinus verwandelt, um zuletzt wieder durch $Sin\frac{1}{2}v$ zu dividiren. — Hat man auf diese Weise $\int V \cdot dv$ in endlicher Form ausgedrückt, so darf man nur wieder nach v differenziiren, um V selbst zu haben.

gesetzt wird, und wenn man die Untersuchung erst für ungerade p durchführt, wo $\mu = \frac{1}{2}(p-1)$, dann für gerade p, wo $\mu = \frac{1}{2}p$ oder $= \frac{1}{2}(p-2)$ ist, je nachdem man m—n ungerade oder gerade gedacht hat, — sogleich in allen Fällen

$$14)\quad \int_0^\infty \frac{x^{m-1}-x^{n-1}}{x^p-1}\cdot dx = \frac{\pi}{p}\cdot\left(Cotg\frac{n\pi}{p} - Cotg\frac{m\pi}{p}\right),$$

wo m, n, p positive ganze Zahlen sind, und $p > m$ auch $p > n$ vorausgesetzt worden ist; während später (im §. 13.) gezeigt wird, daß dieselbe Gleichung auch noch gilt, wenn m, n, p beliebig positiv (ganz oder gebrochen) sind, sobald nur $p > m$ und $p > n$ gedacht ist.

Bei der Gleichung II. ergeben sich aber zur Rechten zwei verschiedene Formen, je nachdem p ungerade oder gerade ist. Man findet nämlich, wenn $2p+1$ statt p gesetzt und die letztere Rechnung durchgeführt wird:

$$\text{III.}\quad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^{m-1}-x^{n-1}}{x^{2p+1}-1}\cdot dx$$

$$= \frac{\pi}{2p+1}\cdot\left[\frac{Cos\, m\pi - Cos\frac{m\pi}{2p+1}}{Sin\frac{m\pi}{2p+1}} - \frac{Cos\, n\pi - Cos\frac{n\pi}{2p+1}}{Sin\frac{n\pi}{2p+1}}\right],$$

dagegen

$$\text{IV.}\quad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^{m-1}-x^{n-1}}{x^{2p}-1}\cdot dx$$

$$= \frac{\pi}{2p}\cdot\left[(1-Cos\, n\pi)\cdot Cotg\frac{n\pi}{2p} - (1-Cos\, m\pi)\cdot Cotg\frac{m\pi}{2p}\right],$$

wo m, n, p ganze positive Zahlen sind, wo der Zähler wenigstens um 2 Grade niedriger seyn muß als der Nenner, während in der letztern Gleichung die Differenz m—n auch noch eine gerade Zahl seyn muß, damit das Integral nicht zu den unterbrochenen gehöre, d. h. wirklich einen Werth habe.

Und da $Cos\, m\pi$, $Cos\, n\pi$ den Werth $+1$ oder -1 haben, je nachdem m, n gerade Zahlen sind oder ungerade, so ergeben sich noch hieraus, je nachdem $2m$ oder $2m+1$,

eben so 2n oder 2n+1 statt bezüglich m und n gesetzt werden, folgende Resultate, nämlich zunächst aus III.

$$15)\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x^{2m-1}-x^{2n-1}}{x^{2p+1}-1}\cdot dx = \frac{\pi}{2p+1}\cdot\left[Tg\frac{m\pi}{2p+1}-Tg\frac{n\pi}{2p+1}\right]$$

$$16)\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x^{2m}-x^{2n}}{x^{2p+1}-1}\cdot dx$$

$$=\frac{\pi}{2p+1}\cdot\left[Cotg\frac{(n+\frac{1}{2})\pi}{2p+1}-Cotg\frac{(m+\frac{1}{2})\pi}{2p+1}\right]$$

$$17)\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x^{2m-1}-x^{2n}}{x^{2p+1}-1}\cdot dx = \frac{\pi}{2p+1}\cdot\left[Tg\frac{m\pi}{2p+1}+Cotg\frac{(n+\frac{1}{2})\pi}{2p+1}\right],$$

welche 2 letztern Gleichungen auch dann noch gelten, wenn $n=0$ ist *).

Außerdem gelten diese Gleichungen alle nur, wenn m, n, p positive ganze Zahlen sind, und der Nenner der Differenzial-Funktion wenigstens um 2 Grade höher ist als der Zähler.

Aus der IV. ergeben sich auf demselben Wege Resultate, die, wenn m und n beide gerade oder beide ungerade genommen werden, aus VIII. Th. §. 88. NN. 3. 4. von selbst sich verstehen, welche aber unrichtig seyn würden, wenn man m gerade und n ungerade, oder m ungerade und n gerade nehmen wollte, weil dann das bestimmte Integral ein unterbrochenes wäre, d. h. keinen Werth hätte, während doch zur Rechten sich ein bestimmter endlicher Werth ergeben würde.

---

*) Für $m=1$, $n=0$ und $p=1$ erhält man aus N. 17.

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x-1}{x^3-1}\cdot dx \quad \text{d. h.} \quad \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{x^2+x+1}\cdot dx = \frac{\pi}{3}(Tg\tfrac{1}{3}\pi+Cotg\tfrac{1}{6}\pi),$$

$$=\frac{\pi}{3}\cdot 2\,Tg\tfrac{1}{3}\pi = \frac{2\pi}{\sqrt{3}}.$$

Für $m=2$, $n=0$ und $p=2$ giebt dieselbe noch

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x^3-1}{x^5-1}\cdot dx \quad \text{d. h.} \quad \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x^2+x+1}{x^4+x^3+x^2+x+1}\cdot dx$$

$$=\frac{\pi}{5}(Tg\tfrac{4}{10}\pi+Cotg\tfrac{1}{10}\pi)=\frac{2\pi}{5}\cdot Cotg\tfrac{1}{10}\pi=\frac{2\pi}{5}\cdot\sqrt{5+2\sqrt{5}}.$$

§. 9.

Betrachten wir nun als einen zweiten besondern Fall des §. 7. das Integral

$$\int \frac{x^{m-1}}{x^p+1} \cdot dx.$$

Ist p gerade, so hat der Nenner lauter imaginäre Faktoren; ist aber p ungerade, so hat der Nenner den einzigen reellen Faktor $x+1$, und das Integral kann daher nun nicht mehr zwischen den Grenzen $-\infty$ und $+\infty$ genommen werden, weil es dann ein unterbrochenes seyn würde.

Die Faktoren des Nenners x^p+1 sind hier

$$x-\sqrt[p]{-1} \quad \text{d. h.} \quad x-e^{\frac{(2a+1)\pi}{p}\cdot i} \quad \text{und} \quad x-e^{-\frac{(2a+1)\pi}{p}\cdot i};$$

daher sind die Doppel-Faktoren ausgedrückt durch

$$x^2-2x\cdot Cos\frac{(2a+1)\pi}{p}+1,$$

wo a alle Werthe 0, 1, 2, 3, ⋯ $\frac{1}{2}p-1$ oder $\frac{1}{2}(p-1)$ vorstellt; — und der Zähler des Partialbruchs, welcher den vorstehenden Nenner hat, findet sich

$$=\frac{2}{p}\cdot\left[-x\cdot Cos\frac{(2a+1)m\pi}{p}+Cos\frac{(2a+1)(m-1)\pi}{p}\right],$$

so daß sich die Werthe von P, Q, a, b des §. 7. jetzt so finden, nämlich

$$P=-\frac{2}{p}\cdot Cos\frac{(2a+1)m\pi}{p},$$

$$Q=\frac{2}{p}\cdot Cos\frac{(2a+1)(m-1)\pi}{p},$$

$$a=-2Cos\frac{(2a+1)\pi}{p} \quad \text{und} \quad b=1;$$

daher noch

$$\sqrt{b-\tfrac{1}{4}a^2}=Sin\frac{(2a+1)\pi}{p},$$

$$\frac{Q-\frac{1}{2}aP}{\sqrt{b-\frac{1}{4}a^2}}=\frac{2}{p}\cdot\frac{Cos\frac{(2a+1)(m-1)\pi}{p}-Cos\frac{(2a+1)}{p}\cdot Cos\frac{(2a+1)m\pi}{p}}{Sin\frac{(2a+1)\pi}{p}}$$

$$=\frac{2}{p}\cdot Sin\frac{(2a+1)m\pi}{p}$$

und

$$Arc\,tg.\frac{\frac{1}{2}a}{\sqrt{b-\frac{1}{4}a^2}}=Arc\,tg.\left(-Cotg\frac{(2a+1)\pi}{p}\right)=\frac{(2a+1)\pi}{p}-\tfrac{1}{2}\pi;$$

also (nach §. 7.)

$$\text{I.}\quad\int_0^\infty\frac{x^{m-1}}{x^p+1}\cdot dx=\frac{2\pi}{p}\cdot S\left[Sin\frac{(2a+1)m\pi}{p}\right]$$
$$-\frac{2\pi}{p^2}\cdot S\left[(2a+1)\cdot Sin\frac{(2a+1)m\pi}{p}\right],$$

wo a alle Werthe $0, 1, 2, 3, \cdots \frac{1}{2}p-1$ oder $\frac{1}{2}(p-1)$ hat und wo p gerade oder ungerade seyn kann, aber $>m$ seyn muß;

$$\text{II.}\quad\int_{-\infty}^\infty\frac{x^{m-1}}{x^p+1}\cdot dx=\frac{2\pi}{p}\cdot S\left[Sin\frac{(2a+1)m\pi}{p}\right],$$

wo das Summenzeichen S sich über alle Werthe von a erstreckt, welche $0, 1, 2, 3, \cdots \frac{1}{2}p-1$ sind und wo p nur gerade seyn kann und ebenfalls $>m$ seyn muß, weil das Integral sonst (für $x=-1$) ein unterbrochenes wäre, also gar keinen Werth hätte.

Bezeichnen wir nun den Endwerth von a, er mag $\frac{1}{2}(p-1)$ oder $\frac{1}{2}p-1$ seyn, durch μ und summiren wir die Reihen zur Rechten in den vorstehenden Gleichungen I. und II. nach den Formeln:

$$Sin\,v+Sin\,3v+Sin\,5v+\cdots+Sin(2\mu+1)v=\frac{1-Cos(2\mu+2)v}{2\,Sin\,v},$$

$$Sin\,v+3\cdot Sin\,3v+5\cdot Sin\,5v+\cdots+(2\mu+1)\cdot Sin(2\mu+1)v$$
$$=\frac{(2\mu+3)\cdot Sin(2\mu+1)v-(2\mu+1)\cdot Sin(2\mu+3)v\ ^{*)}}{4(Sin\,v)^2},$$

*) Die erstere Summe wird gefunden, wenn man die Reihe mit $Sin\,v$

indem wir $\frac{m\pi}{p} = v$ setzen, so erhält man, wenn zuerst ungerade Zahlen statt p gedacht werden und dann gerade, in beiden Fällen aus I.

$$18)\quad \int_0^\infty \frac{x^{m-1}}{1+x^p}\cdot dx = \frac{\left(\frac{\pi}{p}\right)}{Sin\, m\cdot\frac{\pi}{p}}.$$

Von dieser Gleichung werden wir später (im §. 14.) noch nachweisen, daß sie auch für gebrochene wie für ganze positive Werthe von m und p gleichmäßig gilt, wenn nur $m<p$ ist.

Die II., in welcher p nur gerade gedacht werden darf, giebt Null, wenn m gerade und das Doppelte vom vorstehenden, so oft m ungerade ist, welche beide Resultate sich jedoch nach VIII. Th. §. 88. NN. 3. 4. von selbst verstehen *).

Da hier in II. die Zahl p nicht ungerade gedacht werden

---

multiplicirt, die Produkte der Sinus in Differenzen der Cosinus zerlegt, und zuletzt wieder durch $Sin\, v$ dividirt. — Die andere Summe wird gefunden, wenn man die Reihe zuerst nach v integrirt, dann die entstehende Reihe auf einem, dem eben beschriebenen analogen Wege summirt, zuletzt aber wieder nach v differenzirt (Vergl. §§. 18. 19. des VIII. Th.).

*) Wollte man die Gleichung 18.) bloß für gerade Exponenten, also bloß in der Form

$$\int_0^\infty \frac{x^{2m}}{x^{2p}+1}\cdot dx = \frac{\left(\frac{\pi}{2p}\right)}{Sin\,(2m+1)\frac{\pi}{2p}}$$

erhalten, ohne eine solche systematische Betrachtung aller Fälle eintreten zu lassen, wie dies vorstehend geschehen ist, so war es am bequemsten zuerst $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^{2m}}{x^{2p}+1}\cdot dx$ aus II. zu finden, und dann (nach VIII. Th. §. 88. N. 3.) davon die Hälfte zu nehmen. — Man hätte aber dann nicht gewußt, ob diese Formel 18.) auch für ungerade Exponenten von x gilt; — und auch die oben erwähnte Verallgemeinerung, wie sie der §. 14. für gebrochene Exponenten geben wird, hätte dann nicht in ihrem ganzen Umfange eintreten können.

durfte, so wollen wir noch der größeren Vollständigkeit wegen die bestimmten Integrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^{m-1}+x^{n-1}}{x^{2p+1}+1} \cdot dx \quad \text{und} \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^{m-1}-x^{n-1}}{x^{2p+1}+1} \cdot dx$$

betrachten, wovon das erstere nur dann einen Werth hat, wenn m—n ungerade, das andere aber nur dann, wenn m—n gerade ist (weil der Zähler jedesmal durch $x+1$ theilbar seyn muß, wenn das bestimmte Integral nicht zu den unterbrochenen gehören soll). — Die Gleichung II. giebt für diese Beispiele sogleich

$$\text{III.} \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^{m-1} \pm x^{n-1}}{x^{2p+1}+1} \cdot dx$$

$$= \frac{2\pi}{2p+1} \cdot \left(S\left[Sin \frac{(2a+1)m\pi}{2p+1} \right]_{a+b=p-1} \pm S\left[Sin \frac{(2a+1)n\pi}{2p+1} \right]_{a+b=p-1} \right),$$

wenn wir die in der Vorrede zum VIII. Th. näher angegebene Summenbezeichnung gebrauchen; und die Summation dieser Reihen zur Rechten (nach §§. 18. 19. des VIII. Th.) giebt dann dasselbe Integral

$$\text{IV.} \quad = \frac{2\pi}{2p+1} \cdot \left(\frac{1 - Cos\, m\pi \cdot Cos \frac{m\pi}{2p+1}}{Sin \frac{m\pi}{2p+1}} \pm \frac{1 - Cos\, n\pi \cdot Cos \frac{n\pi}{2p+1}}{Sin \frac{n\pi}{2p+1}} \right).$$

Dies giebt, je nachdem man $2m$ oder $2m+1$ statt m, und gleichzeitig $2n$ oder $2n+1$ statt n schreibt, folgende Resultate:

$$19) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^{2m-1} - x^{2n-1}}{x^{2p+1}+1} \cdot dx = \frac{\pi}{2p+1} \cdot \left(Tg \frac{m\pi}{2p+1} - Tg \frac{n\pi}{2p+1} \right);$$

$$20) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^{2m} - x^{2n}}{x^{2p+1}+1} \cdot dx = \frac{\pi}{2p+1} \cdot \left(Cotg \frac{(m+\frac{1}{2})\pi}{2p+1} - Cotg \frac{(n+\frac{1}{2})\pi}{2p+1} \right);$$

$$21) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^{2m-1} + x^{2n}}{x^{2p+1}+1} \cdot dx = \frac{\pi}{2p+1} \cdot \left(Tg \frac{m\pi}{2p+1} + Cotg \frac{(n+\frac{1}{2})\pi}{2p+1} \right), ^{*)}$$

---

*) Setzt man $x = -z$, so geht aus der N. 21. sogleich die N. 17. des §. 8. wieder hervor; aber eben dadurch aus der hiesigen N. 20. die frü-

welche zwei letzteren Gleichungen auch noch gelten, wenn $n=0$ ist; außerdem gelten diese drei letzteren Resultate nur, wenn m, n, p positive ganze Zahlen sind und wenn der Nenner der Differenzial-Funktion wenigstens um 2 Grade höher ist als der Zähler.

§. 10.

Wir können dieses Kapitel nicht schließen, ohne wenigstens noch einiger hierher gehöriger Beispiele zu gedenken, in denen zugleich die ausgerechneten Werthe für

$$\frac{1}{Sin}(p+q\cdot i), \quad \frac{1}{Cos}(p+q\cdot i), \quad \frac{1}{Tg}(p+q\cdot i), \quad \text{ꝛc. ꝛc.}$$

in Anwendung kommen können oder auch müssen.

Sind z. B. zu bestimmen die Werthe von

$$1) \quad \int_0^\infty \frac{(e^{ax}+e^{-ax})\cdot Cos\,bx}{e^{2ax}+2\,Cos\,2bx+e^{-2ax}}\cdot dx$$

und

$$2) \quad \int_0^\infty \frac{(e^{ax}-e^{-ax})\cdot Sin\,bx}{e^{2ax}+2\,Cos\,2bx+e^{-2ax}}\cdot dx,$$

so wird man zunächst statt $Cos\,bx$, $Sin\,bx$ und $Cos\,2bx$, die ihnen gleichen Potenz-Ausdrücke setzen, — dann den Nenner in die beiden Faktoren $e^{(a+b\cdot i)x}+e^{-(a+b\cdot i)x}$ und $e^{(a-b\cdot i)x}+e^{-(a-b\cdot i)x}$,

---

here N. 16., endlich aus der hiesigen N. 19. die frühere N. 15. — Es hätten also auch diese letzteren aus jenen gefunden werden können, wenn man dort $x=-z$ gesetzt hätte.

Uebrigens giebt diese N. 21. für $m=1$, $n=0$ und $p=1$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x+1}{x^3+1}\cdot dx = \int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{x^2-x+1}\cdot dx = \frac{\pi}{3}\cdot(Tg\,\tfrac{1}{3}\pi + Cotg\,\tfrac{1}{6}\pi)$$
$$= \frac{\pi}{3}\cdot 2\,Tg\,\tfrac{1}{3}\pi = \frac{2\pi}{\sqrt{3}};$$

es ist also dieses bestimmte Integral gerade so groß als wie das in der Note zu §. 8. gefundene $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{x^2+x+1}\cdot dx$, wie dies auch schon deshalb so seyn muß, weil beide Integrale in einander übergehen, wenn $-x$ statt x gesetzt wird (nach VIII. Th. §. 97.).

und die Brüche in ihre Partialbrüche zerlegen, wobei deren Zähler als die Summe oder die Differenz derselben Faktoren (bezüglich mit $\frac{1}{2}$ oder mit $\frac{1}{2i}$ multiplicirt) sich ausweisen. Beide gegebene Differenzial-Funktionen sind daher die Summe oder die Differenz der beiden Brüche

$$3)\ \frac{1}{e^{(a-b\cdot i)x}+e^{-(a-b\cdot i)x}}\cdot dx \quad \text{und} \quad 4)\ \frac{1}{e^{(a+b\cdot i)x}+e^{-(a+b\cdot i)x}}\cdot dx$$

bezüglich noch mit $\frac{1}{2}$ oder mit $\frac{1}{2i}$ multiplicirt. — Je nachdem man aber nun entweder $a-b\cdot i=m$, oder $a+b\cdot i=m$ setzt, so hat man allemal $\frac{1}{e^{mx}+e^{-mx}}\cdot dx$ zu integriren, und indem man $e^{mx}=z$ setzt, erhält man

$$\int\frac{1}{e^{mx}+e^{-mx}}\cdot dx=\frac{1}{m}\int\frac{1}{1+z^2}\cdot dz=\frac{1}{m}\cdot\frac{1}{Tg}z,$$

so daß man

$$\frac{1}{a-b\cdot i}\cdot\frac{1}{Tg}e^{ax}(Cos\,bx-i\cdot Sin\,bx)$$

für das unbestimmte Integral des Bruches in 3.)

und $$\frac{1}{a+b\cdot i}\cdot\frac{1}{Tg}e^{ax}(Cos\,bx+i\cdot Sin\,bx)$$

für das unbestimmte Integral des Bruches in 4.)

erhält. Um nun hieraus die bestimmten Integrale zwischen den Grenzen 0 und ∞ zu erhalten, muß man diese $\frac{1}{Tg}$ ausrechnen, — zu dem Ende die Formel anwenden (im VIII. Th. Einleitg. §. 11. III. 1., nämlich):

$$(\mathfrak{C})\ldots\qquad \frac{1}{Tg}(p+q\cdot i)=\nu\pi+\varphi+\tfrac{1}{4}\cdot L\frac{p^2+(1+q)^2}{p^2+(1-q)^2}\times i,$$

wo φ den, unten (in ⊙) angegebenen Bogen vorstellt; dann muß man zunächst $p=e^{ax}\cdot Cos\,bx$, $q=e^{ax}\cdot Sin\,bx$ setzen, so daß, wenn nur a positiv gedacht ist, für $x=\infty$

auch $p=\infty$ und $q=\infty$ wird, aber $p=1$ und $q=0$ für $x=0$.

Der Ausdruck $\frac{p^2+(1+q)^2}{p^2+(1-q)^2}$ wird $=\frac{e^{2ax}+2\cdot e^{ax}\cdot Sin\,bx+1}{e^{2ax}-2\cdot e^{ax}\cdot Sin\,bx+1}$

und geht daher für $x=0$ in 1, je größer aber x gedacht wird, von einem gewissen großen Werth von x an gerechnet, desto genäherter wieder in 1 über, so daß der imaginäre Theil der Formel (☾) an beiden Grenzen der Null gleich wird. Da nun nach der Einleitg. §. 10. III. 1. des VIII. Th.

$$(\odot)\cdots\quad \varphi = Arc\,tg.\frac{p^2+q^2-1+\sqrt{(p^2+q^2-1)^2+4p^2}}{2p}$$

ist, und dieser Bruch zur Rechten für $x=\infty$ selber $=\infty$, für $x=0$ aber, $=1$ wird, — so hat man $\varphi=\frac{1}{2}\pi$ für $x=\infty$, aber $\varphi=\frac{1}{4}\pi$ für $x=0$.

Man findet daher

$$\left[\frac{1}{Tg}e^{ax}(Cos\,bx+i\cdot Sin\,bx)\right]_{\infty\div 0}=(\nu\pi+\tfrac{1}{2}\pi)-(\nu\pi+\tfrac{1}{4}\pi)=\tfrac{1}{4}\pi;$$

und dasselbe kommt, wenn man auch $-i$ statt i schreibt. Deshalb sind nun die bestimmten Integrale der Brüche 3. u. 4.

bezüglich $=\frac{1}{a-b\cdot i}\cdot\frac{\pi}{4}$ und $=\frac{1}{a+b\cdot i}\cdot\frac{\pi}{4}$,

und daher findet sich zuletzt

$$22)\quad \int_0^\infty \frac{(e^{ax}+e^{-ax})\cdot Cos\,bx}{e^{2ax}+2\,Cos\,2bx+e^{-2ax}}\cdot dx=\frac{a}{a^2+b^2}\cdot\frac{\pi}{4},$$

$$23)\quad \int_0^\infty \frac{(e^{ax}-e^{-ax})\cdot Sin\,bx}{e^{2ax}+2\,Cos\,2bx+e^{-2ax}}\cdot dx=\frac{b}{a^2+b^2}\cdot\frac{\pi}{4},$$

wenn nur a beliebig positiv und b beliebig reell ist.

Anmerkg. 1. Auch in ähnlichen Fragen wie die folgende, kann man die Auswerthung der $\frac{1}{Sin}$ 2c. 2c. mit Erfolg anwenden: Ist nämlich $\int_1^p \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}\cdot dx$ zu finden, wo $p>1$

und beliebig ganz oder gebrochen seyn mag, so kann man von dem unbestimmten Integral

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} \cdot dx = \frac{1}{i} \cdot \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \cdot dx = \frac{1}{i} \cdot \frac{1}{Sin} x$$

ausgehen, dann aber, weil alle Werthe von x zwischen 1 und p liegen, also $\overline{\overline{>}}1$ sind, die Formel Einleitg. §. 11. I. 4. des VIII. Th. anwenden, nämlich

$$\frac{1}{Sin} x = (2\nu + \tfrac{1}{2})\pi + i \cdot L(x + \sqrt{x^2-1}),$$

und man erhält sogleich

$$\int_1^p \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} \cdot dx = L(p + \sqrt{p^2-1}),$$

wo die Quadratwurzeln ihre positiven Werthe vorstellen sollen.

Anmerkg. 2. Schließlich erinnern wir noch daran, daß man die Integrale auch zwischen imaginären Grenzen nehmen kann, und daß dies in manchen Fällen zu interessanten Resultaten führt, die wir aber hier zunächst nicht berücksichtigen wollen.

Zweites Kapitel.

Auswerthung bestimmter Integrale mittelst Zurückführung derselben auf andere bereits bekannte, vermöge a) der theilweisen Integration, b) der Substitution, und c) der Differenziation und Integration nach einer noch vorkommenden allgemeinen Konstante.

§. 11.

Zweite Methode.

Integrirt man ein unbestimmtes Integral $\int(\varphi\psi)\cdot dx = f$ theilweise d. h. wendet man auf selbiges die Formel

$$(\odot)\cdots \quad \int(\varphi\psi)\cdot dx = \varphi\cdot v - \int(v\cdot\partial\varphi_x)\cdot dx, \quad \text{wo} \quad v = \int\psi\cdot dx,$$

einmal oder wiederholt an, so erhält man häufig Reduktionsformeln zwischen analogen Integralen d. h. eine Gleichung zwischen dem Integral f als Funktion einer Konstante p, und demselben Integral, aber $p-1$ oder $p-2$ statt p gesetzt, also eine Gleichung zwischen f_p und f_{p-1}, oder eine Gleichung zwischen f_p und f_{p-2}.

Dies findet sich in folgenden Beispielen erläutert. Man findet nämlich unmittelbar, wenn $\psi = e^{-ax}$ und $\varphi = x^p$ gesetzt wird (aus $\odot$)

$$\text{I.} \quad \int x^p\cdot e^{-ax}\cdot dx = -\frac{1}{a}\cdot x^p\cdot e^{-ax} + \frac{p}{a}\cdot\int x^{p-1}\cdot e^{-ax}\cdot dx,$$

welches eine Gleichung zwischen $\int x^p\cdot e^{-ax}\cdot dx = f_p$ und $\int x^{p-1}\cdot e^{-ax}\cdot dx = f_{p-1}$ ist.

Ist dagegen $\int\frac{x^p}{\sqrt{1-x^2}}\cdot dx = f_p$ zu finden, so wird

man in der Formel (⊙) $\psi = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ und $\varphi = x^{p-1}$ setzen und zunächst erhalten

$$\int \frac{x^p}{\sqrt{1-x^2}} \cdot dx = -x^{p-1} \cdot \sqrt{1-x^2} + (p-1) \int x^{p-2} \cdot \sqrt{1-x^2} \cdot dx.$$

Um aber daraus eine Gleichung zwischen f_p und f_{p-2} zu erhalten, wird man nun noch zur Rechten das Produkt $x^{p-2} \cdot \sqrt{1-x^2}$ verwandeln in $\frac{x^{p-2}(1-x^2)}{\sqrt{1-x^2}}$ d. h. in $\frac{x^{p-2}}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{x^p}{\sqrt{1-x^2}}$; und dadurch wird man dann bald haben die Reduktions-Formel

$$\text{II.} \quad \int \frac{x^p}{\sqrt{1-x^2}} \cdot dx = -\frac{x^{p-1}}{p} \cdot \sqrt{1-x^2} + \frac{p-1}{p} \cdot \int \frac{x^{p-2}}{\sqrt{1-x^2}} \cdot dx,$$

welches eine Gleichung zwischen f_p und f_{p-2} ist.

Als drittes Beispiel betrachten wir $\int (Sin\, x)^p \cdot dx = f_p$. Setzt man in (⊙) $\psi = Sin\, x$ und $\varphi = (Sin\, x)^{p-1}$, so erhält man zunächst

$$\int (Sin\, x)^p \cdot dx = -(Sin\, x)^{p-1} \cdot Cos\, x + (p-1) \int (Sin\, x)^{p-2} (Cos\, x)^2 \cdot dx.$$

Um aber hieraus eine Gleichung zwischen f_p und f_{p-2} zu machen, setzt man zur Rechten statt $(Cos\, x)^2$ lieber $1-(Sin\, x)^2$, also statt $(Sin\, x)^{p-2}(Cos\, x)^2$ jetzt $(Sin\, x)^{p-2} - (Sin\, x)^p$, und man erhält nun sogleich die Relation

$$\text{III.} \quad \int (Sin\, x)^p \cdot dx = -\frac{1}{p}(Sin\, x)^{p-1} \cdot Cos\, x + \frac{p-1}{p} \cdot \int (Sin\, x)^{p-2} \cdot dx$$

zwischen f_p und f_{p-2}.

Noch zusammengesetztere Beispiele sind folgende:

Wird $\int e^{-ax} \cdot (Sin\, x)^p \cdot dx = f_p$ gesucht, so kann man in der Gleichung (⊙) zunächst $\psi = e^{-ax}$ und $\varphi = (Sin\, x)^p$ setzen, und man reducirt dadurch das Integral f_p zunächst auf dieses andere $\int e^{-ax} \cdot (Sin\, x)^{p-1} \cdot Cos\, x \cdot dx$. — Auf dieses letztere Integral wendet man dann dieselbe Formel (⊙) an, und setzt wieder $\psi = e^{-ax}$ und $\varphi = (Sin\, x)^{p-1} \cdot Cos\, x$; zuletzt

aber muß man noch $(Sin\,x)^{p-2} - Sin\,x^p$ statt $(Sin\,x)^{p-2}.(Cos\,x)^2$ setzen, um eine Gleichung zwischen f_p und f_{p-2} zu haben, nämlich die Gleichung

IV. $$\left(1+\frac{p^2}{a^2}\right).\int e^{-ax}.(Sin\,x)^p.dx = -\frac{1}{a}.e^{-ax}.(Sin\,x)^p$$
$$-\frac{p}{a^2}.e^{-ax}.(Sin\,x)^{p-1}.Cos\,x + \frac{p(p-1)}{a^2}.\int e^{-ax}.(Sin\,x)^{p-2}.dx.$$

Ganz auf analoge Weise findet sich

V. $$\left(1+\frac{p^2}{a^2}\right).\int e^{-ax}.(Cos\,x)^p.dx = -\frac{1}{a}.e^{-ax}.(Cos\,x)^p$$
$$+\frac{p}{a^2}.e^{-ax}.(Cos\,x)^{p-1}.Sin\,x + \frac{p(p-1)}{a^2}.\int e^{-ax}.(Cos\,x)^{p-2}.dx;$$

VI. $$\left(1-\frac{p^2}{m^2}\right).\int Sin\,mx.(Sin\,x)^p.dx = -\frac{1}{m}.Cos\,mx.(Sin\,x)^p$$
$$+\frac{p}{m^2}.Sin\,mx.(Sin\,x)^{p-1}.Cos\,x - \frac{p(p-1)}{m^2}.\int Sin\,mx.(Sin\,x)^{p-2}.dx;$$

VII. $$\left(1-\frac{p^2}{m^2}\right).\int Sin\,mx.(Cos\,x)^p.dx = -\frac{1}{m}.Cos\,mx.(Cos\,x)^p$$
$$-\frac{p}{m^2}.Sin\,mx.(Cos\,x)^{p-1}.Sin\,x - \frac{p(p-1)}{m^2}.\int Sin\,mx.(Cos\,x)^{p-2}.dx;$$

VIII. $$\left(1-\frac{p^2}{m^2}\right).\int Cos\,mx.(Sin\,x)^p.dx = \frac{1}{m}.Sin\,mx.(Sin\,x)^p$$
$$+\frac{p}{m^2}.Cos\,mx.(Sin\,x)^{p-1}.Cos\,x - \frac{p(p-1)}{m^2}.\int Cos\,mx.(Sin\,x)^{p-2}.dx;$$

IX. *) $$\left(1-\frac{p^2}{m^2}\right).\int Cos\,mx.(Cos\,x)^p.dx = \frac{1}{m}.Sin\,mx.(Cos\,x)^p$$
$$-\frac{p}{m^2}.Cos\,mx.(Cos\,x)^{p-1}.Sin\,x - \frac{p(p-1)}{m^2}.\int Cos\,mx.(Cos\,x)^{p-2}.dx,$$

---

*) Diese letztern 4 Gleichungen VI.—IX. werden auf demselben Wege unmittelbar gefunden, auf welchem die Gleichungen IV. u. V. gefunden sind; erstere gehen aber auch aus letzteren hervor, wenn man in letzteren $\pm m.i$ statt a setzt, unter i, wie immer, die Wurzel $\sqrt{-1}$ verstanden.

welches lauter Reduktions-Gleichungen sind zwischen einem durch f_p bezeichneten Integral und dem analogen f_{p-2}.

Behandelt man aber $\int x^{m-1}(a+bx^n)^p \cdot dx = f_p$ auf dieselbe Weise, indem man $\psi = x^{m-1}$ und $\varphi = (a+bx^n)^p$ nimmt, setzt man dann zur Rechten $bx^{m+n-1} = x^{m-1}(a+bx^n)-ax^{m-1}$, zerlegt man endlich das Integral zur Rechten in zwei Integrale, so erhält man noch

X. $\int x^{m-1} \cdot (a+bx^n)^p \cdot dx$

$$= \frac{x^m \cdot (a+bx^n)^p}{pn+m} + \frac{pna}{pn+m} \cdot \int x^{m-1}(a+bx^n)^{p-1} \cdot dx,$$

welches noch eine Reduktions-Formel zwischen f_p und f_{p-1} ist.

XI. Setzt man in einer Gleichung zwischen f_p und f_{p-1} statt p nach und nach $p-1$, $p-2$, $p-3$, ··· $p-(\mu-1)$, so hat man im Ganzen μ Gleichungen, aus denen man die $\mu-1$ Unbekannten f_{p-1}, f_{p-2}, ··· $f_{p-(\mu-1)}$ eliminiren kann. Man wird zuletzt eine Gleichung zwischen f_p und $f_{p-\mu}$ haben, wodurch f_p in $f_{p-\mu}$ (aber auch $f_{p-\mu}$ in f_p) ausgedrückt sich sieht.

Ist dann p positiv ganz, so kann man μ entweder $=p$ oder $=p-1$ nehmen und man hat dann f_p in f_0 oder in f_1 ausgedrückt, welche letzteren Werthe vielleicht schon bekannt sind, oder doch leicht gefunden werden können.

Ist aber p negativ ganz etwa $=-m$, so wird man da, wo $f_{q-\mu}$ in f_q ausgedrückt ist, $q-\mu = -m$, also $q = -m+\mu$, dagegen $\mu = m$ oder $= m\pm 1$ nehmen, so wird f_{-m} in f_0 oder in $f_{\pm 1}$ ausgedrückt seyn.

Ist p endlich positiv oder negativ aber gebrochen, etwa $= \pm\mu\mp\frac{\nu}{\varrho}$, wo $\frac{\nu}{\varrho}$ ein ächter Bruch ist, so ist doch f_p auf $f_{\nu:\varrho}$, also auf den einfachsten Fall zurückgebracht.

XII. Ganz analoges gilt, wenn man eine Gleichung zwischen f_p und f_{p-2} gefunden hat. Man setzt nach und nach $p-2$, $p-4$, $p-6$, $p-2(\mu-1)$ statt p und eliminirt aus

den nun vorhandenen μ Gleichungen die $\mu-1$ Unbekannten f_{p-2}, f_{p-4}, f_{p-6}, … $f_{p-2(\mu-1)}$. Man hat dann f_p in $f_{p-2\mu}$ ausgedrückt. — Ist p positiv ganz, so nimmt man $\mu=\frac{1}{2}(p-1)$ oder $\mu=\frac{1}{2}p$ und hat dann f_p in f_1 oder in f_0 ausgedrückt, je nachdem p ungerade oder gerade ist.

XIII. Das in XI. und XII. Gesagte gilt, wenn f_p irgend einen beliebigen Ausdruck vorstellt, sobald man nur zwischen f_p und f_{p-1}, oder zwischen f_p und f_{p-2} eine (Reduktions-) Gleichung hat; es gilt also auch, es mag f_p ein unbestimmtes oder ein bestimmtes Integral vorstellen.

Hat man aber eine Reduktions-Gleichung zwischen unbestimmten Integralen, — setzt man in ihr zuerst die Grenze b, dann die Grenze a statt x und subtrahirt man beide von einander, so erhält man eine Reduktions-Formel zwischen bestimmten Integralen. — Aus

$$\int\varphi\cdot dx = P_x + C\cdot\int\psi\cdot dx$$

z. B. erhält man auf diesem Wege sogleich

$$\int_a^b\varphi\cdot dx = P_b - P_a + C\cdot\int_a^b\psi\cdot dx,$$

so lange nur diese bestimmten Integrale einen Werth haben.

Und hierauf gründet sich nun unsere

zweite Methode

der Auswerthung bestimmter Integrale. So oft nämlich die Grenzen a und b der Integrale so genommen sind, daß die Theile P_b, P_a (beide oder doch einer davon) der Null gleich werden oder verschwinden, so wird die Reduktions-Formel eine möglichst einfache und daher auch das Endresultat (in welchem f_p in f_1 oder f_0 oder in $f_{\nu:\varrho}$ ausgedrückt ist) das einfachste.

Nimmt man z. B. die Reduktions-Formel II. und 0 und 1 zu Grenzen der Integrale, so erhält man:

$$(\mathfrak{C})\ldots\quad \int_0^1\frac{x^p}{\sqrt{1-x^2}}\cdot dx = \frac{p-1}{p}\cdot\int_0^1\frac{x^{p-2}}{\sqrt{1-x^2}}\cdot dx,$$

wenn p beliebig positiv ganz oder gebrochen, aber >1 ist; und daraus erhält man dann auf demselben, kurz vorher (in **XII.**) bezeichneten Wege

$$24)\qquad \int_0^1 \frac{x^p}{\sqrt{1-x^2}}\cdot dx = \frac{(p-1)^{r|-2}}{p^{r|-2}}\cdot\int_0^1 \frac{x^{p-2r}}{\sqrt{1-x^2}}\cdot dx,$$

wenn nur $p+1-2r$ beliebig positiv, dagegen r positiv ganz ist. — Daraus aber ergiebt sich noch, wenn man erst 2n und dann $2n+1$ statt r setzt, und jedesmal $r=n$ nimmt, also n positiv ganz voraussetzt *),

$$25)\qquad \int_0^1 \frac{x^{2n}}{\sqrt{1-x^2}}\cdot dx = \frac{(2n-1)^{n|-2}}{(2n)^{n|-2}}\cdot\tfrac{1}{2}\pi = \frac{1^{n|2}}{2^{n|2}}\cdot\tfrac{1}{2}\pi;$$

$$26)\qquad \int_0^1 \frac{x^{2n+1}}{\sqrt{1-x^2}}\cdot dx = \frac{(2n)^{n|-2}}{(2n+1)^{n|-2}} = \frac{2^{n|2}}{3^{n|2}};$$

dabei wird unter der Quadratwurzel stets ihr positiver Werth gedacht.

Setzt man in der Reduktions-Formel X. $a=1$, $b=-1$, $n=2$, also $1-x^2$ statt $a+bx^n$ und $r-\frac{1}{2}$ statt p, und nimmt man die Integrale zwischen 0 und 1, so erhält man, wenn m wie $r-\frac{1}{2}$, positiv vorausgesetzt werden,

$$\int_0^1 x^{m-1}(1-x^2)^{r-\frac{1}{2}}.dx = \frac{2r-1}{2r-1+m}.\int_0^1 x^{m-1}(1-x^2)^{r-1-\frac{1}{2}}.dx,$$

als neue Reduktions-Formel zwischen f_r und f_{r-1}. Ist daher r eine positive ganze Zahl und wendet man das in XI. beschriebene Verfahren an, so reducirt man das Integral zur Linken auf die so eben gefundenen NN. 25. 26., je nachdem

---

*) Es reducirt sich nämlich das Integral, je nachdem $p=2n+1$ oder $p=2n$ ist, auf diese einfachsten

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\cdot dx = \frac{1}{Sin}x$$

und

$$\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\cdot dx = -\sqrt{1-x^2}.$$

$m = 2n+1$ und ungerade, oder $m = 2n$ und gerade ist. Man erhält daher

$$27)\quad \int_0^1 x^{2n} \cdot (1-x^2)^{r-\frac{1}{2}} \cdot dx$$

$$= \frac{(2r-1)^{r|-2}}{(2n+2r)^{r|-2}} \cdot \frac{(2n-1)^{n|-2}}{(2n)^{n|-2}} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{1^{r|2} \cdot 1^{n|2}}{2^{r+n|2}} \cdot \frac{\pi}{2},$$

$$28)\quad \int_0^1 x^{2n+1} \cdot (1-x^2)^{r-\frac{1}{2}} \cdot dx$$

$$= \frac{(2r-1)^{r|-2}}{(2n+2r+1)^{r|-2}} \cdot \frac{(2n)^{n|-2}}{(2n+1)^{n|-2}} = \frac{1^{r|2} \cdot 2^{n|2}}{3^{r+n|2}},$$

wenn nur n und r positiv ganz oder Null sind *).

---

*) Setzt man $x = z^{\frac{1}{2n}}$, so erhält man

$$\int_0^1 \frac{x^{2n}}{\sqrt{1-x^2}} \cdot dx = \frac{1}{2n} \cdot \int_0^1 \frac{z^{\frac{1}{2n}} \cdot dz}{\sqrt{1-z^{\frac{1}{n}}}}$$

und

$$\int_0^1 \frac{x^{2n+1}}{\sqrt{1-x^2}} \cdot dx = \frac{1}{2n} \cdot \int_0^1 \frac{z^{\frac{2}{2n}} \cdot dz}{\sqrt{1-z^{\frac{1}{n}}}}.$$

Das Verhältniß dieser beiden neuen Differenzial-Funktionen (nach z) ist nun $= z^{\frac{1}{2n}}$, also für jeden der Werthe von z, $= 1$, wenn $n = \infty$, und nicht $z = 0$ ist, während für $z = 0$ dieselben Differenzial-Funktionen der Null gleich werden; also ist auch das Verhältniß der beiden Integrale $= 1$ für $n = \infty$. Die Gleichungen 25. und 26. durch einander dividirt, geben daher

$$\tfrac{1}{2}\pi = \frac{2^{n|2} \cdot 2^{n|2}}{1^{n|2} \cdot 3^{n|2}}$$

desto genauer je größer die ganze positive Zahl n genommen wird. — Dies ist der von Wallis (aber auf anderem Wege) gefundene Ausdruck für π.

Setzt man $x = e^{-qt^2}$, nachher $q(2n+1) = 1$, so geht jedes der beiden bestimmten Integrale zur Linken in 25. und 26. in

$\sqrt{2q} \cdot \int^{\infty} e^{-t^2} \cdot dt$ über d. h. in $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2n+1}} \cdot \int_0^{\infty} e^{-t^2} \cdot dt$, desto genauer je

Anmerkg. Die in den Nummern 25.—28. ausgewertheten Integrale gehören übrigens zu den Euler'schen Integralen erster Klasse, die wir bereits im §. 116. des VIII. Th. ausgewerthet haben. Wir haben daselbst und im darauf folgenden §. 117. die Integrale $\int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1}.dx$ $\left(\text{oder} \int_0^\infty \frac{x^{a-1}}{(1+x)^{a+b}}.dx\right)$*) und $\int_0^1 \left(L\frac{1}{x}\right)^{p-1}.dx$ $\left(\text{oder} \int_0^\infty e^{-x}.x^{p-1}.dx\right)$ bezüglich durch $\Phi_{a,b}$ und Γ_p bezeichnet und gefunden

$$1)\quad \Phi_{a,b} = \frac{(a-1)!\,(b-1)!}{(a+b-1)!} \quad \text{und} \quad 2)\quad \Gamma_p = (p-1)!,$$

also auch

$$3)\quad \Phi_{a,b} = \frac{\Gamma_a . \Gamma_b}{\Gamma_{a+b}}.$$

Endlich haben wir ebendaselbst das (allgemeinere) Euler'sche Integral erster Klasse auf das einfachste derselben zurückgeführt, mittelst der Gleichung

---

größer n gedacht wird. Multiplicirt man daher die beiden Gleichungen 25. und 26. mit einander, so erhält man zur Rechten $\frac{1}{2n+1}.\frac{\pi}{2}$, zur Linken aber $\frac{2}{2n+1}\left(\int_0^\infty e^{-t^2}.dt\right)^2$ desto genauer, je größer n gedacht wird. Für $n=\infty$ führt dies zu der Gleichung

$$\int_0^\infty e^{-t^2}.dt = \tfrac{1}{2}\sqrt{\pi}, \quad \text{oder} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2}.dt = \sqrt{\pi}.$$

Dies von Laplace gefundene und in der Wahrscheinlichkeits-Rechnung viel benutzte Integral, werden wir jedoch in der Folge noch direkt finden. — Für $t^2 = x$ reducirt sich solches auf die Gamma-Funktion $\Gamma_{\frac{1}{2}}$ (S. VIII. Th. §. 117.).

*) Setzt man in $\int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1}.dx$, $x = \frac{z}{1+z}$ und bedenkt man, daß statt der Grenze 0 auch ε und statt der Grenze 1 auch $1-\varepsilon$ gesetzt werden kann, wenn $\varepsilon = \frac{1}{\infty}$, so geht das erstere Integral in das andere über.

4) $$\int_0^1 x^{m-1}(1-x^n)^{p-1}\cdot dx = \frac{1}{n}\cdot \Phi_{\frac{m}{n},p}$$

während wir noch $\Gamma_{\frac{1}{2}} = (-\frac{1}{2})! = \sqrt{\pi}$ und $\Gamma_{n+\frac{1}{2}} = (n-\frac{1}{2})! = (\frac{1}{2})^{n|1}\cdot\sqrt{\pi}$ gefunden haben (VIII. Th. §. 105.). Daraus ergeben sich die 25.—28. ohne Weiteres.

§. 12.

Nach I. des §. 11. erhält man durch theilweise Integration

$$\int x^p\cdot e^{-ax}\cdot dx = -\frac{1}{a}\cdot x^p\cdot e^{-ax} + \frac{p}{a}\cdot\int x^{p-1}\cdot e^{-ax}\cdot dx.$$

Da nun der Ausdruck außerhalb des Integralzeichens für $x=0$ in Null übergeht, so oft p positiv (ganz oder gebrochen) und für $x=\infty$ in -0 *), so oft a positiv gedacht wird (ganz oder gebrochen), so folgt, wenn a und p beliebig positiv sind,

(☾)... $$\int_0^\infty x^p\cdot e^{-ax}\cdot dx = \frac{p}{a}\cdot\int_0^\infty x^{p-1}\cdot e^{-ax}\cdot dx,$$

also auch, wenn das im §. 11. XI. beschriebene Verfahren angewandt wird,

29) $$\int_0^\infty x^p\cdot e^{-ax}\cdot dx = \frac{p^{r|-1}}{a^r}\cdot\int_0^\infty x^{p-r}\cdot e^{-ax}\cdot dx,$$

wo $p-r$ noch positiv oder Null seyn muß.

Ist nun p positiv ganz und wird in 29.) $r=p$ genommen, so folgt hieraus noch

30) $$\int_0^\infty x^p\cdot e^{-ax}\cdot dx = \frac{1^{p|1}}{a^{p+1}} = \frac{p!}{a^{p+1}},$$

wenn nur auch noch a beliebig positiv ist (und p positiv ganz). Diese Formel gilt jedoch, weil $1^{0|1} = 0! = 1$ ist

*) Unter -0 verstehen wir immer das negative Unendlich-Kleine, so wie unter $+0$ das positive Unendlich-Kleine.

Diese Schreibweise macht sich im Druck bequemer und ein Mißverständniß ist dabei nicht zu befürchten.

(VIII. Th. §. 102. V. 3. und §. 83. N. 12.), auch noch für $p = 0$. — Für $a = 1$ erhält man hieraus

31) $$\int_0^\infty e^{-x} \cdot x^p \cdot dx = 1^{p|1} = p!,$$

welche Gleichung jedoch nach der hiesigen Entwickelung nur gilt, wenn p positiv ganz oder Null ist (in so ferne man nach VIII. Th. §§. 99. 100. $a^{0|r} = 1$ hat)*).

Wir haben aber im VIII. Th. §. 117. bereits gelehrt, daß diese Gleichung 31. für jeden (auch gebrochenen) Werth von p gilt, welcher zwischen -1 und $+\infty$ liegt.

In der Formel N. 30.) steckt auch noch, wenn $\mathcal{L}b$ statt a gesetzt, also $b > 1$ gedacht wird (weil a positiv seyn muß)

32) $$\int_0^\infty x^p \cdot b^{-x} \cdot dx = \frac{p!}{(\mathcal{L}b)^{p+1}},$$

wo p ganz oder gebrochen oder Null und stets zwischen -1 und $+\infty$ gedacht ist, wo aber b beliebig positiv und >1 vorausgesetzt wird.

§. 13.

Gehen wir von der Reduktions-Formel III. des §. 11., nämlich von der Gleichung

---

*) Im VIII. Th. §. 117. ist erwiesen worden, daß dieses Euler'sche Integral zweiter Klasse, welches wir dort durch Γ_{p+1} bezeichnet haben, allemal $= p!$ ist, mag p ganz oder gebrochen seyn, so lange nur $p+1$ noch positiv ist; wenn nur der Begriff $p!$ nach §. 101. III. des VIII. Th. für jeden reellen Werth von p festgestellt worden ist. — Wäre dagegen jener Begriff von $p!$ (für jeden reellen Werth von p) noch nicht festgestellt, so könnte man dieses Resultat 31.) dazu benutzen, um $p!$ für jeden reellen Werth von p, der $p+1$ noch positiv macht, als den Werth des Integrals zur Linken (in 31.) festzustellen, welcher Begriff von $p!$ dann aber nicht so allgemein wäre als der im §. 101. III. des VIII. Theils aufgestellte, weil der letztere für jeden reellen Werth von p statt findet. — Uebrigens ist die Gleichung 31.) eben so allgemein als die 30.), da letztere hervorgeht, wenn man in N. 31. $x = az$ setzt und a dabei positiv sich denkt.

$$\int (Sin\,x)^q \cdot dx = -\frac{1}{q}\cdot (Sin\,x)^{q-1}\cdot Cos\,x + \frac{q-1}{q}\cdot \int (Sin\,x)^{q-2}\cdot dx$$

aus. Man erhält daraus sogleich

$$(\odot)\ldots\quad \int_0^{\frac{1}{2}\pi} (Sin\,x)^q \cdot dx = \frac{q-1}{q}\cdot \int_0^{\frac{1}{2}\pi} (Sin\,x)^{q-2}\cdot dx,$$

daher auch (nach §. 11. XII.)

33) $$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} (Sin\,x)^q \cdot dx = \frac{(q-1)^{r|-2}}{q^{r|-2}}\cdot \int_0^{\frac{1}{2}\pi} (Sin\,x)^{q-2r}\cdot dx,$$

wenn nur $q-2r$ beliebig positiv (ganz oder gebrochen) oder Null ist.

Daraus endlich *)

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} (Sin\,x)^{2n} \cdot dx = \frac{(2n-1)^{n|-2}}{(2n)^{n|-2}}\cdot \tfrac{1}{2}\pi = \frac{1^{n|2}}{2^{n|2}}\cdot\frac{\pi}{2},$$

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} (Sin\,x)^{2n+1} \cdot dx = \frac{(2n)^{n|-2}}{(2n+1)^{n|-2}} = \frac{2^{n|2}}{3^{n|2}},$$

wenn nur n positiv ganz oder Null ist.

Und da $Cos\,x$ von $x = 0$ bis $x = \frac{1}{2}\pi$ genau dieselben Werthe annimmt, wie $Sin\,x$, nur in umgekehrter Ordnung, so hat man noch:

34) $$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} (Cos\,x)^{2n} \cdot dx = \int_0^{\frac{1}{2}\pi} (Sin\,x)^{2n} \cdot dx = \frac{1^{n|2}}{2^{n|2}}\cdot\frac{\pi}{2},$$

35) $$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} (Cos\,x)^{2n+1} \cdot dx = \int_0^{\frac{1}{2}\pi} (Sin\,x)^{2n+1} \cdot dx = \frac{2^{n|2}}{3^{n|2}},$$

wenn nur n positiv ganz oder Null ist.

---

*) Je nachdem nämlich $q = 2n$ oder $q = 2n+1$ genommen wird, reducirt sich das fragliche Integral (für $r = n$) entweder auf $\int (Sin\,x)^0 \cdot dx = \int 1 \cdot dx = x$ oder auf $\int Sin\,x \cdot dx = -Cos\,x$, welche Integrale dann zwischen den Grenzen 0 und $\frac{1}{2}\pi$ zu nehmen sind.

**) Setzt man übrigens $Cos\,x = z$ oder $Sin\,x = y$, so wird sogleich $dx = -\frac{dz}{\sqrt{1-z^2}}$ und $dx = \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}}$ und die Integrale N. 34. und N. 35. sind sogleich auf die der NN. 25. und 26. des §. 11. zurückgebracht, also auf die Euler'schen Integrale erster Klasse.

Die Reduktions-Formel IV. des §. 11. vereinfacht sich, sobald man die Integrale zwischen den Grenzen 0 und ∞ nimmt; sie wird dann

$$\int_0^\infty e^{-ax}\cdot(Sin\,x)^p\cdot dx = \frac{p(p-1)}{a^2+p^2}\cdot\int_0^\infty e^{-ax}\cdot(Sin\,x)^{p-2}\cdot dx,$$

wenn nur a und $p-1$ positiv sind; sie giebt sogleich

I. $$\int_0^\infty e^{-ax}\cdot(Sin\,x)^{2n}\cdot dx$$

$$= \frac{(2n)!}{(a^2+4)(a^2+16)(a^2+36)\cdots(a^2+4n^2)}\cdot\frac{1}{a}$$

$$= \frac{(2n)!}{(a-2n\cdot i)^{2n+1|2i}};$$

II. $$\int_0^\infty e^{-ax}\cdot(Sin\,x)^{2n+1}\cdot dx$$

$$= \frac{(2n+1)!}{(a^2+1)(a^2+9)(a^2+25)\cdots(a^2+[2n+1]^2)}$$

$$= \frac{(2n+1)!}{(a-[2n+1]i)^{2n+2|2i}},$$

wenn nur a beliebig positiv und n positiv ganz ist.

Wollte man die Reduktions-Formel V. zwischen denselben Grenzen 0 und ∞ nehmen, so würde das Resultat seyn

$$\int_0^\infty e^{-ax}\cdot(Cos\,x)^p\cdot dx = \frac{a}{a^2+p^2}+\frac{p(p-1)}{a^2+p^2}\int_0^\infty e^{-ax}\cdot(Cos\,x)^{p-2}\cdot dx.$$

Aus dieser Formel findet man nun zwar auch auf dem in XII. des §. 11. bezeichneten Wege sogleich die beiden bestimmten Integrale $\int_0^\infty e^{-ax}\cdot(Cos\,x)^{2n}\cdot dx$ und $\int_0^\infty e^{-ax}\cdot(Cos\,x)^{2n+1}\cdot dx$, allein die Rechnungen und die Endresultate werden viel verwickelter als in den beiden voranstehenden Fällen *).

---

*) In den beiden obigen und in den beiden zuletzt erwähnten Fällen wird man zurückgeführt auf die Integrale

$$\int e^{-ax}\cdot dx = -\frac{1}{a}\cdot e^{-ax},$$

Nimmt man dagegen die Integrale zwischen den Grenzen $\frac{1}{2}\pi$ und ∞, so erhält man das einfachere Resultat

$$\int_{\frac{1}{2}\pi}^{\infty} e^{-ax} \cdot (Cos\, x)^p \cdot dx = \frac{p(p-1)}{a^2+p^2} \cdot \int_{\frac{1}{2}\pi}^{\infty} e^{-ax} \cdot (Cos\, x)^{p-2} \cdot dx,$$

wenn nur a und p−1 positiv sind; und daraus findet sich sogleich

$$\text{III.} \quad \int_{\frac{1}{2}\pi}^{\infty} e^{-ax} \cdot (Cos\, x)^{2n} \cdot dx$$

$$= \frac{(2n)!}{(a^2+4)(a^2+16)(a^2+36) \cdots (a^2+4n^2)} \cdot \frac{e^{-\frac{1}{2}a\pi}}{a}$$

$$= \frac{(2n)!}{(a-2ni)^{2n+1|2i}} \cdot e^{-\frac{1}{2}a\pi};$$

$$\text{IV.} \quad \int_{\frac{1}{2}\pi}^{\infty} e^{-ax} \cdot (Cos\, x)^{2n+1} \cdot dx$$

$$= \frac{-(2n+1)!\; e^{-\frac{1}{2}a\pi}}{(a^2+1)(a^2+9)(a^2+25) \cdots (a^2+[2n+1]^2)}$$

$$= \frac{-(2n+1)!}{(a-[2n+1]i)^{2n+2|2i}} \cdot e^{-\frac{1}{2}a\pi},$$

wenn nur a beliebig positiv und n positiv ganz ist.

Setzt man in der I. und II. $x = -\frac{1}{2}\pi + z$, so daß $Sin\, x = -Cos\, z$ wird, und die Grenzwerthe von z jetzt $\frac{1}{2}\pi$ und ∞ werden, so erhält man abermals die Gleichungen III. und IV. — Wird aber in I. und II. $x = \frac{1}{2}\pi + z$ gesetzt, so daß die Grenzwerthe von z jetzt $-\frac{1}{2}\pi$ und ∞ werden, so findet sich noch (weil jetzt $Sin\, x = Cos\, z$ wird)

$$\int e^{-ax} \cdot Sin\, x \cdot dx = -\frac{1}{a^2+1} e^{-ax} \cdot (a \cdot Sin\, x + Cos\, x),$$

und $$\int e^{-ax} \cdot Cos\, x \cdot dx = -\frac{1}{a^2+1} e^{-ax} \cdot (a \cdot Cos\, x - Sin\, x),$$

welche beide letzteren ebenfalls aus den durch theilweise Integration erhaltenen Reduktions-Formeln (als Gleichungen zwischen zwei Unbekannten angesehen) gefunden werden (S. §. 4.).

V. $$\int_{-\frac{1}{2}\pi}^{\infty} e^{-ax} \cdot (Cos\,x)^{2n} \cdot dx$$
$$= \frac{(2n)!}{(4+a^2)(16+a^2)(36+a^2) \cdots (4n^2+a^2)} \cdot \frac{e^{+\frac{1}{2}a\pi}}{a}$$

VI. $$\int_{-\frac{1}{2}\pi}^{\infty} e^{-ax} \cdot (Cos\,x)^{2n+1} \cdot dx$$
$$= \frac{(2n+1)!\; e^{+\frac{1}{2}a\pi}}{(1+a^2)(9+a^2)(25+a^2) \cdots [(2n+1)^2+a^2]} \cdot$$

Zieht man von der V. die III., und von der VI. die IV. ab, so ergiebt sich (wegen VIII. Th. §. 88. N. 2.)

VII. $$\int_{-\frac{1}{2}\pi}^{+\frac{1}{2}\pi} e^{-ax} \cdot (Cos\,x)^{2n} \cdot dx$$
$$= \frac{(2n)!\; (e^{+\frac{1}{2}a\pi} - e^{-\frac{1}{2}a\pi})}{(4+a^2)(16+a^2)(36+a^2) \cdots (4n^2+a^2)} \cdot \frac{1}{a},$$

VIII. $$\int_{-\frac{1}{2}\pi}^{+\frac{1}{2}\pi} e^{-ax} \cdot (Cos\,x)^{2n+1} \cdot dx$$
$$= \frac{(2n+1)!\; (e^{+\frac{1}{2}a\pi} + e^{-\frac{1}{2}a\pi})}{(1+a^2)(9+a^2)(25+a^2) \cdots [(2n+1)^2+a^2]},$$

wenn nur überall a beliebig positiv gedacht wird und n positiv ganz *).

Nimmt man in den Nummern VI.—IX. des §. 11. die Integrale zwischen den Grenzen 0 und $\frac{1}{2}\pi$, so gehen, wenn wir $p-1$ positiv voraussetzen, diese 4 Gleichungen über in

IX. $$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} Sin\,mx \cdot (Sin\,x)^p \cdot dx$$
$$= \frac{m \cdot Cos\,\frac{1}{2}m\pi}{p^2-m^2} + \frac{p^{2|-1}}{p^2-m^2} \cdot \int_0^{\frac{1}{2}\pi} Sin\,mx \cdot (Sin\,x)^{p-2} \cdot dx,$$

---

*) Die Gleichungen VII. und VIII. gehen für $a = 0$, wenn man in VII. zur Rechten den $\frac{0}{0}$ Werth bestimmt, und beide durch 2 dividirt (wegen VIII. Th. §. 88. N. 3.) in die NN. 34. und 35. über. Daher gelten diese Gleichungen VII. und VIII. auch noch für $a = 0$.

X. $$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} Sin\, mx \cdot (Cos\, x)^p \cdot dx$$
$$= \frac{-m}{p^2-m^2} + \frac{p^{2|-1}}{p^2-m^2} \cdot \int_0^{\frac{1}{2}\pi} Sin\, mx \cdot (Cos\, x)^{p-2} \cdot dx,$$

XI. $$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} Cos\, mx \cdot (Sin\, x)^p \cdot dx$$
$$= \frac{-m \cdot Sin\, \frac{1}{2} m\pi}{p^2-m^2} + \frac{p^{2|-1}}{p^2-m^2} \cdot \int_0^{\frac{1}{2}\pi} Cos\, mx \cdot (Sin\, x)^{p-2} \cdot dx,$$

XII. $$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} Cos\, mx \cdot (Cos\, x)^p \cdot dx$$
$$= \frac{p^{2|-1}}{p^2-m^2} \cdot \int_0^{\frac{1}{2}\pi} Cos\, mx \cdot (Cos\, x)^{p-2} \cdot dx.$$

Von diesen Reduktions-Formeln ist die XII. die einfachste, während die IX. und die XI. eben so einfach werden, die IX. so oft m eine ganze Zahl und ungerade und die XI. so oft m ganz und gerade ist.

Setzen wir nun in der XII. statt p nach und nach die positiven ganzen und geraden Zahlen $2p$, $2p-2$, $2p-4$, ... 6, 4 und 2, so ergiebt sich, wenn man die Gleichungen mit einander multiplicirt (und weil $\int Cos\, mx \cdot dx = \frac{1}{m} \cdot Sin\, mx$ ist):

XIII. $$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} Cos\, mx \cdot (Cos\, x)^{2p} \cdot dx$$
$$= \frac{(2p)!\; Sin\, \frac{1}{2} m\pi}{(4-m^2)(16-m^2)(36-m^2) \cdots (4p^2-m^2)} \cdot \frac{1}{m},$$

welche Gleichung gilt, es mag m beliebig ganz oder gebrochen positiv oder negativ oder Null seyn, nur nicht für diejenigen Werthe von m, welche den Nenner zur Rechten zu Null machen.

Setzt man aber in derselben Formel XII. statt p nach und nach die positiven ganzen und ungeraden Zahlen $2p+1$, $2p-1$, $2p-3$, ... 5, 3, — bedenkt man dabei, daß

$$Cos\, mx \cdot Cos\, x = \tfrac{1}{2} Cos\, (m-1)x + \tfrac{1}{2} Cos\, (m+1)x,$$

also

$$\int Cos\, mx \cdot Cos\, x \cdot dx = \frac{1}{2(m-1)} Sin\, (m-1)x + \frac{1}{2(m+1)} Sin\, (m+1)x$$

ist, und multiplicirt man alle p Gleichungen mit einander, so ergiebt sich

XIV. $$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} Cos\, mx \cdot (Cos\, x)^{2p+1} \cdot dx$$
$$= \frac{(2p+1)!\; Cos\, \frac{1}{2} m\pi}{(1-m^2)(9-m^2)(25-m^2) \cdots ([2p+1]^2-m^2)},$$

welche Formel ebenfalls für jeden reellen Werth von m gilt, mit Ausnahme derjenigen Werthe, welche den Nenner des Ausdrucks zur Rechten der Null gleich machen.

Ganz in derselben Weise kann man in jeder der drei übrigen Reduktions-Formeln IX.—XI. statt p alle geraden Zahlen von 2p bis 2, oder alle ungeraden Zahlen von 2p+1 bis 3 setzen und aus den p jedesmal entstehenden Gleichungen alle zwischenliegenden bestimmten Integrale eliminiren und man wird noch 6 hieher gehörige Resultate erhalten, welche jedoch weitläufiger werden, weshalb wir die weitere Verfolgung dem Leser überlassen *). — Hier nur noch zwei besondere einfache Fälle davon:

Setzt man nämlich in der IX. statt m zunächst eine positive ganze und ungerade Zahl 2m+1, und wiederholt man dann noch das vorbeschriebene Verfahren, so findet sich noch

XV. $$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} Sin(2m+1)x \cdot (Sin\, x)^{2p} \cdot dx$$
$$= \frac{(2p)!}{(4-[2m+1]^2)(16-[2m+1]^2)(36-[2m+1]^2) \cdots (4p^2-[2m+1]^2)} \cdot \frac{1}{2m+1};$$

*) Man findet diese weiteren Resultate in Raabe's Differenzial- und Integral-Rechnung. Zürich 1839. I. Theil. pag. 240. Die ebendaselbst auf pag. 239. und pag. 237. stehenden Resultate (welche dieselben Integrale zwischen den Grenzen 0 und ∞, oder $\frac{1}{2}\pi$ und ∞ enthalten) müssen dagegen alle als unrichtig erkannt werden, weil alle diese Integrale zu den divergenten gehören, welche gar keinen (oder, wie man auch sagt, einen unbestimmten) jedenfalls also den Werth nicht haben, den man daselbst angegeben findet.

XVI. $\int_0^{\frac{1}{2}\pi} Sin(2m+1)x \cdot (Sin\, x)^{2p+1} \cdot dx = 0,$ wenn $m > p$;

(für jeden Werth von m, welcher = oder $< p$ ist, nimmt der Ausdruck rechts (in XVI.) die Form $\frac{0}{0}$ an).

Desgleichen ergiebt sich aus XI. auf demselben Wege, wenn statt m die positive ganze und gerade Zahl 2m gesetzt wird

XVII. $\int_0^{\frac{1}{2}\pi} Cos\, 2mx \cdot (Sin\, x)^{2p} \cdot dx = 0,$ wenn $m > p$,

XVIII. $$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} Cos\, 2mx \cdot (Sin\, x)^{2p+1} \cdot dx$$
$$= \frac{(2p+1)!}{(1-4m^2)(9-4m^2)(25-4m^2)\cdots([2p+1]^2-4m^2)}.$$

Diese Resultate bestätigen sich noch überdieß einander gegenseitig, wenn man $x = \frac{1}{2}\pi - z$ setzt.

§. 14.

Dritte Methode.

Es ist aber oft viel bequemer, das bestimmte Integral dadurch auszuwerthen, daß man einen neuen Veränderlichen einführt (also auf dem Wege der Substitution), d. h. daß man die Sätze des VIII. Th. §. 97. in Anwendung bringt. Außer den Beispielen, welche hinsichtlich dieses Verfahrens bereits in den vorangegangenen Paragraphen bemerklich gemacht worden sind, mögen hier noch folgende stehen:

A. Es lassen sich die Resultate NN. 25.—28. des §. 11. leicht in bestimmte Integrale trigonometrischer Funktionen umformen, da, so oft $x = Sin\, z$ gesetzt wird, dann $1-x^2 = (Cos\, z)^2$ wird, und eben so aus $x = Cos\, z$ sogleich $1-x^2 = (Sin\, z)^2$ hervorgeht.

B. Sollte die Summe $\int_{+0}^{1} (log\, z)^n \cdot dz$ gefunden werden, so kann man $log\, z = -x$, also $z = e^{-x}$, $dz = -e^{-x} \cdot dx$ setzen, und man erhält sogleich (vermöge §. 12. N. 31.)

I. $\int_{+0}^{1} (\log z)^n \cdot dz = (-1)^n \cdot \int_0^{\infty} x^n \cdot e^{-x} \cdot dx = (-1)^n \cdot n!$, *)

wenn nur n zwischen -1 und $+\infty$ liegt und dabei ganz, gebrochen oder Null ist.

C. Eben so findet man (nach §. 11. N. 31.), indem $L\frac{1}{z} = x$ gesetzt wird,

II. $$\int_{+0}^{1} \left(L\frac{1}{z}\right)^n \cdot dz = \int_0^{\infty} x^n \cdot e^{-x} \cdot dx = n!$$

(nach §. 11. N. 31.), wenn nur jedesmal n zwischen -1 und $+\infty$ liegt und dabei ganz oder gebrochen oder Null ist.

D. Sollte gefunden werden der Werth von $\int_0^1 \frac{z^n}{\sqrt{z-z^2}} \cdot dz$, wo n positiv ganz gedacht wird (welches Integral ebenfalls zu den Euler'schen erster Klasse gehört) so dürfte man nur $z = x^2$, also $dz = 2x \cdot dx$ setzen, um (nach §. 11. N. 25.) sogleich

III. $$\int_0^1 \frac{z^n}{\sqrt{z-z^2}} \cdot dz = \int_0^1 \frac{x^{2n}}{\sqrt{1-x^2}} \cdot dx = \frac{1^{n|2}}{2^{n|2}} \cdot \tfrac{1}{2}\pi$$

zu haben, wenn nur n positiv ganz ist oder Null.

Eben so findet sich

IV. $$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt[n]{1-x^n}} \cdot dx \text{ **)} = \int_0^{\infty} \frac{1}{1+y^n} \cdot dy = \frac{\left(\frac{\pi}{n}\right)}{Sin\frac{\pi}{n}}$$

---

*) Man konnte auch $\log z = x$, also $z = e^x$, $dz = e^x \cdot dx$ setzen und bekam dann

$$\int_{+0}^{1} (\log z)^n \cdot dz = \int_{-\infty}^{0} x^n \cdot e^x \cdot dx,$$

so daß nun alle Werthe von x negativ sind, während dx stets positiv ist. Setzt man dann $x = -y$, also $dx = -dy$, so erhält man erst das obige Resultat.

**) Eigentlich ist die obere Grenze dieses Integrals $1-\varepsilon$ zu nehmen

(nach §. 9. N. 18.), indem man $\frac{x}{\sqrt[n]{1-x^n}} = y$ setzt.

Auch diese letzteren Integrale gehören zu den Euler'schen erster Klasse und sind daher bereits im §. 116. des VIII. Th. ausgewerthet, sobald man die hiesige Anmerkung zu §. 11. zu Hilfe nimmt.

E. Wollte man die bestimmten Integrale

$$\int_0^\infty \frac{x^{m-1}-x^{n-1}}{x^p-1} \cdot dx \quad \text{und} \quad \int_0^\infty \frac{x^{m-1}}{1+x^p} \cdot dx,$$

welche bereits in den §§. 8. u. 9. NN. 14. u. 18. für positive ganze Werthe von m, n, p ausgewerthet sind, jetzt für den Fall finden, daß m, n, p beliebige ganze oder gebrochene positive Zahlen sind, so kann man sich letztere unter einerlei Benennung gebracht denken, so daß man

$$m = \frac{\alpha}{k}, \quad n = \frac{\beta}{k} \quad \text{und} \quad p = \frac{\gamma}{k}$$

hat, wo α, β, γ wie k wiederum positiv ganz sind; hierauf wird man $x = z^k$ setzen, so daß $dx = k \cdot z^{k-1} \cdot dz$, $x^p = z^\gamma$, $x^{m-1} = z^{\alpha-k}$, $x^{n-1} = z^{\beta-k}$ wird, und man erhält:

$$\int_0^\infty \frac{x^{m-1}-x^{n-1}}{x^p-1} \cdot dx = k \cdot \int_0^\infty \frac{z^{\alpha-1}-z^{\beta-1}}{z^\gamma-1} \cdot dz$$

und

$$\int_0^\infty \frac{x^{m-1}}{1+x^p} \cdot dx = k \cdot \int_0^\infty \frac{z^{\alpha-1}}{1+z^\gamma} \cdot dz.$$

Ist nun $p > m$ und $p > n$, so ist auch $\gamma > \alpha$ und auch $\gamma > \beta$; also geben die NN. 14. 18. der §§. 8. und 9., wenn man statt der dortigen positiven ganzen Zahlen m, n, p

---

statt 1, wo $\varepsilon = \frac{1}{\infty}$ seyn soll; nur wenn das Integral in diesem Sinne genommen wird, hat die obere Grenze des nach y genommenen Integrals ein Recht, in der Rechnung zugelassen zu werden, und nur dann ist solche $= +\infty$.

die hiesigen positiven ganzen Zahlen α, β, γ substituirt, diese Integrale (nach z) zur Rechten bezüglich

$$=\frac{\pi}{\gamma}\cdot\left(Cotg\frac{\beta\pi}{\gamma}-Cotg\frac{\alpha\pi}{\gamma}\right) \quad \text{und} \quad =\frac{\left(\frac{\pi}{\gamma}\right)}{Sin\,\alpha\frac{\pi}{\gamma}}.$$

Werden nun diese Resultate oben substituirt und statt α, β, γ ihre Werthe km, kn und kp gesetzt, so erhält man sogleich wieder die Gleichungen N. 14. und N. 18., nämlich

$$\text{V.}\quad \int_0^\infty \frac{x^{m-1}-x^{n-1}}{x^p-1}\cdot dx=\frac{\pi}{p}\cdot\left(Cotg\frac{n\pi}{p}-Cotg\frac{m\pi}{p}\right);$$

$$\text{VI.}\quad \int_0^\infty \frac{x^{m-1}}{1+x^p}\cdot dx$$

$$=\frac{\left(\frac{\pi}{p}\right)}{Sin\,m\frac{\pi}{p}}=\frac{\left(\frac{\pi}{p}\right)}{Sin(p-m)\frac{\pi}{p}}=\int_0^\infty\frac{x^{p-m-1}}{1+x^p}\cdot dx,$$

nur daß jetzt m, n, p beliebig (ganz oder gebrochen) positiv gedacht sind, jedoch $p>m$ und auch $p>n$ *).

F. Um eine kleine Anwendung zu zeigen, die Euler von dem Resultate VI. gemacht hat, verwandle man $\frac{y^{m-1}}{1+y^p}$ zweimal in unendliche Reihen, einmal nach steigenden Potenzen von y, und dann (indem man den Ausdruck sich so geschrieben denkt: $\frac{y^{m-1}}{y^p}\cdot\frac{1}{1+y^{-p}}$) nach fallenden Potenzen von y; dann integrirt man nach y, so daß man erhält

*) Hätte man die N. 18. bloß für gerade m, n, p entwickelt gehabt (S. Note zu §. 9.), so würde jetzt die Gleichung VI. nicht für Werthe von m erwiesen seyn, welche die Form $\frac{2\mu}{2\lambda+1}$ haben. Deshalb lassen sich auch die Gleichungen NN. 15.—17. des §. 8. und NN. 19.—21. des §. 9. nicht für beliebige gebrochene Werthe von m, n, p erweitern, obgleich sie auch für gewisse gebrochene Formen ebenfalls noch wahr bleiben.

$$1)\qquad \frac{y^{m-1}}{1+y^p}\cdot dy = \frac{y^m}{m} - \frac{y^{m+p}}{m+p} + \frac{y^{m+2p}}{m+2p} - \frac{y^{m+3p}}{m+3p} + \text{ in inf.}$$

und auch

$$2)\qquad \frac{y^{m-1}}{1+y^p}\cdot dy = \frac{y^{m-p}}{m-p} - \frac{y^{m-2p}}{m-2p} + \frac{y^{m-3p}}{m-3p} - \frac{y^{m-4p}}{m-4p} + \text{ in inf.}$$

Nimmt man nun das erstere Integral zwischen den Grenzen 0 und 1, das andere dagegen zwischen den Grenzen 1 und ∞, und addirt man beide Resultate, so hat man das bestimmte Integral in VI. noch einmal ausgewerthet, und da die beiden Werthe einander gleich seyn müssen, so giebt dies noch die Gleichung

$$3)\qquad \frac{\pi}{p\cdot Sin\frac{m\pi}{p}}$$

$$= \frac{1}{m} + \frac{1}{p-m} - \frac{1}{p+m} - \frac{1}{2p-m} + \frac{1}{2p+m} + \frac{1}{3p-m} - \text{ in inf.}$$

$$= \frac{1}{m} + \frac{2m}{p^2-m^2} - \frac{2m}{4p^2-m^2} + \frac{2m}{9p^2-m^2} - \frac{2m}{16p^2-m^2} + \text{in inf.}$$

Dies giebt noch für $p = 1$:

$$4)\qquad \frac{\pi}{Sin\, m\pi} = \frac{1}{m} + 2m\left(\frac{1}{1-m^2} - \frac{1}{4-m^2} + \frac{1}{9-m^2} - \frac{1}{16-m^2} + \text{in inf.}\right),$$

wonach π berechnet werden kann, wenn $Sin\, m\pi$ bekannt ist, wonach aber auch $Sin\, m\pi$ berechnet werden kann, wenn π bekannt ist*).

Euler hat sich auch desselben Resultates VI. bedient, um $Sin\, v$ und $Cos\, v$ in Produkte aus unendlich-vielen Faktoren

---

*) Wollte man das Integral 1. zwischen den Grenzen 0 und ∞ nehmen, so würde man rechts für $y = \infty$ einen unbestimmten Ausdruck erhalten. — Und dasselbe würde für $y = 0$ der Fall seyn, wenn man das Integral 2. zwischen den Grenzen 0 und ∞ nehmen wollte. — Deshalb ist die Zerlegung in $\int_0^1 + \int_1^\infty$ nothwendig.

zu zerlegen. Er geht dabei von der Wahrnehmung aus, daß, wenn $\frac{x}{\sqrt[n]{1-x^n}} = z$ gesetzt wird, dann (nach §. 9. N. 18.) sich findet

$$5)\quad \int_0^1 \frac{x^{m-1}}{\left(\sqrt[n]{1-x^n}\right)^m}\cdot dx = \int_0^\infty \frac{z^{m-1}}{1+z^n}\cdot dz = \frac{\pi}{n\cdot Sin\frac{m\pi}{n}}$$

und daß das erstere dieser bestimmten Integrale der besondere Fall des allgemeineren (Euler'schen) Integrals (erster Klasse)

$$6)\quad \int_0^1 x^{m-1}\cdot(1-x^n)^{\frac{p}{n}-1}\cdot dx$$

ist, wenn statt p jetzt n—m gesetzt wird. Nun giebt aber eine der im §. 11. erwähnten Reduktions-Formeln (die man erhält, wenn man theilweise integrirt zwischen den Grenzen 0 und 1, dann m+n, m+2n, m+3n, ... m+μn statt m setzt und die Zwischen-Integrale eliminirt)

$$7)\quad \int_0^1 x^{m-1}\cdot(1-x^n)^{\frac{p}{n}-1}\cdot dx$$
$$= \frac{(m+p)^{\mu|n}}{m^{\mu|n}}\cdot\int_0^1 x^{m+\mu n-1}\cdot(1-x^n)^{\frac{p}{n}-1}\cdot dx.$$

Ferner wird das Integral zur Rechten für ein unendlich-großes μ von der Zahl m ganz unabhängig, so daß der Werth derselbe bleibt, wenn auch eine andere positive ganze Zahl r statt m gesetzt wird. Setzt man also r statt m (in 7.) und dividirt man die Resultate durch einander, so erhält man

$$\frac{\int_0^1 x^{m-1}\cdot(1-x^n)^{\frac{p}{n}-1}\cdot dx}{\int_0^1 x^{r-1}\cdot(1-x^n)^{\frac{p}{n}-1}\cdot dx} = \frac{(m+p)^{\mu|n}}{m^{\mu|n}}\cdot\frac{r^{\mu|n}}{(r+p)^{\mu|n}},$$

wenn μ eine unendlich-große positive ganze Zahl vorstellt. Jetzt giebt man dem r einen solchen Werth, daß das bestimmte Integral nach §. 1. sich auswerthen läßt; z. B. man setzt r = n,

in welchem Falle für $x^n = z$, und für $1-z = v$, also für $1-x^n = v$ sich findet

$$\int x^{r-1}(1-x^n)^{\frac{p}{n}-1} . dx = \int x^{n-1}(1-x^n)^{\frac{p}{n}-1} . dx$$

$$= \frac{1}{n}\int (1-z)^{\frac{p}{n}-1} . dz = -\frac{1}{n} . \int v^{\frac{p}{n}-1} . dv = -\frac{1}{p} . (1-x^n)^{\frac{p}{n}};$$

und man hat dann (aus 7.)

$$8) \quad \int_0^1 x^{m-1}(1-x^n)^{\frac{p}{n}-1} . dx = \frac{(m+p)^{\mu|n}}{(n+p)^{\mu|n}} . \frac{n^{\mu|n}}{m^{\mu|n}} . \frac{1}{p} \text{ *)},$$

wenn nur n und p positiv und μ unendlich-groß positiv ganz gedacht wird.

Setzt man nun hier $n-m$ statt p, welches $n > m$ voraussetzt, so treten die Bemerkungen 5.) und 6.) ein, und man hat sogleich

$$9) \quad \frac{\pi}{Sin\frac{m\pi}{n}} = \frac{n}{n-m} . \frac{(n^{\mu|n})^2}{(2n-m)^{\mu|n} . m^{\mu|n}},$$

wenn μ unendlich-groß und positiv ganz gedacht wird; d. h. der Ausdruck zur Rechten nähert sich dem Werthe zur Linken desto mehr, je größer μ gedacht wird, und kommt ihm unendlich-nahe, wenn man sich μ unendlich-groß denkt.

---

*) Dasselbe Resultat erhält man für dasselbe Euler'sche Integral erster Klasse (welches nach Anmerkg. N. 4. zu §. 11. $= \frac{1}{n} . \Phi_{\frac{m}{n}, \frac{p}{n}}$ ist), wenn man die Auswerthung (nach §. 116. des VIII. Th.) von $\Phi_{\frac{m}{n}, \frac{p}{n}}$ zu Hilfe nimmt. Danach findet sich das obige Integral

$$= \frac{1}{n} . \frac{\left(\frac{m}{n}-1\right)! \left(\frac{p}{n}-1\right)!}{\left(\frac{m+p}{n}-1\right)!}.$$

Setzt man nun statt dieser Fakultäten (nach der Definition §. 101. III. des VIII. Th.) ihre Werthe in Produkten unendlich-vieler Faktoren, so ergiebt sich das Resultat N. 8. noch einmal.

Kehrt man nun diese Gleichung um und setzt man noch $\frac{m\pi}{n} = v$, also $m = \frac{nv}{\pi}$, so erhält man

$$10)\quad Sin\,v = v\left(1-\frac{v^2}{\pi^2}\right)\left(1-\frac{v^2}{4\pi^2}\right)\left(1-\frac{v^2}{9\pi^2}\right)\left(1-\frac{v^2}{16\pi^2}\right) \text{ in inf.}$$

Setzt man aber $\frac{1}{2}n-m$ statt m in 9. und dann wieder $\frac{m}{n}\pi = v$, so erhält man sogleich noch

$$11)\quad Cos\,v = \left(1-\frac{4v^2}{\pi^2}\right)\left(1-\frac{4v^2}{9\pi^2}\right)\left(1-\frac{4v^2}{25\pi^2}\right)\left(1-\frac{4v^2}{49\pi^2}\right) \text{ in inf.*)}$$

und dies sind die Gleichungen I. und II. des §. 13. der Einleitung zum VIII. Th.

G. Wollte man $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{\beta x} \mp e^{-\beta x}}{e^{\alpha x} \mp e^{-\alpha x}} \cdot dx$ finden, so würde man $e^x = z$ setzen, so daß $x = log\,z$, $dx = \frac{dz}{z}$, also unser Integral

$$= \int_{+0}^{\infty} \frac{z^{\beta-1} \mp z^{-\beta-1}}{z^{\alpha} \mp z^{-\alpha}} \cdot dz = \int_{+0}^{\infty} \frac{z^{\alpha+\beta-1} \mp z^{\alpha-\beta-1}}{z^{2\alpha} \mp 1} \cdot dz$$

wird. Mit Zuziehung der Formeln E. V. und VI. erhält man daher sogleich, wenn α und β beliebig positiv sind und dabei $\alpha > \beta$ ist

$$36)\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{\beta x}-e^{-\beta x}}{e^{\alpha x}-e^{-\alpha x}} \cdot dx = \frac{\pi}{\alpha} \cdot Tg\frac{\beta\pi}{2\alpha} = 2\int_{0}^{\infty} \frac{e^{\beta x}-e^{-\beta x}}{e^{\alpha x}-e^{-\alpha x}} \cdot dx,$$

---

*) Diese Art die Sinus und Cosinus in Produkte aus unendlich-vielen Faktoren zu zerlegen, hat das Nachtheilige, daß die Resultate vorläufig nur für den Fall erwiesen sind, in welchem v reell gedacht wird. Die im VIII. Th. Einleitg. §. 13. (auch nach Euler) gegebene Zerlegung giebt dagegen unmittelbar ganz allgemeine Resultate, so daß man sich überzeugt, wie die Gleichungen 10. und 11. auch als Form-Gleichungen gelten (nicht bloß als Zahlen-Gleichungen), d. h. so allgemein, daß v als ein bloßer Träger der Operationszeichen gedacht werden kann (S. die Note zum 5ten Beispiel des §. 18.).

$$37)\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{\beta x}+e^{-\beta x}}{e^{\alpha x}+e^{-\alpha x}}\cdot dx=\frac{\pi}{\alpha}\cdot\frac{1}{Cos\frac{\beta\pi}{2\alpha}}=2\int_{0}^{\infty}\frac{e^{\beta x}+e^{-\beta x}}{e^{\alpha x}+e^{-\alpha x}}\cdot dx$$

(nach VIII. Th. §. 88. N. 3. und indem man

$$\frac{z^{\alpha+\beta-1}+z^{\alpha-\beta-1}}{z^{2\alpha}+1} \text{ zerlegt in } \frac{z^{\alpha+\beta-1}}{z^{2\alpha}+1}+\frac{z^{\alpha-\beta-1}}{z^{2\alpha}+1}\Bigg).$$

Daraus folgt aber nun auch wieder, daß, wenn man in den letztgedachten Integralen, die zwischen den Grenzen 0 und ∞ genommen sind, $e^x = z$ und $\alpha+\beta = m$, sowie $\alpha-\beta = p$ setzt, man erhalten wird:

$$\text{VII.}\quad \int_{1}^{\infty}\frac{x^{m-1}-x^{p-1}}{x^{m+p}-1}\cdot dx=\frac{\pi}{m+p}\cdot Tg\left(\frac{m-p}{m+p}\cdot\frac{\pi}{2}\right);$$

$$\text{VIII.}\quad \int_{1}^{\infty}\frac{x^{m-1}+x^{p-1}}{x^{m+p}+1}\cdot dx=\frac{\pi}{m+p}\cdot\frac{1}{Cos\left(\frac{m-p}{m+p}\cdot\frac{\pi}{2}\right)},$$

wenn nur (in VII. u. VIII.) m und p *beliebig positiv* sind.

Und dieselben Integrale zur Linken in VII. und VIII., aber zwischen den Grenzen 0 und 1 genommen, haben bezüglich dieselben Werthe, wie wenn sie zwischen den Grenzen 1 und ∞ genommen werden*), und die doppelt so großen Werthe, wenn man sie zwischen den Grenzen 0 und ∞ nimmt.

Man hat also

$$38)\quad \int_{0}^{\infty}\frac{x^{m-1}-x^{p-1}}{x^{m+p}-1}\cdot dx=2\int_{0}^{1}\frac{x^{m-1}-x^{p-1}}{x^{m+p}-1}\cdot dx$$

$$=\frac{2\pi}{m+p}\cdot Tg\left(\frac{m-p}{m+p}\cdot\frac{\pi}{2}\right),$$

---

*) Das letztere folgt aus der Betrachtung der NN. 36. und 37., das erstere ist dann eine nothwendige Folge davon. — Es folgt aber auch das erstere aus VIII. Th. §. 98. I. insoferne, wenn $\frac{1}{x}$ statt x gesetzt wird, die Differenzial-Funktionen sich in Nichts als im Vorzeichen ändern; und dann ist das letztere wiederum eine nothwendige Folge aus dem ersteren.

$$39)\quad \int_0^\infty \frac{x^{m-1}+x^{p-1}}{x^{m+p}+1}\cdot dx = 2\int_0^1 \frac{x^{m-1}+x^{p-1}}{x^{m+p}+1}\cdot dx$$
$$= \frac{2\pi}{m+p}\cdot\frac{1}{Cos\left(\frac{m-p}{m+p}\cdot\frac{\pi}{2}\right)},$$

wenn (in 38. und 39.) m und p beliebig positiv sind.

H. Die folgenden beiden Integrale finden sich auf demselben Wege, indem man entweder $e^x = z$, also $b^{mx} = e^{mx\cdot Lb} = z^{m\cdot Lb}$, $a^{mx} = e^{mx\cdot La} = z^{m\cdot La}$, ꝛc. ꝛc. setzt und E. V. VI. zu Hilfe nimmt, oder indem man $m\cdot Lb = \beta$, $m\cdot La = \alpha$ nimmt und NN. 36. u. 37. in Anwendung bringt. Man erhält:

$$40)\quad \int_0^\infty \frac{b^{mx}-b^{-mx}}{a^{mx}-a^{-mx}}\cdot dx = \frac{\pi}{2m\cdot La}\cdot Tg\left(\frac{Lb}{La}\cdot\frac{\pi}{2}\right),$$

$$41)\quad \int_0^\infty \frac{b^{mx}+b^{-mx}}{a^{mx}+a^{-mx}}\cdot dx = \frac{\pi}{2m\cdot La}\cdot\frac{1}{Cos\left(\frac{Lb}{La}\cdot\frac{\pi}{2}\right)},$$

wo aber (in NN. 40. und 41.) nicht bloß m und b beliebig positiv gedacht werden müssen, sondern wo auch $a > b$ und $ab > 1$ vorausgesetzt wird.

J. Auch findet sich noch beispielsweise, wenn

$y = \frac{1}{\sqrt[n]{-1+x^2}}$ gesetzt wird,

$$IX.\quad \int_1^\infty \frac{1}{x\cdot\sqrt[n]{-1+x^2}}\cdot dx = \frac{n}{2}\int_0^\infty \frac{1}{1+y^n}\cdot dy = \frac{\frac{1}{2}\pi}{Sin\frac{\pi}{n}}$$

und (für $x^2 = z^m$)

$$X.\quad \int_1^\infty \frac{1}{x\cdot\sqrt[n]{-1+x^m}} = \frac{\left(\frac{\pi}{m}\right)}{Sin\frac{\pi}{n}},$$

wo (in IX. und X.) m beliebig positiv, n aber positiv ganz gedacht werden.

§. 15.

Vierte Methode.

Soll ein bestimmtes Integral $\int_\alpha^\beta f_{x,a} \cdot dx$ gefunden werden, in welchem noch eine unbestimmte Konstante a vorkommt, so sind, wenn wir dessen Werth einstweilen durch X_a bezeichnen, die Differenzial-Koeffizienten ∂X_a, $\partial^2 X_a$, $\partial^3 X_a$, ꝛc. ꝛc., desgleichen die Integrale $\int X \cdot da$, $\int\int(X \cdot da)da$, ꝛc. ꝛc. wiederum bestimmte Integrale, die nach x zwischen denselben, von a unabhängig gedachten Grenzen α und β genommen werden müssen (nach VIII. Th. §. 95. NN. 1. und 2.). — Ist nun eines dieser letztern bekannt, so ergiebt sich sogleich X_a, entweder durch Integration oder durch Differenziation nach a.

Dieses Verfahren kann man natürlich auch dann anwenden, wenn eine solche unbestimmte Konstante a nicht vorkommt, weil es leicht ist das vorgegebene Integral allgemeiner aufzufassen, indem man z. B. e^{-ax} statt e^{-x}, oder $Sin\, ax$ statt $Sin\, x$ schreibt und zuletzt $a = 1$ nimmt, oder indem man einen ganzen Faktor hinzufügt z. B. e^{-ax}, x^a, ꝛc. ꝛc. in dem Endresultat aber dann $a = 0$ setzt. — U. s. w. —

§. 16.

Fortsetzung der vierten Methode.

Ist z. B. schon $\int X_a \cdot da = \varphi_a$ bekannt, so hat man sogleich

$$X_a = \partial \varphi_a.$$

Erstes Beispiel.

Auf diesem Wege findet man z. B. die Werthe der bestimmten Integrale

$$\int_0^\infty x \cdot e^{-ax} \cdot Sin\, bx \cdot dx = X_a \quad \text{und} \quad \int x \cdot e^{-ax} \cdot Cos\, bx \cdot dx = Y_a.$$

Integrirt man nämlich nach a, so erhält man

$$\int X_a \cdot da = -\int_0^\infty e^{-ax} \cdot \mathit{Sin}\, bx \cdot dx$$

und
$$\int Y_a \cdot da = -\int_0^\infty e^{-ax} \cdot \mathit{Cos}\, bx \cdot dx;$$

und da diese beiden letzteren bestimmten Integrale (aus §. 4. N. 8. und N. 9.) bereits bekannt sind, so hat man

$$\int X_a \cdot da = -\frac{b}{a^2+b^2} \quad \text{und} \quad \int Y_a \cdot da = -\frac{a}{a^2+b^2};$$

und so finden sich nun durch Differenziation nach a, sowohl der gesuchte Werth X_a, als auch der andere Y_a; nämlich

I. $$\int_0^\infty x \cdot e^{-ax} \cdot \mathit{Sin}\, bx \cdot dx = \frac{2ab}{(a^2+b^2)^2};$$

II. $$\int_0^\infty x \cdot e^{-ax} \cdot \mathit{Cos}\, bx \cdot dx = \frac{a^2-b^2}{(a^2+b^2)^2},$$

wo a beliebig positiv seyn muß, so wie b beliebig reell.

Zweites Beispiel.

Soll $\int_{+0}^\infty \frac{Lx}{1-x^2} \cdot dx$ ausgewerthet werden, wo der Logarithme stets seinen reellen Werth vorstellen soll, den wir immer durch Lx bezeichnen, so kann man zunächst

α) $$\int_{+0}^\infty \frac{x^a \cdot Lx}{1-x^2} \cdot dx \; {}^{*)} = X_a$$

suchen, weil dieses letztere bestimmte Integral für $a = 0$ in

---

*) Da der Nenner $1-x^2$ für $x = 1$, also zwischen den Grenzwerthen von x, in Null übergeht, so muß man vor allen Dingen untersuchen, ob das vorgelegte Integral nicht zu den unterbrochenen gehört; und da die eine der Grenzen ∞ ist, so muß auch vor der Auswerthung untersucht werden, ob das Integral convergent ist.

Weil aber $\frac{x^a \cdot Lx}{1-x^2}$ für $x = 1$ (zwar zunächst in $\frac{0}{0}$, bei näherer Untersuchung aber) in $-\frac{1}{2}$ übergeht, so ist das Integral ununterbrochen. — Nach VIII. Th. §§. 91. 94. ist aber dieses Integral auch convergent, so oft $a<2$ ist, welches letztere also vorausgesetzt werden muß.

das vorgelegte übergeht. Integrirt man nun dieses letztere nach a, so erhält man

$$\beta)\qquad \int_{+0}^{\infty}\frac{x^a+C}{1-x^2}\cdot dx = \int X_a\cdot da.$$

Damit dieses Integral zur Linken (nach §. 8. N. 14.) ein bekanntes sey, setze man statt der willkührlichen Konstante C (welche nach a konstant, d. h. von a unabhängig seyn muß) $-x^b$, und man hat dann

$$\gamma)\qquad \int X_a\cdot da = \int_{+0}^{\infty}\frac{x^a-x^b}{1-x^2}\cdot dx$$

$$= \frac{\pi}{2}\cdot\left[Cotg(a+1)\cdot\frac{\pi}{2} - Cotg(b+1)\frac{\pi}{2}\right]$$

(nach §. 8. N. 14.), wenn nur $a<1$ und >-1 ist.

Differenziirt man nun dies Resultat wieder nach a, so erhält man sogleich X_a d. h.

$$42)\qquad \int_{+0}^{\infty}\frac{x^a\cdot Lx}{1-x^2}\cdot dx = -\frac{\frac{1}{4}\pi^2}{\left(Sin\frac{a+1}{2}\pi\right)^2},$$

wenn nur $a<1$ und >-1 ist, d. h. zwischen -1 und $+1$ liegt.

Für $a=0$ giebt dies

$$\text{I.}\qquad \int_{+0}^{\infty}\frac{Lx}{1-x^2}\cdot dx = -\tfrac{1}{4}\pi^2.$$

Und weil für $x=\frac{1}{y}$ allemal $\frac{Lx}{1-x^2}\cdot dx = -\frac{Ly}{1-y^2}\cdot dy$ ist, so folgt aus VIII. Th. §. 98. I.

$$\int_{+0}^{1}\frac{Lx}{1-x^2}\cdot dx = \int_{1}^{\infty}\frac{Lx}{1-x^2}\cdot dx;$$

also hat man auch noch:

$$\text{II.}\qquad \int_{+0}^{1}\frac{Lx}{1-x^2}\cdot dx = \tfrac{1}{2}\int_{+0}^{\infty}\frac{Lx}{1-x^2}\cdot dx = -\tfrac{1}{8}\pi^2.$$

Anmerkg. Aus diesem Resultate gehen sogleich noch die Werthe der bestimmten Integrale

$$\int_{+0}^{1}\frac{Lx}{1+x}\cdot dx,\quad \int_{+0}^{1}\frac{Lx}{1-x}\cdot dx,\quad \int_{+0}^{1}\frac{L(1+x)}{x}\cdot dx,$$

$$\int_{+0}^{1}\frac{L(1-x)}{x}\cdot dx,\quad \int_{+0}^{1}\frac{L(1-x^2)}{x}\cdot dx,\quad \int_{+0}^{1}\frac{L\frac{1+x}{1-x}}{x}\cdot dx,$$

u. s. w. hervor, welche nach dem Kennzeichen VIII. Th. §. 94. alle zu den ununterbrochenen gehören *).

Dies geschieht wie folgt:

Integrirt man $\frac{\log x}{1-x^2}\cdot dx$ d. h. $\frac{1}{1-x^2}\cdot \log x\cdot dx$ theilweise, so erhält man:

$$\int\frac{\log x}{1-x^2}\cdot dx = \tfrac{1}{2}\log x\cdot\log\frac{1+x}{1-x}-\tfrac{1}{2}\int\frac{1}{x}\cdot\log\frac{1+x}{1-x}\cdot dx;$$

nimmt man nun diese Gleichungen zwischen den Grenzen $x=+0$ und $x=1$, und nimmt man dabei nur die reellen Werthe der Logarithmen, so erhält man

$$\int_{+0}^{1}\frac{Lx}{1-x^2}\cdot dx = -\tfrac{1}{2}\int_{+0}^{1}\frac{1}{x}\cdot L\frac{1+x}{1-x}\cdot dx;$$

folglich nach II.

III. $$\int_{+0}^{1}\frac{1}{x}\cdot L\frac{1+x}{1-x}\cdot dx = \tfrac{1}{4}\pi^2,$$

d. h. in so ferne $L\frac{1+x}{1-x} = L(1+x)-L(1-x)$ ist,

(⊙)... $$\int_{+0}^{1}\frac{L(1+x)}{x}\cdot dx - \int_{+0}^{1}\frac{L(1-x)}{x}\cdot dx = \tfrac{1}{4}\pi^2.$$

---

*) Wollte man dieselben Integrale zwischen den Grenzen +0 und ∞ nehmen, so würden sie alle (nach den Kennzeichen des §. 94. des VIII. Th.) als zu den divergenten Integralen gehörend angesehen werden müssen, die keinen Werth haben, nach deren Werth also vergeblich gesucht würde.

Auf der andern Seite ist aber:

$$\int_{+0}^{1} \frac{L(1+x)}{x} \cdot dx + \int_{+0}^{1} \frac{L(1-x)}{x} \cdot dx = \int_{+0}^{1} \frac{L(1-x^2)}{x} \cdot dx,$$

also dieselbe Summe (wenn $x^2 = z$ gesetzt wird)

$$= \tfrac{1}{2}\int_{+0}^{1} \frac{L(1-x)}{x} \cdot dx,$$ so daß sich hieraus ergiebt

$$(☾) \ldots \quad \int_{+0}^{1} \frac{L(1-x)}{x} \cdot dx = -2\int_{+0}^{1} \frac{L(1+x)}{x} \cdot dx.$$

Die Gleichungen ⊙ und ☾ mit einander verbunden geben nun

$$\text{IV.} \quad \int_{+0}^{1} \frac{L(1+x)}{x} \cdot dx = \tfrac{1}{12}\pi^2;$$

$$\text{V.} \quad \int_{+0}^{1} \frac{L(1-x)}{x} \cdot dx = -\tfrac{1}{6}\pi^2 \text{ *)}.$$

---

*) Als Anwendung dieses gefundenen Werthes sey zu summiren die unendliche Reihe

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{6^2} + \text{ in inf.} = s.$$

Versieht man die Glieder dieser Reihe mit den entsprechenden Potenzen von x, so daß man

$$x + \frac{1}{2^2} \cdot x^2 + \frac{1}{3^2} \cdot x^3 + \frac{1}{4^2} \cdot x^4 + \frac{1}{5^2} \cdot x^5 + \text{ in inf.} = S_x$$

erhält, so ist s der Werth von S_x für $x = 1$ genommen. Nun ist aber

$$\partial S_x = 1 + \tfrac{1}{2}x + \tfrac{1}{3}x^2 + \tfrac{1}{4}x^3 + \tfrac{1}{5}x^4 + \text{ in inf.}$$

Daraus folgt

$$\partial(x \cdot \partial S_x) = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \text{ in inf.} = \frac{1}{1-x},$$

also $$x \cdot \partial S_x = \int \frac{1}{1-x} \cdot dx = -log(1-x),$$

wo die Konstante $= 0$, weil $x \cdot \partial S_x$ für $x = 0$, der Null gleich werden muß; folglich wird

$$\partial S_x = -\frac{log(1-x)}{x} \quad \text{und} \quad s = -\int_{+0}^{1} \frac{L(1-x)}{x} \cdot dx = \tfrac{1}{6}\pi^2;$$

Diese beiden zu einander addirt, geben:

VI. $$\int_{+0}^{1} \frac{L(1-x^2)}{x} \cdot dx = -\tfrac{1}{12}\pi^2.$$

Setzt man in V. $1-z$ statt x, oder in VI. $1-x^2 = z$, so erhält man

VII. $$\int_{+0}^{1} \frac{Lx}{1-x} \cdot dx = -\tfrac{1}{6}\pi^2;$$

und daraus, weil $\frac{1}{1+x} = \frac{2}{1-x^2} - \frac{1}{1-x}$ ist, mit Zuziehung der II.

VIII. $$\int_{+0}^{1} \frac{Lx}{1+x} \cdot dx = -\tfrac{1}{12}\pi^2.$$

§. 17.

Fortsetzung der vierten Methode.

Sollte erst das n^{te} Integral $\int^{(n)} X_a \cdot da^n$ bekannt und $= \varphi_a$ seyn, so hätte man sogleich $X_a = \partial^n \varphi_a$.

Sollen z. B. ausgewerthet werden die Summen

$$\int_0^\infty x^n \cdot e^{-ax} \cdot Sin\, bx \cdot dx = X_a \quad \text{und} \quad \int_0^\infty x^n \cdot e^{-ax} \cdot Cos\, bx \cdot dx = Y_a,$$

so wird man zu denselben beiden bestimmten und schon bekannten Integralen NN. 8. und 9. des §. 4. zurückgeführt, wenn man X_a und Y_a n mal hinter einander nach a integrirt. Differenziirt man daher die dort durch das Integriren erhaltenen Endresultate

$$(-1)^n \cdot \frac{b}{a^2+b^2} \quad \text{und} \quad (-1)^n \cdot \frac{a}{a^2+b^2}$$

wiederum n mal hinter einander nach a, so erhält man sogleich: *)

---

mithin ist $1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{16}+\frac{1}{25}+\frac{1}{36}+\frac{1}{49}+\cdots = \frac{1}{6}\pi^2$ (Vgl. VIII. Th. §. 20.).

*) Um diese n^{ten} Differenzial-Koeffizienten zu finden, zerlegt man

$$\frac{b}{a^2+b^2} \quad \text{in} \quad \frac{1}{2i} \cdot \left[\frac{1}{a-b \cdot i} - \frac{1}{a+b \cdot i}\right]$$

43) $$\int_0^\infty x^n \cdot e^{-ax} \cdot Sin\, bx \cdot dx$$
$$= \frac{n!}{(a^2+b^2)^{\frac{n+1}{2}}} \cdot Sin\left[(n+1) \cdot Arc\, tg. \frac{b}{a}\right]$$

44) $$\int_0^\infty x^n \cdot e^{-ax} \cdot Cos\, bx \cdot dx$$
$$= \frac{n!}{(a^2+b^2)^{\frac{n+1}{2}}} \cdot Cos\left[(n+1) \cdot Arc\, tg. \frac{b}{a}\right],$$

sobald nur n eine positive ganze Zahl (oder Null), a beliebig positiv, b beliebig reell ist, und die Potenz ihren positiven Werth vorstellt *).

---

und $\frac{a}{a^2+b^2}$ in $\frac{1}{2} \cdot \left[\frac{1}{a-b \cdot i} + \frac{1}{a+b \cdot i}\right]$

und man hat dann

$$\partial^n (a \mp b \cdot i)_a^{-1} = (-1)^n \cdot n!\, (a \mp b \cdot i)^{-n-1} = (-1)^n \cdot n!\, r^{-n-1} \cdot e^{\pm(n+1)\varphi \cdot i}$$
$$= (-1)^n \cdot n!\, r^{-n-1} \cdot [Cos(n+1)\varphi \pm i \cdot Sin(n+1)\varphi],$$

wenn (nach VIII. Th. Einl. §. 4.) $a+b \cdot i$ in $r \cdot e^{\varphi \cdot i}$ umgeformt wird.

Daraus folgt nun:

$$\partial^n \left(\frac{b}{a^2+b^2}\right) = \frac{1}{2i} \cdot \left[\partial^n (a-b \cdot i)_a^{-1} - \partial^n (a+b \cdot i)_a^{-1}\right]$$
$$= (-1)^n \cdot n!\, r^{-n-1} \cdot Sin(n+1)\varphi,$$

$$\partial^n \left(\frac{a}{a^2+b^2}\right)_a = \frac{1}{2} \cdot \left[\partial^n (a-b \cdot i)_a^{-1} + \partial^n (a+b \cdot i)_a^{-1}\right]$$
$$= (-1)^n \cdot n!\, r^{-n-1} \cdot Cos(n+1)\varphi.$$

Weil aber $r = +\sqrt{a^2+b^2}$ und $Cos\, \varphi = \frac{a}{r}$, so wie $Sin\, \varphi = \frac{b}{r}$ ist und a positiv, so liegt φ im 1ten oder 4ten Quadranten, je nachdem b positiv oder negativ ist. Daher ist $\varphi = Arc\, sin. \frac{b}{r} = Arc\, tg. \frac{b}{a}$. (S. VIII. Th. Einleitg. und zwar die Note §. 10. N. 4.).

*) Für $b = 0$ geht die N. 44. wieder in die N. 30. (des §. 12.) über, während für $n = 1$ die NN. 43. 44. wieder übergehen in die Resultate I. und II. des ersten Beispiels zu §. 16.

Anmerkg. Als hierher gehörige Beispiele führen wir noch an die Auswerthung der Integrale

$$\int_0^\infty x^n \cdot e^{-ax} \cdot dx, \quad \int_0^\infty x^n \cdot \frac{e^{-ax}}{\sqrt{x}} \cdot dx, \quad \int_0^\infty x^n \cdot \frac{Sin\, ax}{\sqrt{x}} \cdot dx,$$

$$\int_0^\infty x^n \cdot \frac{Cos\, ax}{\sqrt{x}} \cdot dx, \quad \int_0^\infty x^{n+c-1} \cdot e^{-ax} \cdot dx,$$

$$\int_0^\infty x^{n+c-1} \cdot Sin\, ax \cdot dx, \quad \int_0^\infty x^{n+c-1} \cdot Cos\, ax \cdot dx, \quad \text{u. s. w. f.},$$

wenn a beliebig positiv, n positiv und ganz, c dagegen positiv und <1 vorausgesetzt wird. Diese Integrale, in so weit sie convergent sind, ziehen sich durch das kurz vorher beschriebene Verfahren zurück auf diese anderen Integrale

$$\int_0^\infty e^{-ax} \cdot dx, \quad \int_0^\infty \frac{e^{-ax}}{\sqrt{x}} \cdot dx, \quad \int_0^\infty \frac{Sin\, ax}{\sqrt{x}} \cdot dx,$$

$$\int_0^\infty \frac{Cos\, ax}{\sqrt{x}} \cdot dx, \quad \int_0^\infty x^{c-1} \cdot e^{-ax} \cdot dx, \quad \int_0^\infty x^{c-1} \cdot Sin\, ax \cdot dx,$$

$\int_0^\infty x^{c-1} \cdot Cos\, ax \cdot dx$, u. s. w., welche als die einfacheren zunächst ausgewerthet werden müssen, wie letzteres auch in der Folge geschieht.

Hieher gehört aber auch das Integral

$$\int_0^\infty x^n \cdot e^{-ax^2} \cdot dx,$$

welches auf

$$\int_0^\infty x \cdot e^{-ax^2} \cdot dx \quad \text{oder auf} \quad \int_0^\infty e^{-ax^2} \cdot dx$$

zurückgeführt wird, je nachdem n ungerade oder gerade. — U. dergl. mehr.

§. 18.

Fortsetzung der vierten Methode.

Kennt man aber von dem gesuchten Werthe X_a des vorgelegten bestimmten Integrals $\int_\alpha^\beta f_{x,a} \cdot dx$ (nicht, wie wir bisher angenommen haben, ein Integral, sondern) den Differenzial-

Koeffizienten ∂X_a (nach a), — ist solcher etwa $= \varphi_a$, — so findet sich sogleich

$$X_a = \int \varphi_a \cdot da + C,$$

wo C nach a constant ist, welche Konstante erst aus dem, für irgend einen bestimmten Werth von a bekannten Werthe von X_a ihre Bestimmung erhalten muß.

Wenn aber diese Konstante C (nach a) aus irgend einem bestimmten Werthe w von a ihre Bestimmung erhalten hat, so darf man das Resultat doch jedesmal nur für alle die Werthe von a gelten lassen, welche (kleiner oder größer als w) dem Werthe w auf beiden Seiten so lange stetig anliegen, bis man zu den Werthen $a = A > w$ oder $a = A' < w$ kommt, für welche das vorgelegte Integral $\int_\alpha^\beta f_{x,a} \cdot dx$ ein unterbrochenes ist, d. h. keinen Werth mehr hat.

Will man dann den Werth desselben vorgelegten Integrals $\int_\alpha^\beta f_{x,a} \cdot dx$ für alle diejenigen Werthe von a finden, welche größer als A oder kleiner als A' sind [aber kleiner als A_1 und größer als A_1', wenn für $a = A_1 > A$ oder $a = A_1' < A'$ eine neue Unterbrechung des Daseyns von $\int_\alpha^\beta f_{x,a} \cdot dx$ eintreten sollte, —], so muß man auf's Neue die Konstante C, aber dasmal aus einem Werthe von a finden, der unter der letzterwähnten stetigen Reihe der Werthe von a liegt, für welche alle das neue Resultat wieder gültig bleiben soll.

Diese Aufmerksamkeit kann dem Anfänger nicht genug empfohlen werden, wenn derselbe nicht, ohne auch nur eine Ahnung davon zu haben, zu falschen Resultaten gelangen will. — So wie nämlich das vorgelegte Integral $\int_\alpha^\beta f_{x,a} \cdot dx$ ein unterbrochenes wird, also sein Daseyn aufhört, so kann es sofort ein neues Daseyn gewinnen, d. h. es kann sofort ein anderes Gesetz der Stetigkeit des Werthes X_a beginnen, wenn auch C

wiederum von den einzelnen Werthen von a unabhängig bleiben muß.

Erstes Beispiel.

Will man z. B.

$$\int_0^{\infty} \frac{e^{-bx} \cdot Sin\, ax}{x} \cdot dx = X_a$$

bestimmen, so findet sich

$$\partial X_a' = \int_0^{\infty} e^{-bx} \cdot Cos\, ax \cdot dx = \frac{b}{a^2+b^2}$$

(nach §. 4. N. 9.), wenn b positiv ist; daraus folgt also

$$X_a = \int \frac{b}{a^2+b^2} \cdot da = Arc\, tg. \frac{a}{b} + C.$$

Weil aber das vorgelegte bestimmte Integral (X_a) für $a=0$ offenbar $=0$ ist*), so folgt $0 = 0 + C$ d. h. $C = 0$, mithin hat man, wenn noch a mit b vertauscht wird,

45) $$\int_0^{\infty} \frac{e^{-ax} \cdot Sin\, bx}{x} \cdot dx = Arc\, tg. \frac{b}{a},$$

wenn nur a positiv und endlich und b reell ist**).

Zweites Beispiel.

Das bestimmte Integral $\int_0^{\infty} \frac{e^{-ax} \cdot Cos\, bx}{x} \cdot dx$ stellt sich

---

*) Wenn man $a = \frac{1}{\infty}$ gesetzt hätte, so könnte man nicht behaupten, daß $Sin\, ax = 0$ oder $= \frac{1}{\infty}$ würde, weil x selbst ∞ wird. Aber für $a = 0$ hat man nothwendig $0 \cdot x = (q-q)x = qx - qx = 0$, während x ein bloßer Träger des Operations-Zeichens, also ganz allgemein ist.

**) Aus der späteren Gleichung N. 51. geht hervor, daß diese Gleichung N. 45. auch für $a = +0$ gilt.

Daß die Gleichung N. 45. auch für einen negativen Werth von b gilt, folgt daraus, daß dann beide Ausdrücke links und rechts in dieselben mit entgegengesetzten Vorzeichen übergehen.

sogleich als ein divergentes heraus, welches demnach keinen Werth hat. Wollte man aber das convergente Integral

$$\int_0^\infty \frac{e^{-ax}\cdot(Cos\,bx - Cos\,cx)}{x}\cdot dx = X_b$$

auswerthen, so würde man sogleich haben (nach §. 4. N. 8.)

$$\partial X_b = -\int_0^\infty e^{-ax}\cdot Sin\,bx\cdot dx = -\frac{b}{a^2+b^2},$$

wenn nur a positiv ist; daraus folgt

$$X_b = -\int \frac{b}{a^2+b^2}\cdot db = -\tfrac{1}{2}\log(a^2+b^2) + C(onst.).$$

Weil aber das vorgelegte und durch X_b bezeichnete Integral für $b = c$ offenbar der Null gleich wird, so findet man sogleich zur Bestimmung der Konstante C, aus der letztern Gleichung (für $b = c$ genommen)

$$0 = -\tfrac{1}{2}\log(a^2+c^2) + C;$$

also ist X_b gefunden, nämlich

$$46)\quad \int_0^\infty \frac{e^{-ax}\cdot(Cos\,bx - Cos\,cx)}{x}\cdot dx = \tfrac{1}{2}L\frac{a^2+c^2}{a^2+b^2},$$

wenn nur a beliebig positiv und endlich, b und c aber beliebig reell sind*).

Drittes Beispiel.

Es sey das convergente Integral

$$\int_0^\infty \frac{(e^{-ax} - e^{-cx})\cdot Sin\,bx}{x}\cdot dx = X_a$$

auszuwerthen.

Nach §. 4. N. 8. erhält man sogleich

$$\partial X_a = -\int_0^\infty e^{-ax}\cdot Sin\,bx\cdot dx = -\frac{b}{a^2+b^2},$$

---

*) Aus dem später folgenden 5ten Beispiel geht hervor, daß dieses Resultat 46. auch noch für $a = 0$ gilt.

folglich, wenn man nun wieder nach a integrirt,

$$X_a = -Arc\,tg.\frac{a}{b} + C(onst.).$$

Weil aber das vorgelegte und durch X_a bezeichnete Integral offenbar für $a=c$ in Null übergeht, so hat man

$$0 = -Arc\,tg.\frac{c}{b} + C$$

zur Bestimmung von C.

Also findet sich, wenn a und c beliebig positiv und endlich sind, und wenn b beliebig reell ist,

$$47)\quad \int_0^\infty \frac{(e^{-ax}-e^{-cx})\cdot Sin\,bx}{x}\cdot dx = Arc\,tg.\frac{c}{b} - Arc\,tg.\frac{a}{b}$$
$$= Arc\,tg.\frac{b(c-a)}{b^2+ca} = Arc\,tg.\frac{b}{a} - Arc\,tg.\frac{b}{c},$$

welche Gleichung übrigens auch unmittelbar aus der N. 45. hervorgeht *).

Viertes Beispiel.

Ganz auf demselben Wege findet man, wenn

$$\int_0^\infty \frac{(e^{-ax}-e^{-cx})\cdot Cos\,bx}{x}\cdot dx = X_a$$

gesetzt wird, sogleich (nach §. 4. N. 9.)

$$\partial X_a = -\int_0^\infty e^{-ax}\cdot Cos\,bx\cdot dx = -\frac{a}{a^2+b^2};$$

folglich

$$X_a = -\int\frac{a}{a^2+b^2}\cdot da = -\tfrac{1}{2}\,log(a^2+b^2) + C.$$

Weil jedoch das vorgelegte Integral X_a für $a=c$ in Null übergeht, so hat man zur Bestimmung der Konstante C die Gleichung

---

*) Es ist nämlich $Arc\,tg.\frac{p}{q} = \frac{1}{2}\pi - Arc\,tg.\frac{q}{p}$, sobald $\frac{p}{q}$ positiv ist.

$$0 = -\tfrac{1}{2} log(c^2+b^2)+C.$$

Also hat man X_a vollständig gefunden, nämlich

$$48)\quad \int_0^\infty \frac{(e^{-ax}-e^{-cx})\cdot Cos\, bx}{x}\cdot dx = \tfrac{1}{2}L\frac{c^2+b^2}{a^2+b^2},$$

wenn nur a und c beliebig positiv und endlich sind, während b beliebig reell gedacht werden kann.

Anmerkg. Hieraus erhält man sogleich wieder für $b = 0$,

$$49)\quad \int_0^\infty \frac{e^{-ax}-e^{-cx}}{x}\cdot dx = L\frac{c}{a},$$

wenn nur a und c beliebig positiv (und endlich) sind.

Setzt man hier $e^{-x} = z$ (also $e^{-x}\cdot dx = -dz$, also $dx = -\frac{dz}{z}$), so erhält man noch

$$0)\quad \int_{+0}^1 \frac{x^{c-1}-x^{a-1}}{Lx}\cdot dx = L\frac{c}{a}\ ^{*)},$$

wenn nur c und a beliebig positiv (und endlich) sind.

---

*) Es versteht sich von selber, daß man auch

$$\int_{+0}^1 \frac{x^{c-1}-x^{a-1}}{Lx}\cdot dx = X_c$$

direkt dadurch finden kann, daß man

$$\partial X_c = \int_{+0}^1 x^{c-1}\cdot dx = \left[\frac{x^c}{c}\right]_{1\div 0} = \frac{1}{c}$$

(wenn c positiv gedacht wird) herausstellt, daraus aber wieder

$$X_c = \int \frac{1}{c}\cdot dc = log\, c + C$$

ableitet. — Weil dann X_c für $c = a$ in Null übergeht, so hat man zur Bestimmung der Konstante C die Gleichung

$$0 = log\, a + C$$

und daraus folgt dann

$$X_c = L\frac{c}{a}.$$

Natürlich kann man nun auch aus diesem Resultat N. 50., indem man $x = e^{-z}$ setzt, wiederum die N. 49. ableiten.

Fünftes Beispiel.

Wollte man $\int_0^\infty \frac{Sin\,x}{x} \cdot dx$ auswerthen, so könnte man das Integral erst verallgemeinern, indem man

$$\int_0^\infty \frac{Sin\,bx}{x} = X_b$$

suchte, dadurch daß man

$$\partial X_b = \int_0^\infty Cos\,bx \cdot dx = \frac{1}{b}[Sin\,bx]_{\infty \div 0} = \frac{1}{b} \cdot Sin\,\infty$$

herausstellte, und nach b wieder integrirte, und zuletzt $b = 1$ nähme. Weil aber demnach ∂X_b unbestimmt wird, so bleibt unsere Methode dasmal erfolglos *).

Verallgemeinert man aber das vorgelegte Integral noch mehr, d. h. sucht man

$$\int_0^\infty \frac{e^{-ax} \cdot Sin\,bx}{x} \cdot dx = X_b,$$

welches für $a = 0$ und $b = 1$ in das vorgelegte Integral übergeht, so läßt sich unsere Methode sogleich anwenden, wie solches im 1ten Beispiel bereits geschehen ist. Man hat daselbst gefunden

$$(\mathfrak{C}) \cdots \quad \int_0^\infty \frac{e^{-ax} \cdot Sin\,bx}{x} \cdot dx = Arc\,tg. \frac{b}{a}$$

und diese Gleichung giebt für $a = +0$ sogleich

$$51) \quad \int_0^\infty \frac{Sin\,bx}{x} \cdot dx = Arc\,tg. \pm\infty = \pm\tfrac{1}{2}\pi$$

---

*) In der That ist dieses bestimmte Integral ein divergentes und hat also überhaupt keinen Werth. — Früher glaubte man irrthümlich, daß $\int_0^\infty Cos\,x \cdot dx = 0$ und $\int_0^\infty Sin\,x \cdot dx = 1$ sey, weil dies die Werthe der Integrale §. 4. NN. 8. und 9. sind, wenn in ihnen $a = 0$ und $b = 1$ gesetzt wird.

je nachdem $b \begin{Bmatrix} \text{positiv} \\ \text{negativ} \end{Bmatrix}$ ist*) übrigens ganz oder gebrochen, endlich oder unendlich-klein.

Da indeß die Gleichung (C) nach ihrer Entwickelung nur gilt, so lange a positiv und, wenn auch übrigens noch so klein, doch endlich ist, weil die Gleichungen §. 4. NN. 8. und 9. nur unter dieser Voraussetzung gelten, so muß man so lange an der Richtigkeit dieser Gleichung N. 51. noch zweifeln, als sie nicht auf andere überzeugendere Weise hergeleitet ist. Soviel steht zwar fest, daß der Werth des bestimmten Integrals

$\int_0^\infty \frac{e^{-ax} \cdot Sin\, x}{x} \cdot dx$ sich dem Werthe $\frac{1}{2}\pi$ immer und ohne Aufhören nähert und ihm noch so nahe kommt, je kleiner a gedacht wird; aber es steht nicht so fest, daß dasselbe Integral sich gleichzeitig dem Werthe von $\int_0^\infty \frac{Sin\, x}{x} \cdot dx$ eben so nähern müsse.

Man hat dasselbe Resultat N. 51. auf sehr verschiedenem Wege abgeleitet. Ganz direkt geschieht es auf nachstehende Weise: Es ist zunächst (nach VIII. Th. §. 88. N. 2.)

$$\alpha) \quad \int_0^\infty \frac{Sin\, x}{x} \cdot dx = \int_0^\pi + \int_\pi^{2\pi} + \int_{2\pi}^{3\pi} + \int_{3\pi}^{4\pi} + \text{in inf.}\,^{**}),$$

wenn man zur Rechten überall unter dem $\int$ Zeichen eine und dieselbe Funktion, nämlich $\frac{Sin\, x}{x} \cdot dx$ sich denkt. Nun ist aber (nach VIII. Th. §. 88. N. 5.), wenn r positiv ganz gedacht wird,

---

*) Für $b = 1$ wird $\int_0^\infty \frac{Sin\, x}{x} \cdot dx = \frac{1}{2}\pi$ und daraus folgt sogleich, wenn man $x = az$ setzt, wiederum die allgemeiner scheinende N. 51.

**) Diese Zerlegung läßt zugleich sehen, daß das Integral $\int_0^\infty \frac{Sin\, x}{x} \cdot dx$ convergent ist, weil die unendliche Reihe zur Rechten, in welche es sich nun zerlegt findet, Glieder zeigt, die stets abnehmen und die dabei abwechselnde Vorzeichen haben. (S. VIII. Th. §§. 25.—28.).

$$\beta)\int_{(2r-1)\pi}^{2r\pi}\frac{Sin\,x}{x}\cdot dx=\int_0^{\pi}\frac{Sin(2r\pi-x)}{2r\pi-x}\cdot dx=-\int_0^{\pi}\frac{Sin\,x}{2r\pi-x}\cdot dx,$$

und

$$\gamma)\qquad \int_{2r\pi}^{(2r+1)\pi}\frac{Sin\,x}{x}\cdot dx=\int_0^{\pi}\frac{Sin\,x}{2r\pi+x}\cdot dx.$$

Dadurch geht aber die Gleichung α.) über in

$$\delta)\qquad \int_0^{\infty}\frac{Sin\,x}{x}\cdot dx$$

$$=\int_0^{\pi}\frac{Sin\,x}{x}\cdot dx-\int_0^{\pi}\frac{Sin\,x}{2\pi-x}\cdot dx$$

$$+\int_0^{\pi}\frac{Sin\,x}{2\pi+x}\cdot dx-\int_0^{\pi}\frac{Sin\,x}{4\pi-x}\cdot dx+\cdots$$

$$=\int_0^{\pi}Sin\,x\cdot\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x-2\pi}+\frac{1}{x+2\pi}+\frac{1}{x-4\pi}+\frac{1}{x+4\pi}+\cdots\right)\cdot dx.$$

Da nun die in den Klammern befindliche unendliche Reihe (nach VIII. Th. Einleitg. §. 13. VII.) nichts anders ist als $\frac{1}{2}\cdot Cotg\frac{1}{2}x$, und da $Sin\,x=2\,Sin\frac{1}{2}x\cdot Cos\frac{1}{2}x$, also $\frac{1}{2}Sin\,x\cdot Cotg\frac{1}{2}x=(Cos\frac{1}{2}x)^2=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}Cos\,x$ sich findet, so hat man jetzt (unmittelbar aus δ.)

$$\varepsilon)\qquad \int_0^{\infty}\frac{Sin\,x}{x}\cdot dx=\int_0^{\pi}(\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}Cos\,x)\cdot dx=\tfrac{1}{2}\pi,$$

aus welcher die obige Formel N. 51. augenblicklich hervorgeht, sobald man $x=bz$ setzt und b positiv oder negativ, endlich oder unendlich-klein sich denkt, da die Grenzwerthe von z bezüglich $\frac{0}{b}$ und $\frac{\infty}{b}$ werden, und $\frac{0}{b}$ stets 0 wird, mag b positiv oder negativ, endlich oder unendlich-klein seyn.

Anmerkg. Man kann auch $\int_a^b\frac{Sin\,x}{x}\cdot dx$ dadurch auswerthen, daß man $dx=\frac{b-a}{n}=\delta$ setzt für $n=\infty$, und nun der Definition des bestimmten Integrals zufolge (VIII. Th. §§. 84. 85.)

$$\int_a^b \frac{Sin\,x}{x}\cdot dx = Sin\,\delta + \tfrac{1}{2} Sin\,2\delta + \tfrac{1}{3} Sin\,3\delta + \frac{1}{n-1}\cdot Sin\,(n-1)\delta$$

für $n=\infty$ hat. Um nun diese Summe rechts, welche wir durch Σ bezeichnen, zu finden, betrachtet man zuerst die Summe

$$s = Cos\,\delta + Cos\,2\delta + Cos\,3\delta + \cdots + Cos\,(n-1)\delta,$$

findet solche auf eine, der in einer Note zu §. 9. beschriebenen analoge Weise, bekommt

$$s = -\tfrac{1}{2} + \frac{Sin\,(n-\frac{1}{2})\delta}{2\,Sin\,\frac{1}{2}\delta}$$

und hat dann

$$\Sigma = \int_\pi^\delta s\cdot d\delta = -\tfrac{1}{2}\delta + \tfrac{1}{2}\pi + \int_\pi^\delta \frac{Sin\,(n-\frac{1}{2})\delta}{2\,Sin\,\frac{1}{2}\delta}\cdot d\delta.$$

Nun läßt sich durch theilweise Integration nachweisen, daß letzteres Integral $=0$ wird, so oft $b=\infty$, $a=0$, aber $\frac{b}{n}=\delta$ $=\frac{1}{\infty}$ genommen wird, welches erreicht ist, sobald man n in der Form b^α nimmt und $\alpha>1$.

Sechstes Beispiel.

Soll, um noch ein Beispiel zu geben, $\int_0^\infty \left(\frac{Sin\,x}{x}\right)^2\cdot dx$ gefunden werden, so sucht man zunächst $\int_0^\infty \left(\frac{Sin\,ax}{x}\right)^2\cdot dx = X_a$, bildet daraus

$$\partial X_a = \int_0^\infty \frac{2\cdot Sin\,ax\cdot Cos\,ax}{x}\cdot dx = \int_0^\infty \frac{Sin\,2ax}{x}\cdot dx = \tfrac{1}{2}\pi,$$

wenn a positiv gedacht wird; demnach ist $X_a = \frac{1}{2}\pi a + C$. — Weil aber für $a=0$ auch $X_a=0$ werden muß, so ist $C=0$; also hat man

52) $\int_0^\infty \frac{(Sin\,ax)^2}{x^2}\cdot dx = \frac{1}{2}a\pi$, wenn a beliebig positiv.

Dasselbe Resultat hätte man jedoch auch erhalten, wenn man

(nach §. 11.) durch theilweise Integration (indem man $\frac{(Sin\,ax)^2}{x^2}$ in das Produkt $(Sin\,ax)^2 \cdot x^{-2}$ zerlegt) die allgemeine Reduktions-Formel

$$\int \frac{(Sin\,ax)^2}{x^2} \cdot dx = -\frac{(Sin\,ax)^2}{x} + a \int \frac{2\,Sin\,ax \cdot Cos\,ax}{x} \cdot dx,$$

dann aber hieraus die specielle Reduktions-Formel

$$\int_0^\infty \frac{(Sin\,ax)^2}{x^2} \cdot dx = a \int_0^\infty \frac{Sin\,2ax}{x} \cdot dx$$

gebildet hätte.

Anmerkg. Um nicht zu weitläufig zu werden, wollen wir hier nur noch einige Resultate herschreiben, die man alle nach den im §. 11. und §. 15. beschriebenen Methoden nach und nach aus einander erhält, und welche ihrer Form wegen einiges Interesse gewähren, nämlich, wenn a, b, c beliebig positiv sind,

I. $$\int_0^\infty \frac{Sin\,ax \cdot Sin\,bx}{x^2} \cdot dx \begin{cases} = \frac{1}{2}a\pi, & \text{wenn } a \leqq b \\ = \frac{1}{2}b\pi, & \text{wenn } a \geqq b; \end{cases}$$

II. $$\int_0^\infty \frac{(Sin\,ax)^3}{x^3} \cdot dx = \tfrac{3}{8}a^2\pi;$$

III. $$\int_0^\infty \frac{(Sin\,ax)^2 \cdot Sin\,bx}{x^3} \cdot dx \begin{cases} = \frac{1}{2}a^2\pi, & \text{wenn } b \geqq 2a \\ = (\frac{1}{2}ab - \frac{1}{8}b^2)\pi, & \text{wenn } b \leqq 2a; \end{cases}$$

IV. $$\int_0^\infty \frac{Sin\,ax \cdot Sin\,bx \cdot Sin\,cx}{x^3} \cdot dx \begin{cases} = \frac{1}{2}ab\pi, & \text{wenn } c \geqq a+b, \\ = \frac{1}{4}(ab+ac+bc)\pi - \frac{1}{8}(a^2+b^2+c^2)\pi, \end{cases}$$

welcher letztere Werth dann an die Stelle des ersteren tritt, so oft die Summe je zweier der drei (positiven) Zahlen a, b, c größer als die dritte oder einmal der dritten gleich ist.

Für $a = b$ geht die I. in die N. 52. und die III. (bei

welcher nun der 2te Werth eintritt) in die II. über. — Für $a = b = c$ geht endlich die IV. (bei welcher dann der 2te Werth eintritt) ebenfalls in die II. über. — Ueberall aber in dieser Anmerkung sind a, b, c beliebig positiv gedacht.

Ferner noch, wenn wieder a und b beliebig positiv sind,

V. $$\int_0^\infty \frac{(Sin\,ax)^4}{x^4} \cdot dx = \tfrac{1}{3}a^3\pi;$$

VI. $$\int_0^\infty \frac{(Sin\,ax)^2 \cdot (Sin\,bx)^2}{x^4} \cdot dx$$
$$= \tfrac{1}{6}a^2(3b-a)\pi, \quad \text{wenn } a \overline{\overline{<}} b;$$

VII. $$\int_0^\infty \frac{(Sin\,ax)^3 \cdot Sin\,bx}{x^4} \cdot dx$$
$$\begin{cases} = \tfrac{1}{2}a^3\pi, & \text{wenn } b > 3a \\ = \tfrac{1}{2}\pi\left[a^3 - \tfrac{1}{24}(3a-b)^3\right], & \text{wenn } b \overline{\overline{<}} 3a \text{ aber } b \overline{\overline{>}} a \\ = \tfrac{1}{2}\pi\left[a^2b - \tfrac{1}{24}(a+b)^3\right], & \text{wenn } b \overline{\overline{<}} a. \end{cases}$$

Diese Resultate können beliebig weit fortgeführt werden. Auch kann man auf demselben Wege die Werthe aller der bestimmten Integrale suchen, in denen die Differenzial-Funktionen zwar dieselben sind, aber noch den Faktor e^{-px} im Zähler enthalten, während p beliebig positiv gedacht ist und die Grenzen der Integrale 0 und ∞ sind. — Außer den Verwickelungen, welche die nachträglichen Integrationen nach a, mit sich führen, findet kein anderes Hinderniß des Gelingens statt.

Siebentes Beispiel.

Soll $\int_0^\pi L(1+a^2+2a \cdot Cos\,x) \cdot dx = X_a$ gefunden werden, so liegt hier ein Fall vor, wo das Integral ein unterbrochenes wird, d. h. gar keinen Werth mehr hat, nämlich für $a = \pm 1$. — Man findet sogleich

$$1)\qquad \partial X_a = \int_0^\pi \frac{2a + 2\,Cos\,x}{1 + a^2 + 2a \cdot Cos\,x} \cdot dx.$$

Nun kann man aber $\frac{2a + 2\,Cos\,x}{1 + a^2 + 2a \cdot Cos\,x}$ in

$\frac{1}{a} + \frac{a^2 - 1}{a} \cdot \frac{1}{1 + a^2 + 2a \cdot Cos\,x}$ zerlegen und zuletzt $Cos\,x = z$ setzen; man findet dann das unbestimmte Integral

$$2) \int \frac{1}{1 + a^2 + 2a \cdot Cos\,x} \cdot dx = \pm \frac{1}{a^2 - 1} \cdot \frac{1}{Cos} \frac{2a + (1 + a^2) \cdot Cos\,x}{1 + a^2 + 2a \cdot Cos\,x};$$

also ist dasselbe Integral 2., zwischen den Grenzen 0 und π genommen (da es positiv seyn muß, weil alle einzelnen Elemente desselben positiv sind)

$$3)\qquad = \pm \frac{\pi}{a^2 - 1}, \text{ je nachdem } a \gtrless 1 \text{ ist,}$$

während a positiv gedacht wird;

mithin ist $\partial X_a = \frac{\pi}{a} \mp \frac{\pi}{a}$, je nachdem $a \lesseqgtr 1$ ist.

Man hat also

$$4)\qquad \partial X_a = 0, \quad \text{wenn } a < 1 \text{ ist;}$$

aber $$5)\qquad \partial X_a = \frac{2\pi}{a}, \quad \text{wenn } a > 1 \text{ ist.}$$

Ist daher $a < 1$ aber positiv, so findet sich X_a nach a konstant (weil $\partial X_a = 0$ ist); und da X_a offenbar, je kleiner a gedacht wird, desto näher der Null rückt und für $a = \frac{1}{\infty}$ selbst unendlich-klein wird, so hat man für jeden positiven Werth von a, der < 1 ist,

$$\int_0^\pi L(1 + a^2 + 2a \cdot Cos\,x) \cdot dx = 0, \quad \text{wenn } a < 1 \text{ und positiv.}$$

Für $a > 1$ wird (aus 5.) $X_a = \int \frac{2\pi}{a} \cdot da = 2\pi \cdot log\,a + C.$

Um nun den Werth dieser Konstante C zu bestimmen, muß der Werth von X_a für irgend einen Werth von a bekannt

seyn der >1 ist. — Weil aber, je mehr sich a dem Unendlichen nähert, das durch X_a bezeichnete Integral desto mehr dem Integral $\int_0^\pi L(a^2)\cdot dx$ d. h. dem Werthe $\pi\cdot L(a^2)$ oder $2\pi\cdot La$ sich nähert, und diesem letztern Ausdruck unendlich-nahe kommen muß (wenn $a=\infty$), so ist obige Konstante $C_1=0$, sobald man statt $log\,a$ seinen reellen Werth La setzt; und man hat daher so lange a positiv ist,

$$53)\quad \int_0^\pi L(1+a^2\pm 2a\cdot Cos\,x)\cdot dx\ ^{*)} = \begin{Bmatrix} 0, & \text{wenn } a<1 \\ 2\pi\cdot La, & \text{für } a>1 \end{Bmatrix},$$

wenn nur a allemal positiv ist, — wo wir dem $2a\cdot Cos\,x$ ein $\pm$ vorgesetzt haben, weil $Cos\,x$ von $x=0$ bis $x=\frac{1}{2}\pi$ dieselben Werthe hat, wie von $x=\frac{1}{2}\pi$ an bis $x=\pi$ hin, nur daß die letzteren alle negativ sind, so daß $-2a\cdot Cos\,x$, wenn x von 0 bis π geht, genau dieselben Werthe hat, als $+2a\cdot Cos\,x$ unter derselben Voraussetzung.

Für $a=1$ geht unser vorgelegtes Integral über in $\int_0^\pi L2(1+Cos\,x)\cdot dx$, und da sowohl der für $a<1$, als auch der für $a>1$ gefundene Werth von X_a für $a=1$ in einen und denselben zusammenfallen, nämlich $=0$ werden, so folgt hieraus noch

$$\text{VIII.}\quad \int_0^\pi L(1\pm Cos\,x)\cdot dx = -\int_0^\pi (L2)\cdot dx = -\pi\cdot L2\ ^{**)};$$

und dasselbe Resultat findet man auch aus dem folgenden Beispiel.

---

*) Nimmt man das obere von den $\pm$ Zeichen, so unterbricht $L(1+Cos\,x)$ für $x=\pi$ sein Daseyn. Wendet man aber das Kennzeichen des VIII. Th. §. 93. an, so findet man sogleich, daß nichts desto weniger das Integral nicht zu den unterbrochenen gehört, also wirklich einen Werth hat. — Ganz analoges für $L(1-Cos\,x)$ an der unteren Grenze, wo $x=0$.

**) Für $b=\frac{1}{a}$ findet sich

$$\int_0^\pi L(1+b^2+2b\cdot Cos\,x)\cdot dx = \int_0^\pi L(1+a^2+2a\cdot Cos\,x)\cdot dx - 2\pi\cdot La,$$

Achtes Beispiel.

Sucht man $\int_0^\pi L(1+b\cdot Cos\,x)\cdot dx = Y_b$ auszuwerthen, wo b positiv oder negativ, aber an sich $\overline{\overline{<}}\,1$ vorausgesetzt wird, damit der Logarithme für alle Werthe von x stets wirklich reell bleibt, oder doch das Integral nie zu den unterbrochenen gehöre, — so hat man sogleich

$$\partial Y_b = \int_0^\pi \frac{Cos\,x}{1+b\cdot Cos\,x}\cdot dx = \frac{\pi}{b} - \frac{\pi}{b\cdot\sqrt{1-b^2}},$$

wo $\sqrt{1-b^2}$ ihren positiven Werth vorstellt; daraus findet sich aber, wenn man nach b integrirt,

$$Y_b = \pi\cdot log(1+\sqrt{1-b^2})+C,$$

wo wiederum $\sqrt{1-b^2}$ ihren positiven Werth vorstellt. Weil aber Y_b für $b=0$ offenbar selbst der Null gleich wird, so hat man zur Bestimmung der Konstante C die Gleichung

$$0 = \pi\cdot log\,2+C;$$

also hat man Y_b vollständig gefunden, nämlich

$$54)\qquad \int_0^\pi L(1\pm b\cdot Cos\,x)\cdot dx = \pi\cdot L\frac{1+\sqrt{1-b^2}}{2},$$

wo die Quadratwurzel ihren positiven Werth vorstellt.

Diese Gleichung geht für $b=1$ in die zu Ende des vorigen Beispiels erhaltene Gleichung über.

Daß die Gleichung auch gilt, wenn $-b$ statt b gesetzt wird, geht auch dann hervor, wenn man $x=\pi-z$ setzt.

Addirt man diese beiden Resultate in N. 54., so ergiebt sich noch für $b=1$,

---

während $-2\pi\cdot L\,a = +2\pi\cdot L\,b$ ist. Ist nun $a<1$, so ist $b>1$, und so kann man den einen der Werthe in N. 53. mittelst der vorstehenden Gleichung augenblicklich auch aus dem andern ableiten.

55) $\int_0^{\pi} L(Sin\,x)\cdot dx = -\pi\cdot L2 = 2\int_0^{\frac{1}{2}\pi} L(Sin\,x)\cdot dx$ *).

Neuntes Beispiel.

Es sey noch

$$\alpha)\quad \int_0^{\pi} \frac{Cos\,x}{Sin\,x}\cdot Arc\,tg.\frac{a\cdot Sin\,x}{1+a\cdot Cos\,x}\cdot dx = X_a$$

auszuwerthen.

Man hat

$$\beta)\qquad \partial X_a = \int_0^{\pi} \frac{Cos\,x}{1+a^2+2a\cdot Cos\,x}\cdot dx,$$

oder, weil

$$\frac{Cos\,x}{1+a^2+2a\cdot Cos\,x} = \frac{1}{2a} - \frac{1+a^2}{2a}\cdot\frac{1}{1+a^2+2a\cdot Cos\,x}$$

ist, noch

$$\gamma)\qquad \partial X_a = \frac{\pi}{2a} - \frac{1+a^2}{2a}\cdot\int_0^{\pi}\frac{1}{1+a^2+2a\cdot Cos\,x}\cdot dx.$$

Nun ist aber im Allgemeinen

$$\int\frac{1}{p+q\cdot Cos\,x}\cdot dx = \frac{1}{\sqrt{p^2-q^2}}\cdot\overset{1}{Cos}\,\frac{q+p\cdot Cos\,x}{p+q\cdot Cos\,x};$$

also ist das letztere Integral in γ.) zur Rechten

$$= \pm\frac{\pi}{1-a^2}$$

und dabei nothwendig positiv, weil $1+a^2+2a\cdot Cos\,x$ d. h. $(1+a\cdot Cos\,x)^2+a^2\cdot(Sin\,x)^2$ sowohl für einen positiven

---

*) Es hat nämlich $Sin\,x$ von $x=\frac{1}{2}\pi$ an bis $x=\pi$ hin genau dieselben Werthe, wie von $x=\frac{1}{2}\pi$ an bis $x=0$ hin.

Formell zeigt sich dasselbe, wenn man $\int_0^{\pi}$ zerlegt in $\int_0^{\frac{1}{2}\pi}+\int_{\frac{1}{2}\pi}^{\pi}$ und in dem 2ten dieser Integrale, nämlich in $\int_{\frac{1}{2}\pi}^{\pi} L(Sin\,x)\cdot dx$ dann $x=\pi-z$ setzt, wodurch dasselbe sogleich in $\int_0^{\frac{1}{2}\pi} L(Sin\,z)\cdot dz$ übergeht.

wie für einen negativen Werth von a stets positiv bleibt; so daß von dem Doppelzeichen das $(+)$ gilt, so oft a an sich (abgesehen vom Vorzeichen) <1 ist, während das $(-)$ Zeichen das richtige ist, so oft a an sich >1 ist (abgesehen vom Vorzeichen) *).

Man hat daher

$$\delta)\qquad \partial X_a = \left(1 \mp \frac{1+a^2}{1-a^2}\right)\cdot\frac{\pi}{2a},\quad \text{je nachdem}\quad \pm a \lesseqgtr 1 \quad \text{ist},$$

unter $\pm a$ den absoluten Werth von a verstanden (abgesehen vom Vorzeichen).

Ist nun $\pm a < 1$, so wird seyn

$$\varepsilon)\qquad \partial X_a = \pi\cdot\frac{a}{a^2-1};$$

folglich, wenn wieder nach a integrirt wird

$$\zeta)\qquad X_a = \frac{\pi}{2}\cdot log(a^2-1)+C.$$

Weil aber X_a für $a=+0$ der Null unendlich-nahe kommt, so hat man zur Bestimmung der Konstante C die Gleichung

$$0 = \frac{\pi}{2}\cdot log(-1)+C,$$

so daß (aus ζ.) hervorgeht

$$\eta)\qquad X_a = \frac{\pi}{2}\cdot L(1-a^2),$$

wenn $\pm a<1$ ist. — Ist dagegen $\pm a>1$, so wird (aus δ.)

$$\vartheta)\qquad \partial X_a = \frac{\pi}{a(1-a^2)},$$

also, wenn nach a integrirt wird,

*) Es kann aber nie $a=\pm 1$ gedacht werden, weil das vorgelegte Integral dann ein unterbrochenes wäre (S. VIII. Th. §§. 90. und 93.) und gar keinen Werth hätte.

$\varkappa$) $$X_a = \frac{\pi}{2} \cdot log \frac{a^2}{a^2-1} + C.$$

Die Konstante C muß nun natürlich auch aus einem solchen Werth von X_a bestimmt werden, in welchem a ebenfalls >1 ist, etwa aus $a = \infty$. — Für $a = \infty$ geht $\frac{a \cdot Sin\,x}{1+a \cdot Cos\,x}$ in $\frac{Sin\,x}{\frac{1}{a}+Cos\,x}$ d. h. in $Tg\,x$ über, und es ist daher für $a = \infty$, $Arc\,tg. \frac{a \cdot Sin\,x}{1+a \cdot Cos\,x} = x$, so lange x zwischen 0 und $\frac{1}{2}\pi$ liegt; dagegen ist derselbe $Arc\,tg.$, $= x-\pi$, so oft x zwischen $\frac{1}{2}\pi$ und π liegt (nach VIII. Th. Einleitg. §. 10.).

Zerlegt man daher das Integral X_a (für $a = \infty$ genommen) in die Summe der beiden Integrale

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{Cos\,x}{Sin\,x} \cdot x \cdot dx + \int_{\frac{1}{2}\pi}^{\pi} \frac{Cos\,x}{Sin\,x} \cdot (x-\pi) \cdot dx,$$

so zeigt sich das zweite dieser Integrale dem erstern gleich, sobald man $\pi - x = z$ setzt; und man erhält daher

$$X_a \text{ (für } a = \infty) = 2\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{Cos\,x}{Sin\,x} \cdot x \cdot dx.$$

Nun ist aber, wenn man theilweise integrirt,

$$\int \frac{Cos\,x}{Sin\,x} \cdot x \cdot dx = x \cdot log\,Sin\,x - \int log\,(Sin\,x) \cdot dx;$$

folglich ist (nach VIII. Th. §. 96.)

$$X_a \text{ (für } a = \infty) = -2\int_0^{\frac{1}{2}\pi} L(Sin\,x) \cdot dx^{*}) = -\int_0^{\pi} L(Sin\,x) \cdot dx$$

d. h. es ist (nach N. 55.)

---

*) Es ist für $x = \frac{1}{\infty}$, $\frac{Sin\,x}{x} = 1$, also $Sin\,x = x\frac{Sin\,x}{x} = x$; also ist auch für $x = +\frac{1}{\infty}$, $x \cdot L(Sin\,x) = x \cdot Lx = -\frac{1}{\infty}$ (nach VIII. Th. Einleitg. §. 16. N. 3.).

$$X_a = \pi \cdot L2 = \frac{\pi}{2} \cdot L4 \quad \text{für} \quad a = \infty .$$

Die Gleichung $\varkappa$.), wenn man in ihr L statt log setzt, geht dadurch über in

$$\pi \cdot L2 = \frac{\pi}{2} \cdot L1 + C$$

und liefert $C = \pi \cdot L2$, so daß man endlich (aus $\varkappa$.) erhält:

$$\lambda) \qquad X_a = \frac{\pi}{2} \cdot L \frac{4a^2}{a^2 - 1}, \quad \text{wenn} \quad \pm a > 1.$$

Man hat also gefunden:

$$\text{IX.} \quad \int_0^\pi \frac{Cos\, x}{Sin\, x} \cdot Arc\, tg. \frac{a \cdot Sin\, x}{1 + a \cdot Cos\, x} \cdot dx = \begin{cases} \frac{\pi}{2} \cdot L(1 - a^2), & \text{wenn} \quad a < 1 \\ \frac{\pi}{2} \cdot L \frac{4a^2}{a^2 - 1}, & \text{wenn} \quad a > 1, \end{cases}$$

wo a auch negativ seyn kann, wenn dann nur in den Bedingungs-Gleichungen ($a < 1$ und $a > 1$) unter a der absolute Werth gedacht wird.

Anmerkg. Integrirt man links in IX. theilweise, so erhält man

$$\left[L(Sin\, x) \times Arc\, tg. \frac{a \cdot Sin\, x}{1 + a \cdot Cos\, x} \right]_{\pi \div 0} - \int_0^\pi L(Sin\, x) \times \frac{a^2 + a \cdot Cos\, x}{1 + a^2 + 2a \cdot Cos\, x} \cdot dx.$$

Weil aber $\frac{a^2 + a \cdot Cos\, x}{1 + a^2 + 2a \cdot Cos\, x} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \frac{1 - a^2}{1 + a^2 + 2a \cdot Cos\, x}$ ist,

und der außerhalb des Integralzeichens befindliche Theil an beiden Grenzen der Null gleich wird *), so geht die Gleichung

---

*) Es ist nämlich für $x = +0$ und für $x = \pi - (+0)$, $Sin\, x = +0$, $Cos\, x = \pm 1$ und $Arc\, tg. \frac{a \cdot Sin\, x}{1 + a \cdot Cos\, x} = \pm 0$, und man erhält daher

IX., wenn man sie mit 2 multiplicirt, über in

$$-\int_0^\pi L(Sin\,x)\cdot dx + (1-a^2)\cdot\int_0^\pi \frac{L(Sin\,x)\cdot dx}{1+a^2+2a\cdot Cos\,x}\cdot dx$$

$$= \begin{cases} \pi\cdot L(1-a^2) \\ \pi\cdot L\dfrac{4a^2}{a^2-1}, \end{cases}$$

woraus (vermöge der N. 55.)

$$56)\int_0^\pi \frac{L(Sin\,x)}{1+a^2\pm 2a\cdot Cos\,x}\cdot dx = \begin{cases} \dfrac{\pi}{1-a^2}\cdot L\dfrac{1-a^2}{2}, \text{ wenn } a<1, \\ \dfrac{\pi}{a^2-1}\cdot L\dfrac{a^2-1}{2a^2}, \text{ wenn } a>1, \end{cases}$$

hervorgeht *), wo man sich a bloß positiv denken kann.

In dieser N. 56. geht die 2te Form aus der erstern hervor, und umgekehrt, sobald man $\frac{1}{a}$ statt a setzt. Geschieht dies aber in der obigen IX., so erhält man noch

$$\text{X.}\quad \int_0^\pi \frac{Cos\,x}{Sin\,x}\cdot Arc\,tg.\frac{Sin\,x}{a+Cos\,x}\cdot dx$$

$$= \begin{cases} \pi\cdot L\dfrac{2}{1-a^2}, \quad \text{wenn } a<1, \\ \dfrac{\pi}{2}\cdot L\dfrac{a^2-1}{a^2}, \quad \text{wenn } a>1. \end{cases}$$

---

an beiden Grenzen als Werth dieses Theiles $\pm 0\cdot L(+0)$, welches (nach VIII. Th. Einleitg. §. 16. N. 3.) $= \pm 0$ ist.

Das Integral selbst ist an den Grenzen (nach VIII. Th. §§. 92. 93.) kein unterbrochenes. Wir haben aber hier wie so oft schon, ± 0 geschrieben um $\pm\frac{1}{\infty}$ damit auszudrücken, bloß weil der Druck sich bequemer macht und Mißverständnisse nicht möglich sind.

*) Daß die Formel 56. auch noch gilt, wenn $-a$ statt a gesetzt wird, erhellet daraus, daß $\int_0^\pi \frac{L(Sin\,x)}{1+a^2-2a\cdot Cos\,x}\cdot dx$, wenn $\pi - x = z$, also $x = \pi - z$ gesetzt wird, sogleich in $\int_0^\pi \frac{L(Sin\,z)}{1+a^2+2a\cdot Cos\,z}\cdot dz$ übergeht.

Zehntes Beispiel.

Es werde noch gesucht der Werth X_a des bestimmten Integrals

$$\int_0^{2\pi} \frac{a \cdot e^{x \cdot i}}{a \cdot e^{x \cdot i} - A \cdot e^{r \cdot i}} \cdot dx,$$

welches für $a = A$ zu den unterbrochenen gehört, so daß die Fälle $a < A$ und $a > A$ von einander unterschieden werden müssen; dabei wollen wir a wie A stets positiv oder Null voraussetzen.

Differenziirt man nach a, so erhält man

$$1) \qquad \partial X_a = \int_0^{2\pi} \frac{-A \cdot e^{(r+x) \cdot i}}{(a \cdot e^{x \cdot i} - A \cdot e^{r \cdot i})^2} \cdot dx.$$

Das allgemeine Integral zur Rechten wird nun gefunden, wenn man $a \cdot e^{x \cdot i} - A \cdot e^{r \cdot i} = z$ setzt, so daß dann $a \cdot e^{x \cdot i} \cdot i \cdot dx = dz$ wird und das gedachte allgemeine Integral übergeht in

$-\frac{A}{a \cdot i} \cdot e^{r \cdot i} \cdot \int \frac{1}{z^2} \cdot dz$ d. h. in $+\frac{A}{a \cdot i} \cdot \frac{e^{r \cdot i}}{a \cdot e^{x \cdot i} - A \cdot e^{r \cdot i}}$. Und weil nun $e^{x \cdot i}$ immer denselben Werth 1 bekommt, ob man $x = 2\pi$ oder $x = 0$ setzt, so folgt (aus 1.)

$$2) \qquad \partial X_a = 0, \text{ d. h. } X_a = C,$$

wo C von a ganz unabhängig ist und für irgend einen bestimmten Werth von a noch näher bestimmt werden muß. Und da für $a = 0$ offenbar auch $X_a = 0$ wird, so findet sich

$$3) \qquad \int_0^{2\pi} \frac{a \cdot e^{x \cdot i}}{a \cdot e^{x \cdot i} - A \cdot e^{r \cdot i}} \cdot dx = 0, \text{ wenn } a < A.$$

Und weil für $a = \infty$ der Ausdruck unter dem Integralzeichen des vorgelegten Integrals (wenn man Zähler und Nenner durch a dividirt) offenbar $= 1$, der Werth X_a für $a = \infty$, also offenbar $= \int_0^{2\pi} 1 \cdot dx$ d. h. 2π wird, so hat man

4) $$\int_0^{2\pi} \frac{a \cdot e^{x \cdot i}}{a \cdot e^{x \cdot i} - A \cdot e^{r \cdot i}} \cdot dx = 2\pi, \quad \text{wenn} \quad a > A \text{ *)}.$$

Ganz eben so findet man aber auch

5) $$\int_0^{2\pi} \frac{a \cdot e^{x \cdot i}}{a \cdot e^{x \cdot i} + A \cdot e^{r \cdot i}} \cdot dx = \begin{matrix} 0 \\ 2\pi \end{matrix}, \quad \text{je nachdem} \quad a \begin{matrix} < \\ > \end{matrix} A;$$

und daraus geht zu gleicher Zeit hervor, daß die Formeln 3. und 4. gelten, es mag a positiv oder negativ seyn, wenn nur der absolute Werth von a in 3.) $<A$, in 4.) dagegen $>A$ ist.

Anmerkg. Wir fanden in diesem Beispiele, wo die zu integrirende Funktion eine Funktion von $e^{x \cdot i}$ gewesen ist, $\partial X_a = 0$ und zwar deshalb, weil das allgemeine Integral dieser, nach a differenziirten Funktion von $e^{x \cdot i}$, wiederum eine Funktion von $e^{x \cdot i}$ wurde, die an den beiden Grenzen d. h. für $x = 0$ und für $x = 2\pi$ stets einen und denselben Werth annimmt. — Dasselbe wäre eingetreten, d. h. ∂X_a wäre noch $= 0$ geworden, wenn X_a den Werth desselben Integrals vorgestellt hätte, aber zwischen den Grenzen $-\pi$ und $+\pi$ genommen. Es ist aber augenfällig, daß dasselbe Ereigniß bei jeder Funktion von $a \cdot e^{x \cdot i}$ eintreten muß, wenn sie nur eindeutig ist.

Um dies näher zu zeigen, sey zu finden

1) $\int_{-\pi}^{+\pi} F_z \cdot dx = X_a$, während 2) $z = s + a \cdot e^{x \cdot i}$ ist,

wobei wir a positiv oder 0 voraussetzen und s entweder reell oder imaginär und von der Form $A \cdot e^{r \cdot i}$, wo A

---

*) Dieselben beiden Resultate 3. und 4. bekommt man, wenn man die Funktion unter dem Integralzeichen (des vorgelegten Integrals) einmal nach Potenzen von $\frac{a}{A}$, dann auch nach Potenzen von $\frac{A}{a}$ entwickelt, je nachdem $\frac{a}{A}$ oder $\frac{A}{a}$ kleiner als 1 ist und dann nach x integrirt, während die Reihen convergent sind.

positiv oder Null. Diese letztere Form schließt den Fall, wo s reell, positiv oder negativ ist in sich, indem man $x = 0$ oder $x = \pi$ sich denkt. Man hat nun (aus 1.)

3) $\partial X_a = \int_0^{2\pi} (\partial F_z \cdot \partial z_a) \cdot dx$

und (aus 2.) $\partial z_a = e^{x \cdot i}$ und $\partial z_x = a \cdot i \cdot e^{x \cdot i}$, also

4) $\partial z_a = \frac{1}{a \cdot i} \cdot \partial z_x$.

Substituirt man daher in 3. statt ∂z_a diesen Werth und bedenkt man, daß $\int (\partial F_z \cdot \partial z_x) \cdot dx = \int \partial F_z \cdot dz = F_z$ ist, und daß z jedesmal in $s - a$ übergeht, man mag $x = -\pi$ oder $x = +\pi$ setzen, so findet sich sogleich

5) $\partial X_a = \frac{1}{a \cdot i} \cdot \int_{-\pi}^{+\pi} (F_z \cdot \partial z_x) \cdot dx = \frac{1}{a \cdot i} \cdot (F_{s-a} - F_{s-a})$;

also, wenn F_z eindeutig ist

6) $\partial X_a = 0$, d. h. 7) $X_a = C$,

wo C von a unabhängig ist. Man hat also

I. $\int_{-\pi}^{+\pi} F_z \cdot dx = C$, wenn $z = s + a \cdot e^{x \cdot i}$,

wo C von a unabhängig ist und noch näher bestimmt werden muß.

Weil aber dasselbe bestimmte Integral für $a = 0$ in

$$\int_{-\pi}^{\pi} F_s \cdot dx = F_s \cdot \int_{-\pi}^{\pi} 1 \cdot dx = 2\pi \cdot F_s$$

übergeht, so ist dies der Werth der Konstante C für alle die Werthe von a, welche von 0 an stetig wachsend bis zu dem Werthe $a = A$ fortgehen, für welchen das vorgelegte Integral zum ersten Male ein unterbrochenes wird. — Man hat daher für alle diese Werthe von a,

II. $\int_{-\pi}^{\pi} F_{s + a \cdot e^{x \cdot i}} \cdot dx = 2\pi \cdot F_s$

und (für $s = 0$)

III. $\int_{-\pi}^{\pi} F_{a \cdot e^{x \cdot i}} \cdot dx = 2\pi \cdot F_0,$

wenn nur (in I.—III.) F_z eindeutig ist.

Für die Werthe von a, welche größer als A sind, und für welche die Formeln II. und III. nicht mehr gelten, muß man die Konstante C in I. für einen bestimmten Werth von a auswerthen, der ebenfalls $>A$ ist und der sich unter der neuen stetigen Reihe der Werthe von a befindet, die von A an beginnt *).

---

*) Nimmt man $F_z = z^m$ und m positiv oder negativ ganz, so ist die Bedingung der Eindeutigkeit von F_z erhält; also hat man nach II.

1) $\int_{-\pi}^{\pi} (s + a \cdot e^{x \cdot i})^m \cdot dx = 2\pi \cdot s^m.$

Ist nun m positiv ganz, so gilt diese Gleichung 1.) für jeden Werth von a (welcher jedoch hier immer positiv oder Null vorausgesetzt worden, so wie A auch, während $s = A \cdot e^{r \cdot i}$ ist). — Ist aber m negativ ganz, so ist das Integral zur Linken in 1.) ein unterbrochenes, sobald $a = A$ wird; also gilt die Gleichung 1.) jetzt (für ein negatives ganzes m) nur noch so lange $a < A$ ist. Für $a > A$ findet man aber, wenn man in I. die Konstante C (für $F_z = z^m$, m negativ ganz und $z = A \cdot e^{r \cdot i} + a \cdot e^{x \cdot i}$) auf's Neue bestimmt, — diese Konstante C für $a = \infty$ offenbar $= 0$; also hat man

2) $\int_{-\pi}^{\pi} (s + a \cdot e^{x \cdot i})^m \cdot dx = 0,$ $\left\{ \begin{array}{c} \text{wenn m negativ ganz} \\ \text{und } a > A \text{ ist.} \end{array} \right\}$

Für $A = s = 0$ fallen aber doch beide Resultate 1.) und 2.) wieder in eines zusammen, nämlich in

3) $\int_{-\pi}^{\pi} (a \cdot e^{x \cdot i})^m \cdot dx = 0,$ $\left\{ \begin{array}{c} \text{wenn m positiv} \\ \text{oder negativ ganz.} \end{array} \right\}$

Ist endlich m positiv oder negativ gebrochen und $F_z = z^m$, so ist F_z nicht mehr eindeutig, also ist auch jetzt $F_{s-a} - F_{s-a}$ nicht mehr nothwendig $= 0$, weil Minuend und Subtrahend dieser Differenz verschiedene Werthe vorstellen können. Die Gleichungen 1.—3.) sind daher jetzt nicht mehr nothwendig wahr. — Daß sie aber nun wirklich nicht mehr wahr sind, lehrt die direkte Auffindung des Integrals 3.) zur Linken für den Fall, daß m gebrochen.

Nimmt man die Integrale statt zwischen den Grenzen $-\pi$ und $+\pi$, lieber zwischen den Grenzen 0 und 2π, so erhält man für die neuen Integrale dieselben Werthe unter denselben Voraussetzungen, so lange nur F_z wirklich eindeutig ist. Dies läßt sich auch vermöge der nachstehenden Betrachtungen voraussehen. Es ist nämlich

a) $$\int_{-\pi}^{\pi} f_x \cdot dx = \int_{-\pi}^{0} f_x \cdot dx + \int_{0}^{\pi} f_x \cdot dx;$$

setzt man aber in dem ersteren der Integrale zur Rechten $x-2\pi$ statt x, so geht solches über in $\int_{\pi}^{2\pi} f_{x-2\pi} \cdot dx$. So wie also

b) $$f_{x-2\pi} = f_x$$

vorausgesetzt wird, so ist auch allemal (aus a.)

c) $$\int_{-\pi}^{\pi} f_x \cdot dx = \int_{\pi}^{2\pi} f_x \cdot dx + \int_{0}^{\pi} f_x \cdot dx = \int_{0}^{2\pi} f_x \cdot dx.$$

Die Bedingung b.) ist aber hier erfüllt gewesen, wo $f_x = F_z$ und $z = s + a \cdot e^{x \cdot i}$ vorausgesetzt war, eben weil

---

Wir wollen zu dem Ende alle Werthe der Potenz $(a \cdot e^{x \cdot i})^m$ angeben, nämlich $a^m \cdot e^{2m\nu\pi \cdot i} \cdot e^{mx \cdot i}$, wo a^m ihren positiven Werth vorstellt und ν sowohl 0 als auch alle positiven und negativen ganzen Zahlen bedeutet. Dann findet sich

$$\int_{-\pi}^{\pi} (a \cdot e^{x \cdot i})^m \cdot dx = a^m \cdot e^{2m\nu\pi \cdot i} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} e^{mx \cdot i} \cdot dx;$$

also, wenn man die letztere Integration ausführt,

4) $$\int_{-\pi}^{\pi} (a \cdot e^{x \cdot i})^m \cdot dx = \frac{2}{m} \cdot a^m \cdot \mathit{Sin}\, m\pi \cdot e^{2m\nu\pi \cdot i},$$

wo rechts eben so viele Werthe sind, als links gesucht wurden, während unter diesen Werthen keiner von a unabhängig wird, wenn nicht m ganz ist, und der Werth in Null übergeht. — Hebt man links von der zu integrirenden Funktion einen bestimmten Werth heraus, etwa den Werth $a^m \cdot e^{mx \cdot i}$ (wo die Potenz a^m ihren positiven Werth vorstellt), so findet sich

5) $$\int_{-\pi}^{\pi} a^m \cdot e^{mx \cdot i} \cdot dx = \frac{2}{m} \cdot a^m \cdot \mathit{Sin}\, m\pi.$$

$e^{-2\pi \cdot i} = Cos 2\pi - i \cdot Sin 2\pi = 1$ ist; so lange nur F_z eindeutig bleibt *).

Setzte man in der III. $F_z = \frac{f_z}{z^m} = z^{-m} \cdot f_z$, wo f_z für $z = 0$ nicht mehr der Null gleich werden soll, so findet man solche unanwendbar, weil man zur Rechten die Form $\frac{1}{0}$ bekommt. Für diesen Fall kann man sich aber leicht eine brauchbare Formel verschaffen. Integrirt man nämlich $z^{-m} \cdot f_z$ theilweise nach x, zwischen den Grenzen $-\pi$ und $+\pi$, so erhält man, wenn nur f_z eindeutig ist, sogleich die Reduktions-Formel

$$\int_{-\pi}^{\pi} (z^{-m} \cdot f_z) \cdot dx = \frac{1}{m} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} (z^{-m+1} \cdot \partial f_z) \cdot dx.$$

Setzt man hier herein nach und nach m—1, m—2, ꝛc. 2, 1 statt m und gleichzeitig bezüglich ∂f_z, $\partial^2 f_z$, ... $\partial^{m-2} f_z$, $\partial^{m-1} f_z$ statt f_z und multiplicirt man die entstehenden Gleichungen, so erhält man

---

*) Ist F_z nicht mehr eindeutig, so findet sich zwar noch immer

$$f_{x-2\pi} = F_z, \quad \text{sobald} \quad f_x = F_z \quad \text{ist;}$$

aber aus diesen beiden Gleichungen folgt nun nicht nothwendig $f_{x-2\pi} = f_x$, weil F_z in jeder derselben einen andern seiner Werthe vorstellen kann.

Und in der That, wenn z. B. $f_x = F_z = z^m$, dabei m gebrochen und $s = 0$, also $z = a \cdot e^{x \cdot i}$ gedacht wird, so ist

$$f_x = (a \cdot e^{x \cdot i})^m \quad \text{und auch} \quad f_{x-2\pi} = (a \cdot e^{x \cdot i})^m.$$

Wird aber unter f_x etwa der einfachste Werth $a^m \cdot e^{mx \cdot i}$ der Potenz $(a \cdot e^{x \cdot i})^m$ verstanden, so findet sich sogleich

$$f_{x-2\pi} = a^m \cdot e^{m(x-2\pi)i} = a^m \cdot e^{mx \cdot i} \cdot e^{-2m\pi \cdot i},$$

während der letztere Faktor zur Rechten nicht $= 1$, die Funktion $f_{x-2\pi}$ also nun in der That ein anderer Werth derselben Potenz $(a \cdot e^{x \cdot i})^m$ ist.

$$\int_{-\pi}^{\pi}(z^{-m}\cdot f_z)\cdot dx = \frac{1}{m!}\cdot\int_{-\pi}^{\pi}\partial^m f_z\cdot dx,\quad \text{wo}\quad z = a\cdot e^{x\cdot i}.$$

Da nun dieses letztere Integral (nach III.) $= 2\pi\cdot\partial^m f_0$ ist, so folgt

$$\text{IV.}\qquad \int_{-\pi}^{\pi}(a\cdot e^{x\cdot i})^{-m}\cdot f_{a\cdot e^{x\cdot i}}\cdot dx = \frac{2\pi}{m!}\cdot\partial^m f_0,$$

für alle Werthe von a, welche kleiner sind als derjenige, für den das Integral ein unterbrochenes ist; und unter der Voraussetzung, daß f_z nur eindeutig.

§. 19.

Fortsetzung der vierten Methode.

In dem nachfolgenden Beispiel geht man von dem bestimmten Integral X_a nicht bloß zu Differenzial-Koeffizienten der ersten, sondern auch zu denen der 2ten Ordnung über, weil letztere erst als bekannt angesehen werden; man integrirt dann den Werth von $\partial^2 X_a$ erst einmal nach a, — oder den Werth von $\partial^{1,1}X_{a,b}$ nach b, — um den Werth von ∂X_a zu erhalten, und bestimmt die Konstante aus dem für einen bestimmten Werth von a oder b bekannten Werthe von ∂X_a; hierauf integrirt man noch einmal den Werth von ∂X_a nach a, um das gesuchte Integral X_a zu bekommen und bestimmt die Konstante aus dem für einen bestimmten Werth von a bekannten Werthe von X_a.

Es sey z. B. auszuwerthen

$$1)\qquad \int_0^{\infty}\frac{e^{-bx}\cdot(\mathit{Sin}\,ax)^2}{x^2}\cdot dx = X_a,$$

so erhält man

$$2)\qquad \partial X_a = \int_0^{\infty}\frac{e^{-bx}\cdot\mathit{Sin}\,2ax}{x}\cdot dx$$

und

$$3)\qquad \partial^2 X_a = 2\int_0^{\infty}e^{-bx}\cdot\mathit{Cos}\,2ax\cdot dx.$$

Dies letztere giebt (nach §. 4. N. 9.), wenn b positiv ist,

$$4)\qquad \partial^2 X_a = \frac{2b}{b^2+4a^2};$$

folglich ist, wenn man nach a integrirt,

$$5)\qquad \partial X_a = \frac{1}{Tg}\frac{2a}{b}+C,$$

wo, wenn man *Arc tg.* statt $\frac{1}{Tg}$ nimmt (S. VIII. Th. Einl. §. 10.) $C=0$ seyn muß, weil $\partial X_a = 0$ wird für $a=0$. Also hat man

$$6)\qquad \partial X_a = Arc\,tg.\frac{2a}{b},$$

folglich

$$7)\qquad X_a = \int 1\cdot Arc\,tg.\frac{2a}{b}\cdot da + C'.$$

Integrirt man hier theilweise, so erhält man

$$8)\qquad X_a = a\cdot Arc\,tg.\frac{2a}{b} - \int \frac{2ba}{b^2+4a^2}\cdot da$$

$$= a\cdot Arc\,tg.\frac{2a}{b} - \tfrac{1}{4}b\cdot log(4a^2+b^2)+C'.$$

Und weil $X_a = 0$ wird für $a=0$, so hat man zur Bestimmung der Konstante C', die Gleichung

$$9)\qquad 0 = -\tfrac{1}{4}b\cdot log\, b^2 + C'.$$

Also ist gefunden, wenn nur b positiv ist und a beliebig reell:

$$56^{bis}.\quad \int_0^\infty \frac{e^{-bx}\cdot(Sin\, ax)^2}{x^2}\cdot dx$$

$$= a\cdot Arc\,tg.\frac{2a}{b} + \tfrac{1}{4}b\cdot L\frac{b^2}{b^2+4a^2}.$$

Und diese Gleichung gilt auch für $b=+0$, weil sie dann in

$$\int_0^\infty \left(\frac{Sin\, ax}{x}\right)^2\cdot dx = \pm\tfrac{1}{2}a\pi, \quad \text{je nachdem } a \begin{Bmatrix}\text{positiv}\\ \text{negativ}\end{Bmatrix},$$

übergeht, welche wir bereits §. 18. N. 52. gefunden haben.

Man konnte auch die Gleichung 2. nach b differenziiren, und man erhielt (nach §. 4. N. 8.)

3'.) $$\partial^{1,1}X_{a,b} = -\int_0^\infty e^{-bx} \cdot \mathit{Sin}\, 2ax \cdot dx$$

(nach §. 4. N. 8.) $$= \frac{-2a}{b^2+4a^2};$$

folglich, wenn man nach b wieder integrirt,

4') $$\partial X_a = -\mathit{Arc\,tg.}\frac{b}{2a} + C.$$

Weil aber nach N. 2. und nach §. 18. N. 51. für $b = 0$

$$\partial X_a = \pm\tfrac{1}{2}\pi \text{ wird, je nachdem } a\begin{Bmatrix}\text{positiv}\\ \text{negativ}\end{Bmatrix},$$

so hat man zur Bestimmung der Konstante C

5') $$\pm\tfrac{1}{2}\pi = C, \text{ je nachdem } a\begin{Bmatrix}\text{positiv}\\ \text{negativ}\end{Bmatrix};$$

folglich geht die 4') über in

6') $$\partial X_a = \pm\tfrac{1}{2}\pi - \mathit{Arc\,tg.}\frac{b}{2a}, \text{ je nachdem } a\begin{Bmatrix}\text{positiv}\\ \text{negativ}\end{Bmatrix},$$

und dies ist allemal $= \mathit{Arc\,tg.}\frac{2a}{b}$,

es mag a positiv oder negativ seyn, so daß man jetzt genau das Resultat 6.) wieder hat, und nun, wie oben zu sehen, weiter fortschreiten kann.

Drittes Kapitel.

Verschiedene andere Methoden zur Auswerthung bestimmter Integrale.

§. 20.

Fünfte Methode.

Zuweilen gelingt es, zwischen dem unbekannten (etwa durch y bezeichneten) Werthe eines bestimmten Integrals eine noch nicht aufgelöste Gleichung zu finden, entweder eine Ur-Gleichung (d. h. eine algebraische oder transcendente) oder eine Differenzial-Gleichung. — Die Auflösung dieser Gleichung (welche man, in dem Falle, wo die Gleichung eine Differenzial-Gleichung ist, die Integration derselben nennt), führt dann zu dem Werthe des Unbekannten (y).

Betrachten wir hier zuerst einige Beispiele, in denen die gefundene Gleichung eine Urgleichung (d. h. keine Differenzial-Gleichung) ist.

Erstes Beispiel.

Gesetzt man soll den Werth von $\int_0^\infty \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}} \cdot dx$ *) finden, so kann man zuerst dasselbe Integral allgemeiner auffassen, also betrachten das bestimmte Integral $\int_0^\infty e^{-x} \cdot x^{p-1} \cdot dx$ (in welchem das vorgelegte Integral, für $p = \frac{1}{2}$ steckt und), welches

*) Dieses Beispiel ist ein besonderer Fall der Gamma-Funktion (d. h. des Euler'schen Integrals zweiter Klasse), nämlich $\Gamma_{\frac{1}{2}}$, dessen Werth also schon im VIII. Th. §. 117. gefunden ist.

wir früher im VIII. Th. §. 116. durch Γ_p bezeichnet haben. — Man betrachtet also das Integral

$$\alpha) \qquad \Gamma_p = \int_0^\infty e^{-x} \cdot x^{p-1} \cdot dx = \int_{+0}^1 \left(L\frac{1}{z}\right)^{p-1} \cdot dz,$$

(welche letztere Form man erhält, wenn $e^{-x} = z$ gesetzt wird) wo aber p positiv gedacht seyn muß, damit das durch Γ_p bezeichnete Integral convergent ist, d. h. wirklich einen Werth hat.

Indem wir nun von dieser Gamma-Funktion noch nichts als bekannt voraussetzen, versuchen wir es, zwischen verschiedenen Werthen derselben, Gleichungen uns zu verschaffen.

Setzt man zu dem Ende (in α.) $x = kv$, so erhält man sogleich

$$\beta) \qquad \int_0^\infty e^{-kx} \cdot x^{p-1} \cdot dx = \frac{\Gamma_p}{k^p},$$

wo auch k (so wie p) positiv seyn muß, damit die neuen Grenzen wieder 0 und $+\infty$ werden und damit auch dieses Integral zu den convergenten gehöre.

Wird nun $1+y$ statt k gesetzt (wo $1+y$ positiv seyn muß) und wird links und rechts mit y^{q-1} multiplicirt, und dann nach y integrirt, zwischen $y = 0$ und $y = \infty$ (für welche Werthe von y die Summe $1+y$, die statt k gesetzt wird, wirklich stets positiv ist), so ergiebt sich

$$\gamma) \int_0^\infty e^{-x} \cdot x^{p-1} \left(\int_0^\infty e^{-xy} \cdot y^{q-1} \cdot dy\right) \cdot dx = \Gamma_p \cdot \int_0^\infty \frac{y^{q-1}}{(1+y)^p} \cdot dy.$$

Nun ist aber das eingeklammerte Integral links (in γ.)

$$= \frac{\Gamma_q}{x^q} \quad \text{(nach } \beta.\text{)},$$

so daß man zur Linken (in γ.) sogleich $\Gamma_p \cdot \Gamma_{p-q}$ erhält; folglich hat man nun (aus γ.)

$$\delta) \qquad \Gamma_q \cdot \Gamma_{p-q} = \Gamma_p \cdot \int_0^\infty \frac{y^{q-1}}{(1+y)^p} \cdot dy.$$

Setzt man nun hier zunächst $p = 1$ und $q = c < 1$,

so erhält man sogleich, — weil $\Gamma_1 = \int_0^\infty e^{-x} \cdot dx = 1$ und auch (nach §. 9. N. 18.) noch $\int_0^\infty \frac{y^{c-1}}{1+y} \cdot dy = \frac{\pi}{Sin\, c\pi}$ ist —,

$$\varepsilon) \qquad \Gamma_c \cdot \Gamma_{1-c} = \frac{\pi}{Sin\, c\pi} \text{ *)}.$$

Aus dieser Relation erhält man nun für $c = \frac{1}{2}$ augenblicklich die Gleichung

$$\zeta) \qquad (\Gamma_{\frac{1}{2}})^2 = \pi, \quad \text{woraus} \quad \Gamma_{\frac{1}{2}} = \sqrt{\pi} \text{ **)}$$

hervorgeht, d. h.

$$57) \qquad \Gamma_{\frac{1}{2}} = \int_0^\infty \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}} \cdot dx = \int_{+0}^1 \left(L\frac{1}{z}\right)^{-\frac{1}{2}} \cdot dz = \sqrt{\pi}.$$

Man sieht hieraus, wie man auf dem Wege der Integral-Rechnung mit verhältnißmäßig viel Kraftaufwand zu demselben Resultate gelangt, welches in der Betrachtung der Faktoriellen als ein ganz specieller Fall von elementaren und doch sehr allgemeinen Untersuchungen hervorgegangen ist.

Anmerkg. 1. Noch direkter würde man eine Gleichung zwischen Γ_a, Γ_b, rc. wie folgt erhalten. — Multiplicirt man nämlich

$$1) \quad \Gamma_a = \int_0^\infty e^{-x} \cdot x^{a-1} \cdot dx \quad \text{und} \quad 2) \quad \Gamma_b = \int_0^\infty e^{-y} \cdot y^{b-1} \cdot dy$$

---

*) Da im VIII. Th. §. 117. gezeigt worden, daß $\Gamma_c = (c-1)!$ ist, so fällt diese Gleichung (ε.) mit der Gleichung

$$(c-1)!\,(-c)! = \frac{\pi}{Sin\, c\pi} \qquad \text{(VIII. Th. §. 105. XI.)}$$

zusammen, und leitet sich also von dorther unmittelbar ab.

**) Weil $\Gamma_c = (c-1)!$ anerkannt ist, so ist dieses Resultat 57. von der XII. des §. 105. des VIII. Th., nämlich von

$$(-\tfrac{1}{2})! = \sqrt{\pi}$$

nicht mehr verschieden, und würde sich also von dorther am einfachsten abgeleitet haben.

mit einander, so erhält man

3) $$\Gamma_a \cdot \Gamma_b = \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-(x+y)} \cdot x^{a-1} \cdot y^{b-1} \cdot dx \cdot dy,$$

wo es einerlei ist, in welcher Ordnung man integrirt. Dieses Doppel-Integral ist nun die Summe der unendlich mal unendlich vielen Werthe, die aus dem Differenzial-Ausdruck (welcher unendlich-klein von der 2ten Ordnung ist) hervorgehen, wenn man dem x alle um dx verschiedene Werthe giebt von 0 bis ∞, und für jeden Werth von x auch noch dem y alle um dy verschiedene Werthe giebt von 0 bis ∞. — Führt man nun statt der Veränderlichen x und y, neue Veränderliche r und z so ein, daß $x+y=r$ und $\frac{x}{y}=\frac{z}{1-z}$ $\left(\text{oder } = \frac{1-z}{z}\right)$ wird, so wird man alle Paare von Werthen von x und y erhalten, wenn man dem z alle Werthe von 0 bis 1, für jeden Werth von z aber dem r wiederum alle Werthe von 0 bis ∞ giebt. Aus $x+y=r$ und $\frac{x}{y}=\frac{z}{1-z}$ folgt aber $x=rz$ und $y=r(1-z)$; führt man also erst r statt y ein mittelst der Gleichung $x+y=r$, so daß $dy=dr$ wird, und dann in dem unbestimmten Doppel-Integral nach r und nach x, statt x den neuen Veränderlichen z ein, mittelst der Gleichung $x=rz$, so daß $dx=r\cdot dz$ wird, so hat man $dx\cdot dy = r\cdot dr\cdot dz$, und man erhält (aus 3.)

$$\Gamma_a \cdot \Gamma_b = \int_0^\infty \int_0^1 e^{-r} \cdot r^{a+b-1} \cdot z^{a-1} \cdot (1-z)^{b-1} \cdot dr \cdot dz$$

d. h.

4) $$\Gamma_a \cdot \Gamma_b = \int_0^\infty e^{-r} \cdot r^{a+b-1} \cdot dr \times \int_0^1 z^{a-1}(1-z)^{b-1} \cdot dz.$$

Weil aber das erstere dieser beiden Integrale zur Rechten nach der Annahme der Bezeichnung nichts anders als Γ_{a+b} ist, so geht diese Gleichung 4.) über in

5) $$\frac{\Gamma_a \cdot \Gamma_b}{\Gamma_{a+b}} = \int_0^1 z^{a-1} \cdot (1-z)^{b-1} \cdot dz = \int_0^1 z^{b-1} \cdot (1-z)^{a-1} \cdot dz,$$

welche Gleichung auch so geschrieben werden kann

$$6)\qquad \frac{\Gamma_a\cdot\Gamma_b}{\Gamma_{a+b}} = \Phi_{a,b} = \Phi_{b,a} \qquad \text{(Vgl. Anmerkg. zu §. 11.).}$$

Die Gleichung 5. ist aber die obige Gleichung $\delta.$, sobald man rechts $z = \frac{1}{1+x}$ setzt, wodurch man noch erhält

$$7)\qquad \frac{\Gamma_a\cdot\Gamma_b}{\Gamma_{a+b}} = \int_0^\infty \frac{x^{a-1}}{(1+x)^{a+b}}\cdot dx = \int_0^\infty \frac{x^{b-1}}{(1+x)^{a+b}}\cdot dx.$$

Anmerkg. 2. Hätte man die Theorie der reellen (gebrochenen) Faktoriellen und Fakultäten nicht vorausgesetzt, welche zu gleicher Zeit alle Eigenschaften der Gamma-Funktionen (nach VIII. Th. §. 117.) in sich schließt, so würde man aus der hier so eben gefundenen Gleichung (in welcher a und b ganz oder gebrochen aber positiv gedacht sind), nämlich aus

$$\text{I.}\qquad \frac{\Gamma_a\cdot\Gamma_b}{\Gamma_{a+b}} = \Phi_{a,b}$$

$$\text{d. h.} = \int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1}\cdot dx = \int_0^\infty \frac{x^{a-1}}{(1+x)^{a+b}}\cdot dx$$

ebenfalls einige der wichtigsten Eigenschaften der Gamma-Funktionen haben ableiten können, indem man alle die Fälle aufsucht, in denen sich das Integral zur Rechten auswerthen läßt. Es ist dies aber der Fall:

1) wenn $a+b = 1$; dies giebt die in der obigen Gleichung $\varepsilon.$) ausgesprochene Eigenschaft, nämlich

$$\text{II.}\qquad \Gamma_a\cdot\Gamma_{1-a} = \frac{\pi}{Sin\, a\pi} \quad \text{und (für } a = \tfrac{1}{2}\text{)} \quad \Gamma_{\frac{1}{2}} = \sqrt{\pi};$$

2) wenn $b = 1$, also $\Phi_{a,b} = \int_0^1 x^{a-1}\cdot dx = \frac{1}{a}$ ist; dies führt zu der Eigenschaft

$$\text{III.}\qquad \Gamma_{a+1} = a\cdot\Gamma_a,$$

woraus, wenn man statt a nach und nach $a+1$, $a+2$, $a+3$, $\cdots$,

zuletzt $a+n$ setzt und alle entstehenden Gleichungen mit einander multiplicirt (wo n positiv ganz gedacht wird) noch

IV. $\Gamma_{a+n+1} = \Gamma_{a+1} \cdot (a+n)^{n|-1} = \Gamma_{a+1} \cdot (a+1)^{n|1}$

hervorgeht; diese Gleichung wird, wenn a und n positiv ganz sind mit Zuziehung des §. 12. N. 31. auch die Form annehmen

$$1^{a+n|1} = 1^{a|1} \cdot (1+a)^{n|1},$$

welches eine in die Augen fallende Eigenschaft der Produkte äquidifferenter Faktoren ist.

Man kann sich auch der Gleichung I.) zur Auswerthung neuer bestimmter Integrale bedienen. — Nimmt man $-(a-1) = b-1$ d. h. $a+b = 2$, so verwandelt sich das Integral zur Rechten (in I.) in $\int_0^1 \left(\frac{x}{1-x}\right)^{a-1} \cdot dx$ und kann rational gemacht werden, wenn a von der Form $\frac{m}{n}$ und gebrochen ist. Ist also $a = 1+\frac{m}{n}$ und $b = 1-\frac{m}{n}$, also $a+b = 2$ und $\Gamma_{a+b} = \Gamma_2 = 1$, so wird die Gleichung I. übergehen in

V. $$\Gamma_{1+\frac{m}{n}} \cdot \Gamma_{1-\frac{m}{n}} = \int_0^1 \left(\frac{x}{1-x}\right)^{\frac{m}{n}} \cdot dx = n \cdot \int_0^\infty \frac{v^{m+n-1}}{(1+v^n)^2} \cdot dv,$$

welches Integral zur Rechten rational ist und für gegebene Werthe von m und n durch Zerlegung in Partialbrüche zuerst allgemein und dann auch zwischen den Grenzen 0 und ∞ gefunden werden kann; dabei ist $\frac{m}{n} < 1$ vorausgesetzt. — Man kann aber nun aus der Gleichung V. dieses bestimmte Integral ohne Weiteres finden. Nach III. ist nämlich $\Gamma_{1+\frac{m}{n}} = \frac{m}{n} \cdot \Gamma_{\frac{m}{n}}$; also geht die Gleichung V. (vermöge der Gleichung II.) über in

VI. $$\int_0^\infty \frac{x^{m+n-1}}{(1+x^n)^2} \cdot dx = \frac{m\pi}{n^2 \cdot Sin \frac{m}{n}\pi},$$

wo m und n positiv ganz, aber $m<n$ vorausgesetzt worden.

Setzt man hier $m-n$ statt m, so erhält man noch

$$\text{VII.} \quad \int_0^\infty \frac{x^{m-1}}{(1+x^n)^2} \cdot dx = \frac{(m-n)\pi}{n^2 \cdot Sin \frac{m-n}{n}\pi},$$

wo m und n positiv ganz und $m<2n$ aber zugleich auch $m>n$ gedacht ist.

Verfährt man aber jetzt genau so, wie im §. 14. E. geschehen, so überzeugt man sich augenblicklich, daß die Formeln VI. und VII. auch für beliebige positive gebrochene Werthe von m und n gelten, wenn nur in VI. $m<n$, in VII. aber $m<2n$ und gleichzeitig $m>n$ vorausgesetzt wird.

Zweites Beispiel.

Soll $\int_0^\infty e^{-t^2} \cdot dt$ mittelst unserer fünften Methode berechnet werden, so kann man auch erst das allgemeinere Integral $\int_0^\infty e^{-ax^n} \cdot dx$ nehmen, solches noch mit e^{-a} multipliciren und nach a integriren, zwischen $a=0$ und $a=\infty$. Man erhält dann

$$1) \quad \int_0^\infty \left(\int_0^\infty e^{-a(1+x^n)} \cdot da \right) \cdot dx$$

$$= \int_0^\infty \frac{1}{1+x^n} \cdot dx = \frac{\pi}{n \cdot Sin \frac{\pi}{n}}$$

(nach §. 9. N. 18.). — Nun kann man aber auch dasselbe Doppel-Integral zur Linken, in umgekehrter Ordnung integriren, also zuerst nach x, indem man statt x einen neuen Veränderlichen t einführt, mittelst der Gleichung $ax^n = t^n$, so daß

$x = a^{-\frac{1}{n}} \cdot t$ und $dx = a^{-\frac{1}{n}} \cdot dt$ wird; dasselbe Doppel-Integral findet sich dann

$$2) \qquad = \int_0^\infty \frac{e^{-a}}{\sqrt[n]{a}} \cdot da \times \int_0^\infty e^{-t^n} \cdot dt.$$

Setzt man, um das Integral nach a umzuformen, $a = y^n$, so daß $da = n \cdot y^{n-1}$ wird, so findet sich noch

$$3) \quad \int_0^\infty \frac{e^{-a}}{\sqrt[n]{a}} \cdot da = n \cdot \int_0^\infty y^{n-2} \cdot e^{-y^n} \cdot dy = n \cdot \int_0^\infty t^{n-2} \cdot e^{-t^n} \cdot dt.$$

Aus 1. 2. und 3. erhält man nun die Gleichung

$$4) \qquad n \cdot \int_0^\infty t^{n-2} \cdot e^{-t^n} \cdot dt \times \int_0^\infty e^{-t^n} \cdot dt = \frac{\pi}{n \cdot Sin \frac{\pi}{n}},$$

welche Gleichung, wenn man $t^n = x$ setzt, noch in

$$5) \qquad \frac{1}{n} \cdot \int_0^\infty \frac{e^{-x}}{\sqrt[n]{x}} \cdot dx \times \int_0^\infty \frac{e^{-x}}{\sqrt[n]{x^{n-1}}} \cdot dx = \frac{\pi}{n \cdot Sin \frac{\pi}{n}}$$

übergeht. Diese Gleichungen 4. und 5. gehen nun, sobald man $n = 2$ setzt, in

$$6) \qquad 2\left(\int_0^\infty e^{-t^2} \cdot dt\right)^2 = \frac{\pi}{2}$$

und

$$7) \qquad \tfrac{1}{2}\left(\int_0^\infty \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}} \cdot dx\right)^2 = \frac{\pi}{2}$$

über. — Aus der 6.) erhält man zuletzt

$$58) \qquad \int_0^\infty e^{-t^2} \cdot dt = \tfrac{1}{2}\sqrt{\pi}\ ^{*}), \quad \text{also} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} \cdot dt = \sqrt{\pi},$$

während die 7. noch einmal die N. 57. liefert.

Man sieht zugleich, wie die NN. 57. und 58. allemal in einander übergehen, so oft $x = t^2$, oder $t^2 = x$ gesetzt wird.

---

*) Dieses Integral und die mit ihm zusammenhängenden werden häufig Laplace'sche Integrale genannt. Dasselbe Integral ist in der Note zum Schlusse des §. 11. bereits ausgewerthet worden. In der hier folgenden Anmerkung 2. ist solches noch auf einem anderen Wege ausgewerthet zu finden.

Anmerkg. 1. Aus N. 57. und N. 58. folgt aber augenblicklich, wenn nur a und jede Wurzel positiv gedacht wird:

59) $$\int_0^\infty \frac{e^{-ax}}{\sqrt{x}} \cdot dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}},$$

60) $$\int_0^\infty e^{-ax^2} \cdot dx = \tfrac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a}}, \quad \text{also} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ax^2} \cdot dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}}.$$

Differenziirt man diese Gleichungen hinter einander nach a, so erhält man, wie gewöhnlich, neue bestimmte Integrale ausgewerthet, worunter wir nur die nächsten hervorheben wollen, nämlich

61) $$\left\{\begin{array}{l} \int_0^\infty e^{-ax} \cdot \sqrt{x} \cdot dx = \frac{1}{2a} \cdot \sqrt{\frac{\pi}{a}} \\ \int_0^\infty e^{-ax^2} \cdot x^2 \cdot dx = \frac{1}{4a} \cdot \sqrt{\frac{\pi}{a}}, \\ \text{daher auch} \\ \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ax^2} \cdot x^2 \cdot dx = \frac{1}{2a}\sqrt{\frac{\pi}{a}}, \end{array}\right.$$

welche gelten, so lange a beliebig positiv ist.

In diesen Gleichungen stecken wieder (für $a = 1$)

VIII. $\int_0^\infty e^{-x} \cdot \sqrt{x} \cdot dx = \tfrac{1}{2}\sqrt{\pi}$, d. h. $\Gamma_{\frac{3}{2}} = \tfrac{1}{2}\sqrt{\pi}$;

IX. $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} \cdot t^2 \cdot dt = \tfrac{1}{2}\sqrt{\pi}$ *).

Setzt man aber in N. 58. $t = x^n$, so erhält man noch (wenn statt des Integrations-Buchstabens x zuletzt wieder der gleichgültige Buchstabe t gesetzt wird)

X. $$\int_0^\infty e^{-t^{2n}} \cdot t^{n-1} \cdot dt = \frac{1}{2n} \cdot \sqrt{\pi}.$$

---

*) Daß die Gleichungen 61.) desgleichen die VIII. und IX. wieder in einander übergehen, wenn $x = t^2$ oder $t^2 = x$ gesetzt wird, versteht sich von selbst.

Setzt man endlich in die 2te Gleichung der N. 60.

$x = z \pm \frac{b}{2a}$, so erhält man noch

XI. $$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ax^2 \pm bx} \cdot dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}} \times e^{\frac{b^2}{4a}},$$

wo b beliebig reell seyn kann, wenn nur a beliebig positiv ist (Vgl. VIII. Th. §. 98. II.).

Anmerkg. 2. Uebrigens kann man als zu diesem §. 20. gehörig rechnen ein von Laplace angewandtes Verfahren, um zu dem Werthe des bestimmten Integrals $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} \cdot dt$ zu gelangen. — Er setzt nämlich

1) $$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} \cdot dx = v,$$

also auch

2) $$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2} \cdot dy = v,$$

bekommt durch das Multipliciren

3) $$v^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} \cdot dx \times \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2} \cdot dy$$
$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x^2+y^2)} \cdot dx \cdot dy.$$

Um nun dieses letztere Doppel-Integral zu finden, denkt sich Laplace $e^{-(x^2+y^2)} = z$ als die 3te Ordinate einer krummen Fläche, die zu den beiden andern Koordinaten x und y gehört. Diese Fläche kommt im Unendlichen rings herum der Koordinaten-Ebene der (x,y) unendlich nahe. Das dem v^2 gleiche Doppel-Integral drückt dann den Inhalt des Körpers aus, der von dieser krummen Fläche und der Ebene der (x,y) begrenzt wird. Den Inhalt dieses Körpers findet man nun aber auch, wenn man statt der rechtwinkligen Koordinaten x und y, Polar-Koordinaten einführt, mittelst der Gleichungen

4) $x = r \cdot Cos\,\theta$, $y = r \cdot Sin\,\theta$, also $x^2 + y^2 = r^2$,

so daß das Flächen-Element in der Ebene der (x,y) $= r \cdot dr \cdot d\theta$, der körperliche Inhalt der darauf senkrecht stehenden und bis zur

krummen Fläche reichenden Säule, $= rz \cdot dr \cdot d\theta = r \cdot e^{-r^2} \cdot dr \cdot d\theta$ und der gedachte Inhalt des ganzen Körpers, also

5) $$v^2, = \int_0^\infty \left(\int_0^{2\pi} r \cdot e^{-r^2} \cdot d\theta\right) \cdot dr$$

wird. Also hat man

6) $$v^2 = 2\pi \int_0^\infty r \cdot e^{-r^2} \cdot dr = \pi [e^{-r}]_{\infty \div 0}$$

d. h. $v^2 = \pi$, demnach $v = \sqrt{\pi}$, genau wie in N. 58.

Hat man aber $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} \cdot dx = \sqrt{\pi}$ zuerst gefunden, so hat man auch

7) $$\int_0^\infty e^{-x^2} \cdot dx = \tfrac{1}{2}\sqrt{\pi},$$

und nun darf man nur $x^2 = z$ setzen, um sogleich wieder die obige N. 57. zu haben, nämlich

$$\int_0^\infty \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}} \cdot dx = \sqrt{\pi}. *)$$

---

*) Man kann das Doppel-Integral in 3. auch dadurch finden, daß man zunächst aus der Gleichung 3 diese andere macht

$$\tfrac{1}{4}v^2 = \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-(x^2+y^2)} \cdot dx \cdot dy$$

(wo beide Integrale zwischen 0 und ∞ genommen sind); dann statt y einen neuen Veränderlichen t einführt mittelst der Gleichung $y = x \cdot t$, so daß $dy = x \cdot dt$ und

$$\tfrac{1}{4}v^2 = \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-x^2(1+t^2)} \cdot x \cdot dx \cdot dt$$

wird, dann aber zuerst nach x integrirt. Man erhält nämlich

$$\int e^{-x^2(1+t^2)} x \cdot dx = -\tfrac{1}{2} \frac{e^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2},$$

und dies, zwischen den Grenzen 0 und ∞ genommen, giebt $\tfrac{1}{2} \cdot \frac{1}{1+t^2}$.

Dies nun noch nach t integrirt, giebt

$$\tfrac{1}{2} \frac{1}{Tg} t;$$

und zwischen den Grenzen 0 und ∞ genommen, wird dieses

§. 21.

Fortsetzung der fünften Methode.

In den folgenden Beispielen bildet man sich Differenzial-Gleichungen zwischen dem gesuchten Werthe y des vorgelegten bestimmten Integrals und dessen Differenzial-Koeffizienten ∂y_a (nach irgend einer allgemeinen Konstante a genommen), deren Integration dann den Werth y liefert, sobald man die eingehende Konstante für irgend einen besonderen Werth von a gehörig bestimmt hat.

Erstes Beispiel.

Es sey

$$\alpha)\qquad \int_0^\infty e^{-x^2-\frac{a^2}{x^2}}\cdot dx = X_a$$

zu finden.

Man erhält sogleich

$$\beta)\qquad \partial X_a = -2a\cdot\int_0^\infty \frac{e^{-x^2-\frac{a^2}{x^2}}}{x^2}\cdot dx,$$

oder, wenn man $\frac{a}{x} = z$ setzt, so daß $x = \frac{a}{z}$,

$dx = -\frac{a\cdot dz}{z^2}$ wird,

$$\gamma)\qquad \partial X_a = \mp 2\int_0^\infty e^{-x^2-\frac{a^2}{x^2}}\cdot dx = \mp 2X_a,$$

je nachdem a positiv ist, so daß die neuen Grenzen $+0$ und $+\infty$ werden, oder a negativ ist und die neuen Grenzen -0

$$= \tfrac{1}{2}\cdot(Arc\,tg.\,\infty - Arc\,tg.\,0) = \tfrac{1}{4}\pi;$$

also hat man

$$\tfrac{1}{4}v^2 = \tfrac{1}{4}\pi,\qquad \text{folglich}\qquad v = \sqrt{\pi}.$$

Die oben im Texte gebrauchte Verfahrungsweise ist übrigens dieselbe, welche in der Anmerkung 1. zum 1ten Beispiel gebraucht ist, nur im geometrischen Gewande.

und $-\infty$ werden, so daß erst noch $z = -y$ oder $-z$ statt z gesetzt werden muß. Man hat also die Differenzial-Gleichung

$$\delta)\qquad \frac{\partial X_a}{X_a} \pm 2 = 0, \text{ je nachdem } a \begin{Bmatrix} \text{positiv} \\ \text{negativ} \end{Bmatrix},$$

welche Gleichung integrirt, giebt

$$\log X_a \pm 2a = \log C$$

oder

$$\varepsilon)\qquad X_a = C \cdot e^{\mp 2a}, \text{ je nachdem } a \begin{Bmatrix} \text{positiv} \\ \text{negativ} \end{Bmatrix} \text{ ist.}$$

Weil aber das durch X_a bezeichnete Integral, für $a = 0$ offenbar

$$= \int_0^\infty e^{-x^2} \cdot dx = \tfrac{1}{2}\sqrt{\pi} \text{ wird (nach §. 20. N. 58.)},$$

so hat man aus dieser Gleichung ε.) für $a = 0$,

$$\zeta)\qquad \tfrac{1}{2}\sqrt{\pi} = C$$

zur Bestimmung der Konstante C. Daraus folgt nun (wenn ζ. in ε. substituirt wird) ohne Weiteres

$$\eta)\qquad \int_0^\infty e^{-x^2 - \frac{a^2}{x^2}} \cdot dx = \tfrac{1}{2}\sqrt{\pi} \times e^{\mp 2a},$$

wo das obere Vorzeichen gilt, wenn a positiv ist, das untere dagegen, wenn statt a eine negative Zahl gesetzt wird.

Der §. 98. des VIII. Theils enthält übrigens ebenfalls schon die Herleitung des Werthes des hier vorgelegten bestimmten Integrals. — Aus der obigen N. 7. geht aber auch, wenn $x = bz$ gesetzt wird, noch hervor, sobald b positiv gedacht wird,

$$\int_0^\infty e^{-b^2x^2 - \frac{a^2}{b^2x^2}} \cdot dx = \frac{1}{2b}\sqrt{\pi} \times e^{\mp 2a};$$

oder, wenn man $\frac{a}{b} = c$, also $a = bc$ setzt,

$$\int_0^\infty e^{-b^2x^2 - \frac{c^2}{x^2}} \cdot dx = \frac{1}{2b}\sqrt{\pi} \times e^{\mp 2bc};$$

und daraus folgt dann noch (nach VIII. Th. §. 88. N. 3.)

$$62)\quad \int_{-\infty}^{\infty} e^{-b^2x^2-\frac{c^2}{x^2}} \cdot dx = \frac{1}{b}\sqrt{\pi} \times e^{\mp 2bc},$$

wenn nur b positiv ist, wobei das $\mp$ Zeichen gilt, je nachdem c $\left\{\begin{matrix}\text{positiv}\\ \text{negativ}\end{matrix}\right\}$ ist.

Anmerkg. Laplace leitete dieses Integral N. 62. zuerst aus der Gleichung

$$\int_0^\infty e^{-x^2} \cdot dx = \tfrac{1}{2}\sqrt{\pi}$$

dadurch ab, daß er aus $\left(x+\frac{a}{x}\right)^2 = x^2+\frac{a^2}{x^2}+2a$ folgerte

$$\int_0^\infty e^{-x^2-\frac{a^2}{x^2}} \cdot dx = e^{2a} \cdot \int_0^\infty e^{-\left(x+\frac{a}{x}\right)^2} \cdot dx,$$

dieses letztere Integral aber auf dem Wege der Substitution auswerthete.

Man könnte nun, um letzteres zu bewerkstelligen, $x+\frac{a}{x}=z$ setzen, würde aber dann finden, daß, während die Werthe von x von 0 an bis ∞ hin stetig wachsen, die von z von $+\infty$ an bis zu $2\sqrt{a}$ hin abnehmen, um dann wieder von $2\sqrt{a}$ an bis zu $+\infty$ hin zu wachsen. Das neue Integral nach z würde daher (nach VIII. Th. §. 97.) in die beiden Integrale $\int_\infty^{2\sqrt{a}} f_z \cdot dz + \int_{2\sqrt{a}}^\infty f_z \cdot dz$ zerlegt werden müssen, und in beiden würde f_z zwei verschiedene Formen haben. Um diese Schwierigkeit zu vermeiden, setzt daher Laplace, da 4a der kleinste Werth von x ist, den der Exponent $\left(x+\frac{a}{x}\right)^2$ annimmt (so lange man a positiv voraussetzt), $\left(x+\frac{a}{x}\right)^2 = z^2+4a$, damit der kleinste Werth von z, $=0$ werde. Nimmt man hieraus $x = \frac{1}{2}z+\frac{1}{2}\sqrt{z^2+4a}$, indem man die Quadratwurzel stets positiv voraussetzt, so hat man

den Vortheil, daß z von $-\infty$ an bis zu $+\infty$ hin stets wächst, während x von 0 an bis zu ∞ hin im stetigen Wachsen begriffen ist. Man hat dann noch

$$dx = \tfrac{1}{2}dz\cdot\left(1+\frac{z}{\sqrt{z^2+4a}}\right)$$

und deshalb

$$\int_0^\infty e^{-\left(x+\frac{a}{x}\right)^2}\cdot dx = e^{-4a}\cdot\int_0^\infty e^{-z^2}\cdot\left(1+\frac{z}{\sqrt{z^2+4a}}\right)\cdot dz,$$

während der zweite Theil dieses, in zwei Theile zerfällten Integrals zur Rechten (nach N. 4. des §. 88. des VIII. Th.) der Null gleich ist.

Man umgeht übrigens diese Grenz-Schwierigkeit, welcher Laplace auszuweichen bemüht war, am einfachsten dadurch, daß man $-x^2-\frac{a^2}{x^2}$ zerlegt in $-\left(a-\frac{a}{x}\right)^2-2a$, so daß

$$\int_0^\infty e^{-x^2-\frac{a^2}{x^2}}\cdot dx = e^{-2a}\cdot\int_0^\infty e^{-\left(x-\frac{a}{x}\right)^2}\cdot dx$$

wird. — Indem man dann $x-\frac{a}{x}=z$ setzt, wird sogleich, weil man a positiv voraussetzt, $z=-\infty$ für $x=0$ und $z=+\infty$ für $x=\infty$, und z hat nun gleich von vorne herein keinen Minimum-Werth (so lange a positiv ist).

Zweites Beispiel.

Es sey

$$\alpha)\qquad \int_0^\infty e^{-x^2}\cdot \mathit{Cos}\, bx = X_b$$

zu berechnen, welches Integral ebenfalls zu den Laplace'schen gezählt wird.

Differenziirt man die α.) nach b, so erhält man

$$\partial X_b = -\int_0^\infty x\cdot e^{-x^2}\times \mathit{Sin}\, bx\cdot dx.$$

Integrirt man aber nun rechts theilweise, so giebt dies (weil $\int x\cdot e^{-x^2}\cdot dx = -\frac{1}{2}\cdot e^{-x^2}$ gefunden wird),

$$\partial X_b = -\tfrac{1}{2}b \cdot \int_0^\infty e^{-x^2} \cdot Cos\, bx \cdot dx,$$

d. h.

β) $$\partial X_b = -\tfrac{1}{2}b \cdot X_b, \quad \text{oder} \quad \frac{\partial X_b}{X_b} + \tfrac{1}{2}b = 0.$$

Diese Differenzial-Gleichung integrirt, giebt

γ) $$log\, X_b + \tfrac{1}{4}b^2 = C.$$

Und da aus α.) für $b = 0$, X_b in $\int_0^\infty e^{-x^2} \cdot dx$ d. h. in $\frac{1}{2}\sqrt{\pi}$ übergeht, so giebt die Gleichung γ.), wenn $b = 0$ gesetzt wird, zur Bestimmung der Konstante C

δ) $$log\, \tfrac{1}{2}\sqrt{\pi} = C,$$

so daß die Gleichungen γ.) und δ.) nun geben

ε) $$log \frac{X_b}{\frac{1}{2}\sqrt{\pi}} = -\tfrac{1}{4}b^2,$$

oder

ζ) $$X_b = \tfrac{1}{2}\sqrt{\pi} \cdot e^{-\frac{1}{4}b^2}$$

d. h.

$$\int_0^\infty e^{-x^2} \cdot Cos\, bx \cdot dx = \tfrac{1}{2}\sqrt{\pi} \cdot e^{-\frac{1}{4}b^2},$$

wodurch unsere Aufgabe gelöst ist, während b beliebig reell gedacht wird *).

---

*) In der Théorie des probabilités des Laplace wird dasselbe Integral

1) $$\int_0^\infty e^{-x^2} \cdot Cos\, bx \cdot dx = K$$

auf folgende Weise gefunden. — Es ist nämlich

$$Cos\, bx = \frac{e^{bx \cdot i} + e^{-bx \cdot i}}{2};$$

also zerlegt sich unser Integral K so, daß man hat:

2) $$2K = \int_0^\infty e^{-x^2 + bx \cdot i} \cdot dx + \int_0^\infty e^{-x^2 - bx \cdot i} \cdot dx.$$

Um jedes dieser beiden letzteren Integrale zu finden, kann man nun von

3) $$\int_0^\infty e^{-z^2} \cdot dz = \tfrac{1}{2}\sqrt{\pi} \qquad (\S.\ 20.\ N.\ 58.)$$

Setzt man aber hier $x = z \cdot \sqrt{a}$ und a positiv, so wie b statt $b \cdot \sqrt{a}$, so geht diese Gleichung noch über in

---

ausgehen und $z = x - \frac{1}{2}b \cdot i$ setzen. Für $z = 0$ wird dann $x = +\frac{1}{2}b \cdot i$, für $z = \infty$ aber wird $x = \infty + \frac{1}{2}b \cdot i$, d. h. $x = \infty$, weil (nach VIII. Th. Einleitg. §. 19.) das imaginäre Endliche gegen das reelle Unendlich-große verschwindet. Man erhält daher (aus 3.)

4) $$\int_{\frac{1}{2}b \cdot i}^{\infty} e^{-x^2 + bx \cdot i + \frac{1}{4}b^2} \cdot dx = \tfrac{1}{2}\sqrt{\pi}$$

d. h.

5) $$\int_{\frac{1}{2}b \cdot i}^{\infty} e^{-x^2 + bx \cdot i} \cdot dx = \tfrac{1}{2}\sqrt{\pi} \times e^{-\frac{1}{4}b^2}.$$

Wird nun hier $-b$ statt b gesetzt, so giebt dies

6) $$\int_{-\frac{1}{2}b \cdot i}^{\infty} e^{-x^2 - bx \cdot i} \cdot dx = \tfrac{1}{2}\sqrt{\pi} \times e^{-\frac{1}{4}b^2}.$$

Es ist also (nach 5.) das erstere der Integrale in 2.)

7)... $$= \int_0^{\frac{1}{2}b \cdot i} e^{-x^2 + bx \cdot i} \cdot dx + \tfrac{1}{2}\sqrt{\pi} \times e^{-\frac{1}{4}b^2}$$

und das andere jener Integrale (in 2.)

8)... $$= -\int_{-\frac{1}{2}b \cdot i}^{0} e^{-x^2 - bx \cdot i} \cdot dx + \tfrac{1}{2}\sqrt{\pi} \times e^{-\frac{1}{4}b^2}.$$

Nun sind aber die ersten Summanden in 7.) und 8.) bis auf die Vorzeichen einander gleich, wie sogleich erkannt wird, wenn man in einem derselben $x = -z$ setzt; also erhält man aus 2.), 7.) und 8.)

$$2K = \sqrt{\pi} \times e^{-\frac{1}{4}b^2} \quad \text{d. h.} \quad K = \tfrac{1}{2}\sqrt{\pi} \times e^{-\frac{1}{4}b^2},$$

genau so, wie oben auch.

Man hat dieses Verfahren des Laplace getadelt und als unzulässig bezeichnet, einmal weil man ∞ statt $\infty + 2b \cdot \sqrt{-1}$ schreibt, und dann auch, weil man Integrale zwischen imaginären Grenzen zu Hilfe nimmt. Das erstere ist jedoch (nach VIII. Th. Einleitg. §. 19.) erlaubt; das andere aber ist deshalb erlaubt, weil man statt des gesuchten numerisch-bestimmten Integrals $\int_0^{\infty} e^{-x^2} \cdot Cos\, bx \cdot dx$, das allgemein-bestimmte Integral $\int_{\infty \div 0} e^{-x^2} \cdot Cos\, bx \cdot dx$ setzen kann, letzteres aber allemal $= \int_{\infty \div g} e^{-x^2} \cdot Cos\, bx \cdot dx + \int_{g \div 0} e^{-x^2} \cdot Cos\, bx \cdot dx$ ist, was auch unter g gedacht werden mag, reelles oder imaginäres.

63) $$\int_0^\infty e^{-ax^2}\cdot Cos\, bx\cdot dx = \tfrac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a}}\times e^{-\frac{b^2}{4a}},$$

wenn nur a beliebig positiv und b beliebig reell ist.

Für $b = 0$ geht die N. 63. wieder in die N. 60. über, so wie diese wieder für $a = 1$ in die N. 58. übergeht.

Anmerkg. Wollte man diese Gleichung nach b oder a wieder integriren oder differenziiren, so würde man dadurch neue Reihen bestimmter Integrale ausgewerthet haben. Wir werden jedoch in der Folge unsere Leser nicht immer auf's Neue darauf aufmerksam machen; unser Zweck ist: die Methoden hervorzuheben, und nicht der: Resultate zu gewinnen. Bloß die zwei nächsten Gleichungen, welche durch das Differenziiren und Integriren der N. 63. nach b hervorgehen, mögen hier noch stehen, nämlich

64) $$\begin{cases} \int_0^\infty e^{-ax^2}\cdot x\cdot Sin\, bx\cdot dx = \frac{b}{4a}\sqrt{\frac{\pi}{a}}\times e^{-\frac{b^2}{4a}}, \\ \int_0^\infty e^{-ax^2}\cdot\frac{Sin\, bx}{x}\cdot dx = \tfrac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a}}\cdot\int_0^b e^{-\frac{b^2}{4a}}\cdot db \\ \qquad = \sqrt{\pi}\cdot\int_0^{\frac{b}{2\sqrt{a}}} e^{-t^2}\cdot dt, \end{cases}$$

wenn nur a positiv und b reell ist *).

Uebrigens ist noch zu bemerken, daß (nach VIII. Th. §. 88. N. 3.) die Integrale NN. 62.—64. den doppelten Werth haben, wenn sie zwischen den Grenzen $-\infty$ und $+\infty$ (statt zwischen den Grenzen 0 und ∞) genommen werden.

Wenn man aber, wie Laplace gethan hat, aus der N. 63. zuerst die N. 64. ableitet, nämlich die Gleichung

---

*) Man hat die Werthe des Integrals $\int_0^g e^{-t^2}\cdot dt$, für Werthe von g, welche von $\frac{1}{100}$ an stets um $\frac{1}{100}$ steigen, in Tabellen ausgerechnet (S. §. 27.).

$$\int_0^\infty e^{-ax^2} \cdot \frac{Sin\,bx}{x} \cdot dx = \sqrt{\pi} \cdot \int_0^{\frac{b}{2\sqrt{a}}} e^{-t^2} \cdot dt,$$

und nun hier $a = 0$ (oder $a = +0$) setzt, um hieraus

$$\int_0^\infty \frac{Sin\,bx}{x} \cdot dx = \sqrt{\pi} \cdot \int_0^\infty e^{-t^2} \cdot dt = \tfrac{1}{2}\pi$$

abzuleiten, so kann diese Art zu schließen vor uns nicht gerechtfertigt erscheinen, weil die N. 63. nur für den Fall erwiesen worden ist, in welchem a positiv und endlich gedacht wird.

Drittes Beispiel.

Wir haben das bestimmte Integral

$$\alpha) \qquad \int_0^\infty e^{-x} \cdot x^{c-1} \cdot dx \quad \text{oder} \quad \int_0^1 \left(L\frac{1}{x}\right)^{c-1} \cdot dx \quad \text{durch } \Gamma_c$$

bezeichnet, dann aber im VIII. Th. §§. 117. und 105.

$$\Gamma_c = (c-1)! \qquad \text{also} \qquad \Gamma_{\frac{1}{2}} = \sqrt{\pi}$$

gefunden. Wir haben auch bereits (§. 20. β.) in dieser Gleichung α.) $x = kz$ gesetzt, dabei k beliebig positiv gedacht und erhalten

$$\beta) \qquad \int_0^\infty e^{-kx} \cdot x^{c-1} \cdot dx = \frac{\Gamma_c}{k^c},$$

wo k und c beliebig positiv sind, ganz oder gebrochen, und wo die Potenz k^c ihren positiven Werth vorstellt, während Γ_c oder $(c-1)!$ (nach dem letzten Kapitel des VIII. Th.) auch in Ziffern berechnet werden kann, sobald c selbst in Ziffern gegeben ist.

Wir wollen nun dasselbe Integral (in β. zur Linken) für den Fall auswerthen, daß an die Stelle der positiven Zahl k eine imaginäre Zahl $a+b \cdot i$ gesetzt wird. Wir suchen also (als drittes Beispiel)

$$1) \qquad \int_0^\infty e^{-(a+b \cdot i) \cdot x} \cdot x^{c-1} \cdot dx = X_b$$

mittelst unserer gegenwärtigen Methode. — Weil aber

$$e^{-(a+b\cdot i)x} = e^{-ax}\cdot(\mathit{Cos}\,bx - i\cdot \mathit{Sin}\,bx)$$

ist, so müssen wir a wie c (beliebig) positiv voraussetzen, damit das Integral convergent und ununterbrochen sey und wirklich einen Werth habe. — Man findet nun zunächst:

2) $$\partial X_b = -i\cdot\int_0^\infty e^{-(a+b\cdot i)x}\cdot x^c\cdot dx.$$

Integrirt man nun rechts theilweise, so daß man

$$\int_0^\infty e^{-(a+b\cdot i)x}\cdot x^c\cdot dx = -\left[\frac{e^{-(a+b\cdot i)x}\cdot x^c}{a+b\cdot i}\right]_{\infty\div 0} + \int_0^\infty \frac{c}{a+b\cdot i}\cdot e^{-(a+b\cdot i)x}\cdot x^{c-1}\cdot dx = \frac{c}{a+b\cdot i}\cdot X_b$$

erhält, — so geht die Gleichung 2.) über in

3) $$\partial X_b = -\frac{c\cdot i}{a+b\cdot i}\cdot X_b,$$

welche Differenzial-Gleichung nun integrirt werden muß. Sie giebt zunächst

4) $$\frac{\partial X_b}{X_b} = -\frac{c}{b-a\cdot i},$$

also (nach b integrirt)

5) $$\log X_b = -c\cdot\log(b-a\cdot i)+C(\text{onst.}).$$

Zur Bestimmung der Konstante nimmt man diese Gleichung für $b=0$, wodurch X_b (nach 1. und β. und weil a positiv gedacht worden ist) in $\frac{\Gamma_c}{a^c}$ übergeht; dies giebt

6) $$\log\frac{\Gamma_c}{a^c} = -c\cdot\log(-a\cdot i)+C$$

zur Bestimmung von C. — Die 5. und 6., combinirt durch Elimination von C, d. h. von einander subtrahirt, geben nun

7) $$\log X_b = \log\frac{\Gamma_c}{a^c} - c\cdot\log\left(1+\frac{b}{a}\cdot i\right);$$

oder, wenn man e mit beiden Seiten potenzirt,

8*

8) X_b d. h. $\int_0^\infty e^{-(a+b\cdot i)x}\cdot x^{c-1}\cdot dx = \frac{\Gamma_c}{(a+b\cdot i)^c} = \Gamma_c\cdot(a+b\cdot i)^{-c}$.

Wir sehen also, daß obige Gleichung β.) auch noch gilt, wenn k imaginär gedacht wird, wenn nur mit positivem reellen Theil; aber wir müssen jetzt noch untersuchen, welchen ihrer unendlich-vielen Werthe diese Potenz $(a+b\cdot i)^c$ oder die Potenz $(a+b\cdot i)^{-c}$ in der vorliegenden Gleichung 8.) vorstellt. Nimmt man §. 7. der Einleitg. zum VIII. Th. zu Hilfe, so findet man

$$9)\qquad (a+b\cdot i)^{-c} = (a^2+b^2)^{-\frac{c}{2}}\cdot\left[Cos\, c\left(2\nu\pi+Arc\, tg.\frac{b}{a}\right)\right.$$
$$\left.-i\cdot Sin\, c\left(2\nu\pi+Arc\, tg.\frac{b}{a}\right)\right],$$

wo $(a^2+b^2)^{-\frac{c}{2}}$ ihren positiven Werth, ν aber Null und jede positive und jede negative ganze Zahl vorstellt, wenn zur Rechten alle Werthe der Potenz $(a+b\cdot i)^{-c}$ ausgedrückt seyn sollen. Da jedoch in der Gleichung 8.), wenn $b=0$ gesetzt wird, die Potenz $(a+b\cdot i)^{-c}$ in den positiven Werth a^{-c} übergehen muß (nach β.), so ist für die Gleichung 8.) $\nu=0$ zu nehmen, weil außerdem für ein gebrochenes c und für $b=0$ der Ausdruck rechts in 9.), imaginär, also nicht positiv werden würde.

Es ist also gefunden

$$65)\qquad \int_0^\infty e^{-(a+b\cdot i)\cdot x}\cdot x^{c-1}\cdot dx = \frac{\Gamma_c}{(a+b\cdot i)^c} =$$
$$\frac{\Gamma_c}{(a^2+b^2)^{\frac{c}{2}}}\cdot\left[Cos\left(c\cdot Arc\, tg.\frac{b}{a}\right)-i\cdot Sin\left(c\cdot Arc\, tg.\frac{b}{a}\right)\right],$$

welche Gleichung gilt für jeden reellen Werth von b, also auch für $b=0$, wenn nur a wie c stets beliebig positiv gedacht werden, während die Potenz $(a^2+b^2)^{\frac{c}{2}}$ ebenfalls stets ihren positiven Werth vorstellt. — Und in dieser Gleichung stellt $(a+b\cdot i)^c$ jedesmal ihren einfachsten Werth, nämlich den Werth

$$(a^2+b^2)^{\frac{c}{2}} \cdot \left[Cos\left(c \cdot Arc\,tg. \frac{b}{a}\right) + i \cdot Sin\left(c \cdot Arc\,tg. \frac{b}{a}\right)\right]$$

vor, (in welchem $\nu = 0$ und) welcher in den positiven Werth von a^c übergeht, so oft $b = 0$.

Anmerkg. 1. Da $e^{-(a+b \cdot i)x} = e^{-ax} \cdot (Cos\,bx - i \cdot Sin\,bx)$ ist, so zerlegt sich das Integral in N. 65. zur Linken, sogleich in zwei Integrale, und die Gleichung selbst in zwei Gleichungen, nämlich in

$$66) \begin{cases} \int_0^\infty e^{-ax} \cdot Sin\,bx \cdot x^{c-1} \cdot dx = \dfrac{\Gamma_c}{(a^2+b^2)^{\frac{c}{2}}} \cdot Sin\left(c \cdot Arc\,tg. \dfrac{b}{a}\right) \\ \int_0^\infty e^{-ax} \cdot Cos\,bx \cdot x^{c-1} \cdot dx = \dfrac{\Gamma_c}{(a^2+b^2)^{\frac{c}{2}}} \cdot Cos\left(c \cdot Arc\,tg. \dfrac{b}{a}\right), \end{cases}$$

wenn nur a wie c beliebig positiv gedacht sind und $(a^2+b^2)^{\frac{c}{2}}$ ihren positiven Werth vorstellt, während Γ_c die oben in α. festgestellte Bedeutung hat.

Uebrigens gehen diese Gleichungen N. 66. genau in die Gleichungen NN. 43. 44. des §. 17. über, so oft man statt c die positive ganze Zahl $n+1$ setzt, weil dann (nach §. 12. N. 31.) $\Gamma_c = \Gamma_{n+1} = n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n$ ist.

Anmerkg. 2. Euler hat den erstern Theil des Resultats N. 65., nämlich

$$(☾)\cdots \quad \int_0^\infty e^{-(k+\theta \cdot i)x} \cdot x^{c-1} \cdot dx = \frac{\Gamma_c}{(k+\theta \cdot i)^c}$$

ohne Weiteres aus der für einen positiven Werth von k gewonnenen Gleichung β. entnommen, indem er $k+\theta \cdot i$ statt k setzt. Er rechtfertigt sein Verfahren dadurch, daß er das gewonnene Resultat (☾) noch synthetisch auf dem Wege der vollkommenen Induktion strenge zu beweisen sucht, und zwar so: Zuerst zeigt er, daß es für einen gewissen Werth von θ, mit einem bereits anderweitig bekannten Resultate zusammenfällt, —

und dann beweist er, daß, wenn es für einen einzigen bestimmten Werth von θ gilt, solches dann allemal auch für jeden Werth von θ gelten müsse.

Dieser Euler'sche sogenannte synthetische Beweis wird von anderen Schriftstellern wieder gegeben, ohne daß dabei bemerkt wird, wie das ganze Verfahren, genau genommen, nichts anders ist, als eine direkte Herleitung des Resultats aus der Gleichung β.), nämlich aus

$$\beta) \qquad \int_0^\infty e^{-kx} \cdot x^{c-1} \cdot dx = \Gamma_c \cdot k^{-c},$$

wo k beliebig positiv gedacht wird, — also eine analytische Entwickelung.

Um dies deutlich und entschieden nachzuweisen, mag zuerst der sogenannte Euler'sche Beweis selbst hier folgen, und dann wollen wir unsere Leser auf den wahren Kern dieses Verfahrens aufmerksam machen.

Dieser Euler'sche Beweis ist aber folgender: Es stelle θ irgend einen Werth von θ, dagegen $\theta+w$ jeden andern Werth von θ vor, so ist allemal

$$1) \quad \int_0^\infty e^{-(k+(\theta+w)\cdot i)x} \cdot x^{c-1} \cdot dx = J = \int_0^\infty e^{-wx\cdot i} \cdot e^{-(k+\theta\cdot i)x} \cdot x^{c-1} \cdot dx.$$

Nun ist aber

$$2) \qquad e^{-wx\cdot i} = S\left[\frac{(-wi)^b \cdot x^b}{b!}\right],$$

wenn S die Summe aller der aus dem allgemeinen Gliede hervorgehenden Glieder ausdrückt, die man erhält, wenn nach und nach 0, 1, 2, 3, *rc.* und jede ganze positive Zahl statt b gesetzt wird. Daher wird

$$3) \qquad J = S\left[\frac{(-w\cdot i)^b}{b!} \int_0^\infty e^{-(k+\theta\cdot i)x} \cdot x^{c+b-1} \cdot dx\right].$$

Da nun die Gleichung (☾) für den durch θ bezeichneten bestimmten Werth von θ zugetroffen haben soll, so findet sich weiter

$$4)\qquad J = S\left[\frac{(-w\cdot i)^b}{b!}\cdot\frac{\Gamma_{c+b}}{(k+\theta\cdot i)^{c+b}}\right]$$

oder

$$5)\qquad J = S\left[\frac{1}{b!}\left(\frac{-wi}{k+\theta\cdot i}\right)^b\cdot\frac{\Gamma_{c+b}}{(k+\theta\cdot i)^c}\right].$$

Nun ist aber nach §. 20. Erst. Beisp. Anmerkg. 2. IV.

$$6)\qquad \Gamma_{c+b} = (c+b-1)^{b|-1}\cdot\Gamma_c = c^{b|1}\cdot\Gamma_c.$$

Dies in die 5. substituirt, giebt, wenn man noch den, allen Gliedern gemeinschaftlichen Faktor aus dem Summen-Zeichen S herausrückt (weil $c^{b|1}\cdot(-1)^b = (-c)^{b|-1}$ ist)

$$7)\qquad J = \frac{\Gamma_c}{(k+\theta\cdot i)^c}\cdot S\left[\frac{(-c)^{b|-1}}{b!}\left(\frac{w\cdot i}{k+\theta\cdot i}\right)^b\right].$$

Nun ist aber der erste Faktor unter dem Summen-Zeichen S nichts anders als der b^{te} Binomial-Koeffizient der $(-c)^{ten}$ Potenz; folglich ist die ganze unendliche Reihe unter dem Summen-Zeichen S,

$$= \left(1+\frac{w\cdot i}{k+\theta\cdot i}\right)^{-c} = \frac{(k+(\theta+w)\cdot i)^{-c}}{(k+\theta\cdot i)^{-c}}.$$

Dadurch geht dann die 7. über in

$$8)\qquad J = \Gamma_c\cdot(k+(\theta+w)\cdot i)^{-c} = \frac{\Gamma_c}{(k+(\theta+w)\cdot i)^c},$$

und dies ist wiederum die Gleichung (☾), nur daß jetzt $\theta+w$ statt θ steht. — Die zu erweisende Gleichung (☾) gilt also, wenn der beliebige Werth $\theta+w$ statt θ gesetzt wird, so oft sie für einen einzigen bestimmten Werth θ zutrifft. Nun trifft sie aber für $\theta = 0$ zu, denn sie geht dann über in

$$\int_0^\infty e^{-kx}\cdot x^{c-1} = \Gamma_c\cdot k^{-c},$$

welche Gleichung die obige β.) ist und gilt, wenn k positiv ist. Also gilt die Gleichung (☾) für jeden Werth $\theta+w$, d. h. für jeden Werth w, den man sich unter θ denken mag, so lange nur k positiv bleibt.

Dies der Euler'sche Beweis. — Der wahre Kern desselben ergiebt sich aber aus nachstehender Darstellung.

Aufgabe.

Den Werth von $\int_0^\infty e^{-(k+\theta\cdot i)x}\cdot x^{c-1}\cdot dx = H$ zu finden.

Auflösung. Man hat

1) $$H = \int_0^\infty e^{-\theta x\cdot i}\cdot e^{-kx}\cdot x^{c-1}\cdot dx;$$

aber

2) $$e^{-\theta x\cdot i} = S\left[\frac{(-\theta\cdot i)^{\mathfrak{b}}\cdot x^{\mathfrak{b}}}{\mathfrak{b}!}\right],$$

also

3) $$H = S\left[\frac{(-\theta\cdot i)^{\mathfrak{b}}}{\mathfrak{b}!}\int_0^\infty e^{-kx}\cdot x^{c+\mathfrak{b}-1}\cdot dx\right];$$

folglich (nach β.), wenn k positiv gedacht ist,

4) $$H = S\left[\frac{(-\theta\cdot i)^{\mathfrak{b}}}{\mathfrak{b}!}\cdot\frac{\Gamma_{c+\mathfrak{b}}}{k^{c+\mathfrak{b}}}\right]$$

oder

5) $$H = S\left[\frac{1}{\mathfrak{b}!}\cdot\left(-\frac{\theta}{k}\cdot i\right)^{\mathfrak{b}}\cdot\frac{\Gamma_{c+\mathfrak{b}}}{k^c}\right].$$

Aber es ist, wie oben gezeigt,

6) $$\Gamma_{c+\mathfrak{b}} = (c+\mathfrak{b}-1)^{\mathfrak{b}|-1}\cdot\Gamma_c = c^{\mathfrak{b}|1}\cdot\Gamma_c;$$

folglich aus demselben Grunde wie oben,

7) $$H = \frac{\Gamma_c}{k^c}\cdot S\left[\frac{(-c)^{\mathfrak{b}|-1}}{\mathfrak{b}!}\cdot\left(\frac{\theta}{k}\cdot i\right)^{\mathfrak{b}}\right].$$

Diese Reihe zur Rechten ist aber die Binomialreihe für $\left(1+\frac{\theta}{k}\cdot i\right)^{-c}$; folglich erhält man aus 7.

8) $$H = \Gamma_c\cdot(k+\theta\cdot i)^{-c} = \frac{\Gamma_c}{(k+\theta\cdot i)^c},$$

wodurch die Aufgabe gelöst ist.

Da wir aber hier überall bereits Ziffernwerthe voraussetzen (weil wir gar nicht nach dem allgemeinen Integral $\int_0^x$

fragen, sondern nach dem Werthe, in den solches für $x = \infty$ übergeht), so müssen die gebrauchten unendlichen Reihen convergent gedacht werden, weshalb das Verfahren als synthetischer Beweis, oder als analytische Entwickelung gedacht, nicht allgemein genug ist.

§. 22.

Fortsetzung der fünften Methode.

Zuweilen kann man zwischen den unbekannten, einstweilen etwa durch X und Y bezeichneten Werthen zweier bestimmten Integrale zwei Gleichungen auffinden. Dann darf man nur diese beiden Gleichungen nach den beiden Unbekannten X und Y auflösen (entweder auf algebraischen Wege, wenn die Gleichungen Ur-Gleichungen d. h. algebraische oder transcendente sind, oder auf dem Wege der Integralrechnung, wenn die beiden Gleichungen oder eine derselben zu den Differenzial-Gleichungen gehören sollten), um die unbekannten Werthe X und Y gefunden zu haben.

Ein hieher gehöriges Beispiel findet sich bereits §. 16. 2tes Beisp. Anmerkg., wo es gelungen ist, zwischen den unbekannten Werthen der beiden bestimmten Integrale $\int_{+0}^{1} \frac{L(1+x)}{x} \cdot dx$ und $\int_{+0}^{1} \frac{L(1-x)}{x} \cdot dx$ die beiden algebraischen Gleichungen ⊙ und ☾ daselbst herzustellen.

Zu zwei Differenzial-Gleichungen führt dagegen folgende Aufgabe:

Die beiden bestimmten Integrale

1) $\int_0^\infty e^{-ax} \cdot x^{c-1} \cdot Cos\, bx \cdot dx = X_b$

und 2) $\int_0^\infty e^{-ax} \cdot x^{c-1} \cdot Sin\, bx \cdot dx = Y_b$

auszuwerthen *).

---

*) Es sind dies, wie man sieht, dieselben Integrale, welche so eben in N. 66. bereits ausgewerthet worden sind. Jetzt aber werden dieselben Werthe als noch nicht bekannt vorausgesetzt.

Man erhält sogleich, wenn nach b differenziirt wird,

$$\partial X_b = -\int_0^\infty e^{-ax} \cdot x^c \cdot \mathit{Sin}\, bx \cdot dx$$

und

$$\partial Y_b = \int_0^\infty e^{-ax} \cdot x^c \cdot \mathit{Cos}\, bx \cdot dx.$$

Integrirt man nun zur Rechten theilweise, indem man x^c als den einen Faktor ansieht, so erhält man

$$-\int e^{-ax} \cdot x^c \cdot \mathit{Sin}\, bx \cdot dx =$$

$$\frac{1}{a^2+b^2} \cdot x^c \cdot e^{-ax} \cdot (a \cdot \mathit{Sin}\, bx + b \cdot \mathit{Cos}\, bx)$$

$$- \frac{c}{a^2+b^2} \cdot \int e^{-ax} \cdot x^{c-1} (a \cdot \mathit{Sin}\, bx + b \cdot \mathit{Cos}\, bx) \cdot dx.$$

und

$$\int e^{-ax} \cdot x^c \cdot \mathit{Cos}\, bx \cdot dx =$$

$$- \frac{1}{a^2+b^2} \cdot x^c \cdot e^{-ax} \cdot (a \cdot \mathit{Cos}\, bx - b \cdot \mathit{Sin}\, bx)$$

$$+ \frac{c}{a^2+b^2} \cdot \int e^{-ax} \cdot x^{c-1} \cdot (a \cdot \mathit{Cos}\, bx - b \cdot \mathit{Sin}\, bx) \cdot dx.$$

Nimmt man nun diese Integrale zwischen den Grenzen 0 und ∞, so ergeben sich aus obigen Resultaten die Differenzial-Gleichungen

3) $$\partial X_b = -\frac{c}{a^2+b^2} \cdot (a \cdot Y + b \cdot X)$$

und

4) $$\partial Y_b = -\frac{c}{a^2+b^2} \cdot (b \cdot Y - a \cdot X).$$

Diese beiden Gleichungen 3.) und 4.) müssen nun integrirt und die eingehenden beiden Konstanten aus den für $b = 0$ als schon bekannt vorausgesetzten Werthen von X und Y bestimmt werden, um die durch X_b und Y_b bezeichneten bestimmten Integrale schließlich ausgewerthet zu haben.

Um nun die Integration durchzusetzen, muß man zuerst einen der Unbekannten X_b oder Y_b eliminiren, zu dem Ende

also diese beiden letztern Gleichungen noch einmal nach b differenziiren (um Y, ∂Y_b oder X, ∂X_b eliminiren zu können), und man wird Differenzial-Gleichungen der 2ten Ordnung (zwischen X, ∂X_b und $\partial^2 X_b$ oder zwischen Y, ∂Y_b und $\partial^2 Y_b$) erhalten. Weil aber die Integration dieser Gleichungen zu mühsameren Rechnungen führen würde, so wird man lieber die Gleichungen 3.) und 4.) gleichzeitig (simultan) integriren. Man bildet sich nämlich die Gleichungen

$$5)\qquad \frac{X\cdot\partial Y_b - Y\cdot\partial X_b}{X^2+Y^2} = \frac{ac}{a^2+b^2}$$

und

$$6)\qquad \frac{X\cdot\partial X_b + Y\cdot\partial Y_b}{X^2+Y^2} = \frac{bc}{a^2+b^2},$$

und nimmt in ihnen links und rechts die Integrale (nach b). Dies giebt (aus 5.)

$$7)\qquad \mathit{Arc\,tg.}\frac{Y}{X} = c\cdot \mathit{Arc\,tg.}\frac{b}{a} + C$$

und (aus 6.)

$$8)\qquad \tfrac{1}{2}L(X^2+Y^2) = \tfrac{1}{2}c\cdot L(a^2+b^2) + C'.$$

Da nun für $b = 0$, $X = \Gamma_c$ und $Y = 0$ wird, so geben die Gleichungen 7.) und 8.) für $b = 0$

$$C = 0 \quad \text{und} \quad L\cdot\Gamma_c = c\cdot La + C'$$

d. h. $$C = 0 \quad \text{und} \quad C' = L\left(\frac{\Gamma_c}{a^c}\right).$$

Die Gleichungen 7.) und 8.) gehen dadurch über in

$$9)\qquad \mathit{Arc\,tg.}\frac{Y}{X} = c\cdot \mathit{Arc\,tg.}\frac{b}{a}$$

und

$$10)\qquad +\sqrt{X^2+Y^2} = \frac{+(a^2+b^2)^{\frac{c}{2}}}{a^c}\cdot\Gamma_c.\ ^{*})$$

---

*) Man wird zu diesem Integrations-Verfahren auch dadurch geführt, daß man statt der Veränderlichen X und Y (in den Gleichungen 3. u. 4.)

Sind nun b, a, c positiv gedacht, so sind auch X und Y positiv, daher

11) $$Arc\,tg.\frac{Y}{X} = Arc\,sin.\frac{Y}{+\sqrt{X^2+Y^2}}$$

und auch

12) $$Arc\,tg.\frac{Y}{X} = Arc\,cos.\frac{X}{+\sqrt{X^2+Y^2}};$$

und setzt man nun in diese letztern beiden Gleichungen links statt $Arc\,tg.\frac{Y}{X}$ seinen Werth aus 9.), und rechts statt $+\sqrt{X^2+Y^2}$ ihren Werth aus 10.), so hat man die Gleichungen der N. 66. noch einmal, wenn auch mit ungemein viel mehr Mühe und Arbeit, als oben zu ihrer Herstellung verwandt worden ist.

Anmerkg. Man setzt gewöhnlich in den Gleichungen N. 66. $a=0$ oder $a=+0$, denkt sich dabei c nicht bloß positiv, sondern auch <1, damit die Integrale zur Linken noch convergent sind, und man leitet so ab (wenn b stets beliebig positiv gedacht wird.

I. $$\int_0^\infty x^{c-1}\cdot Sin\,bx\cdot dx = \frac{\Gamma_c}{b^c}\cdot Sin\tfrac{1}{2}c\pi;$$

II. $$\int_0^\infty x^{c-1}\cdot Cos\,bx\cdot dx = \frac{\Gamma_c}{b^c}\cdot Cos\tfrac{1}{2}c\pi;$$

und noch für $c=\frac{1}{2}$, weil $\Gamma_{\frac{1}{2}}=\sqrt{\pi}$ ist (§. 20. N. 57.),

---

zwei neue Veränderliche R und Θ so einführt, daß $X=R\cdot Cos\,\Theta$ und $Y=R\cdot Sin\,\Theta$ wird, dann Θ eliminirt um R zu finden, und R eliminirt, um Θ zu finden. Man erhält dann sogleich die beiden Gleichungen 9.) und 10.), jedoch in der Form

$$\Theta = c\cdot Arc\,tg.\frac{b}{a} \quad \text{und} \quad R = \frac{(a^2+b^2)^{\frac{c}{2}}}{a^c}\cdot\Gamma_c.$$

Das Verhalten der neuen Veränderlichen R und Θ gegen die alten X und Y ist aber dasselbe, wie wenn X und Y rechtwinkliche, R und Θ dagegen die Polar-Koordinaten wären eines und desselben Punktes in der Ebene.

III. $\int_0^\infty \frac{Sin\, bx}{\sqrt{x}} \cdot dx = \int_{-\infty}^{+\infty} Sin(bx^2) \cdot dx$ *) $= \sqrt{\frac{\pi}{2b}}$,

IV. $\int_0^\infty \frac{Cos\, bx}{\sqrt{x}} \cdot dx = \int_{-\infty}^{+\infty} Cos(bx^2) \cdot dx$ *) $= \sqrt{\frac{\pi}{2b}}$,

wo b beliebig positiv gedacht worden ist, weil man sonst nicht b^c statt $(a^2+b^2)^{\frac{c}{2}}$ d. h. statt $(b^2)^{\frac{c}{2}}$ hätte setzen können, in so ferne die letztere Potenz (in den Gleichungen N. 66.) allemal ihren positiven Werth vorstellen muß.

Diese Resultate I.—IV. darf man aber ohne anderweitige Bestätigung nicht zulassen, da es durchaus nicht erlaubt ist, in den Gleichungen N. 66. $a = 0$ oder $a = +0$ zu setzen, weil bei ihrer Entwickelung a zwar beliebig, groß oder klein, aber stets (positiv und) endlich vorausgesetzt werden mußte, wenn die gemachten Schlüsse gerechtfertigt seyn sollten. — Deshalb haben wir dieselben 4 Resultate I.—IV. in dem später folgenden §. 24. direkter gefunden, ohne solche unerlaubte Verfahrungsweisen eintreten zu lassen **).

---

*) Diese neuen Formen der bestimmten Integrale ergeben sich sogleich, wenn man in denen zur Linken $x = z^2$ setzt und noch den §. 88. N. 3. des VIII. Th. berücksichtigt.

**) Man könnte diese noch gewünschte Bestätigung nöthigenfalls auch hier gleich versuchen, etwa auf nachstehende Weise:

Man müßte zu dem Ende das Integral

$$\int_0^\infty e^{-ax} \cdot x^{c-1} \cdot \frac{Sin}{Cos}\, bx \cdot dx \quad \text{zerlegen in} \quad \int_0^{2\nu\pi} + \int_{2\nu\pi}^\infty$$

und (nach VIII. Th. §. 89. N. 1.) zeigen, daß der 2te Theil dieser Summe, $= \theta \cdot \frac{e^{-a\mathfrak{x}}}{\mathfrak{x}^{1-c}}$ ist, wenn $\mathfrak{x}$ einen Mittelwerth zwischen $2\nu\pi$ und ∞ vorstellt, und θ zwischen 0 und 1 liegt, — daß also dieser Theil, auch wenn man $a = +0$ sich denkt, dennoch, je größer man sich ν denkt, je größer also $\mathfrak{x}$ wird, desto näher der Null rückt und für $\nu = \infty$ mit $+0$ zusammenfällt. Den erstern Theil $\int_0^{2\nu\pi}$ unserer obigen Summe kann man wieder zerlegen in

§. 23.

Fortsetzung der fünften Methode.

In folgendem Beispiel wird man zu einer Differenzial-Gleichung der zweiten Ordnung geführt.

Soll nämlich

$$1)\quad \int_0^\infty \frac{Sin\,ax}{x}\cdot\frac{1}{b^2+x^2}\cdot dx = X_a$$

gefunden werden, so erhält man durch Differenziiren nach a,

$$2)\quad \partial X_a = \int_0^\infty Cos\,ax\cdot\frac{1}{b^2+x^2}\cdot dx$$

und

$$3)\quad \partial^2 X_a = -\int_0^\infty Sin\,ax\cdot\frac{x}{b^2+x^2}\cdot dx;$$

und so wird man dasmal zur linearen Differenzial-Gleichung der 2ten Ordnung

$$b^2\cdot X_a - \partial^2 X_a = \int_0^\infty \frac{Sin\,ax}{x}\cdot dx \quad \text{geführt, d. h. (nach §. 18.}$$

N. 51.) zur Gleichung

$$\int_0^\pi + \int_\pi^{2\pi} + \int_{2\pi}^{3\pi} + \cdots + \int_{(2\nu-1)\pi}^{2\nu\pi},$$

und dies wird, sobald man ν unendlich-groß (und ganz) sich denkt, — eine unendliche Reihe mit abnehmenden Gliedern und abwechselnden Vorzeichen, so daß sie (für $a=+0$ noch) convergent ist, sobald nur c nicht bloß positiv, sondern auch <1 vorausgesetzt wird.

Die vorgelegten Integrale

$$\int_0^\infty e^{-ax}\cdot x^{c-1}\cdot {}^{Sin}_{Cos}\,x\cdot dx$$

haben also für $a=+0$ noch einen bestimmten Werth unter den gemachten Voraussetzungen d. h. für $c<1$; und da sie überdies von $a=+0$ an bis $a=+\infty$ hin stetig sind, so ist kein Grund vorhanden, warum die Gleichungen N. 66. nicht auch noch für $a=+0$ gelten sollten, besonders da auch die Ausdrücke zur Rechten in N. 66. für $a=+0$ keinen Ausnahmsfall erkennen lassen, sondern ebenfalls von $a=+0$ an bis $a=+\infty$ hin immerfort stetig sind.

α) $b^2 \cdot X_a - \partial^2 X_a = \begin{Bmatrix} +\frac{1}{2}\pi \\ -\frac{1}{2}\pi \end{Bmatrix}$, je nachdem $a \begin{Bmatrix} \text{positiv} \\ \text{negativ} \end{Bmatrix}$ ist.

Um jedoch eine einzige Gleichung für alle beiden Fälle zu erhalten, differenziire man die Gleichung α.) nach allem a, und man erhält, wenn noch

β) $\partial X_a = z$

gesetzt wird, für jeden positiven oder negativen Werth von a,

γ) $b^2 \cdot z - \partial^2 z_a = 0.$

Diese reducirte lineare Gleichung, der 2ten Ordnung integrirt, giebt nun sogleich

δ) z oder $\partial X_a = C \cdot e^{ba} + C' \cdot e^{-ba}$,

so daß nur noch die beiden Konstanten C und C' einer nähern Bestimmung entgegen sehen.

Integrirt und differenziirt man die δ. nach allem a, so ergiebt sich noch

ε) $X_a = \frac{C}{b} \cdot e^{ba} - \frac{C'}{b} \cdot e^{-ba} + D$,

wo D eine neue Konstante ist, — und

ζ) $\partial^2 X_a = bC \cdot e^{ba} - bC' \cdot e^{-ba}$.

Setzt man aber diese Werthe von X_a und $\partial^2 X_a$ in die Gleichung α.), welcher genügt werden muß, so findet sich

η) $D = \begin{Bmatrix} +\frac{\pi}{2b^2} \\ -\frac{\pi}{2b^2} \end{Bmatrix}$, je nachdem $a \begin{Bmatrix} \text{positiv} \\ \text{negativ} \end{Bmatrix}$ ist.

Wir müssen daher von nun an zwei Fälle von einander unterscheiden und wir setzen zunächst a positiv voraus.

Um unter dieser letztern Voraussetzung die beiden andern Konstanten C und C' zu bestimmen, muß man von den drei Funktionen X_a, ∂X_a, $\partial^2 X_a$ zwei Eigenschaften kennen für besondere, aber (der Voraussetzung nach) positive

Werthe von a, z. B. für a positiv und sehr (oder unendlich) klein und für a positiv und sehr (oder unendlich) groß *).

---

*) Dürfte man die Konstanten C und C′ aus den Werthen zweier der drei Funktionen X_a, ∂X_a, $\partial^2 X_a$ für $a = 0$ (Null) bestimmen, so würde diese Bestimmung eben so einfach als leicht seyn. Da nämlich $Sin\,ax = 0$ und $Cos\,ax = 1$ wird, für jeden, auch unendlich-großen Werth von x, so oft $a = q-q = 0$ gesetzt wird, so wird offenbar für $a = 0$, $X_a = 0$ und $\partial^2 X_a = 0$, dagegen (nach §. 2. N. 5.), wenn $b = k+g\cdot i$ ist,

$$\partial X_a = \int_0^\infty \frac{1}{b^2+x^2}\cdot dx = \pm\frac{\pi}{2b}, \text{ je nachdem b oder k } \begin{Bmatrix}\text{positiv}\\ \text{negativ}\end{Bmatrix},$$

gedacht worden ist. Nun nimmt man die beiden Gleichungen δ.) und ζ.), setzt in ihnen $a = 0$ und man erhält:

$$\pm\frac{\pi}{2b} = C+C' \quad\text{und}\quad 0 = bC-bC' = C-C';$$

und daraus ergiebt sich

$$C = C' = \pm\frac{\pi}{4b}, \text{ je nachdem b oder k } \begin{Bmatrix}\text{positiv}\\ \text{negativ}\end{Bmatrix} \text{ ist.}$$

Dieses Resultat ist aber faktisch unrichtig.

Wollte man die beiden Gleichungen ε.) und ζ.) nehmen und in ihnen $a = 0$ setzen, so erhielte man

$$0 = \frac{C}{b} - \frac{C'}{b} + D \quad\text{und}\quad 0 = bC-bC'$$

d. h.

$$0 = C-C'+bD \quad\text{und}\quad 0 = C-C';$$

und diese beiden Gleichungen enthalten einen Widerspruch man mag statt D den Werth $\frac{\pi}{2b}$ oder $-\frac{\pi}{2b}$ setzen, während, da wir a positiv vorausgesetzt haben, nur der erstere Werth statt D gesetzt werden darf.

Würde man endlich die beiden Gleichungen δ.) und ε.) nehmen und in ihnen $a = 0$ setzen, so würde man erhalten

$$\pm\frac{\pi}{2b} = C+C' \quad\text{und}\quad 0 = C-C'+D,$$

woraus hervorgeht

$$C = \pm\frac{\pi}{4b} - \tfrac{1}{2}D \quad\text{und}\quad C' = \pm\frac{\pi}{4b} + \tfrac{1}{2}D$$

Um zu diesen Eigenschaften zu gelangen, betrachten wir noch näher die durch $X_{a,}$, $\partial X_{a,}$, $\partial^2 X_{a}$ (in 1.—3.) bezeichneten bestimmten Integrale. Setzen wir in ihnen $ax = z$, so erhält man

$$4)\qquad X_{a,} = a^2 \cdot \int_0^\infty \frac{Sin\, z}{z} \cdot \frac{1}{a^2b^2 + z^2} \cdot dz.$$

$$5)\qquad \partial X_{a,} = a \cdot \int_0^\infty Cos\, z \cdot \frac{1}{a^2b^2 + z^2} \cdot dz.$$

$$6)\qquad \partial^2 X_{a,} = \int_0^\infty z \cdot Sin\, z \cdot \frac{1}{a^2b^2 + z^2} \cdot dz.$$

Wendet man nun den Satz $\odot$ des §. 89. des VIII. Th. an, so ergiebt sich (nach §. 2. N. 5.), wenn noch b positiv vorausgesetzt wird, und wenn X_a, ∂X_a, $\partial^2 X_a$ die Integrale zur Rechten in 1.—3. bedeuten,

$$7)\qquad X_a = a^2 \cdot \frac{Sin\, \xi}{\xi} \cdot \frac{\pi}{2ab} = \frac{Sin\, \xi}{\xi} \cdot \frac{a\pi}{2b},$$

$$8)\qquad \partial X_a = a \cdot Cos\, \xi \cdot \frac{\pi}{2ab} = Cos\, \xi \cdot \frac{\pi}{2b},$$

$$9)\qquad \partial^2 X_a = \xi \cdot Sin\, \xi \cdot \frac{\pi}{2ab},$$

wo ξ irgend einen positiven Werth, von $\frac{1}{\infty}$ oder $+0$ an bis $+\infty$ hin vorstellt, der für jeden andern Werth von a und b ein anderer seyn kann, und der in den drei letztern

---

d. h. wenn $\frac{\pi}{2b}$ statt D gesetzt wird (nach η.)

$$C = \begin{Bmatrix} 0 \\ -\frac{\pi}{2b} \end{Bmatrix} \text{ und } C' = \begin{Bmatrix} \frac{\pi}{2b} \\ 0 \end{Bmatrix}, \text{ je nachdem b oder k } \begin{Bmatrix} \text{positiv} \\ \text{negativ} \end{Bmatrix} \text{ ist.}$$

Diese Resultate sind nun zwar faktisch vollkommen richtig, wie das oben im Texte folgende Verfahren gründlich nachweist; dagegen ist der Weg, auf welchem wir dazu gelangt sind, entschieden verwerflich, da wir, wenn a positiv vorausgesetzt worden ist, nie zu gleicher Zeit (bei der Bestimmung der Konstanten) $a = 0$ (oder a negativ) annehmen dürfen.

Aus diesen Gründen ist der Weg des Textes oben gewählt, um zur Bestimmung der Konstanten C und C′ zu gelangen.

Gleichungen selbst nicht nothwendig als ein und derselbe gedacht werden darf.

Die Gleichung 9.) läßt nun über den Gang der Werthe von $\partial^2 X_a$ (für die verschiedenen Werthe von a) nichts erkennen, weil mit jedem andern Werth von a auch ξ anders werden kann, wenn auch $Sin\,\xi$ stets zwischen -1 und $+1$ liegt. Die Gleichung 8.) läßt dagegen erkennen

daß der Werth von ∂X_a für keinen Werth von a größer als $\frac{\pi}{2b}$ werden kann.

Aus dieser Eigenschaft, in Verbindung mit der Gleichung δ.) läßt sich nun folgern, daß

$$10) \qquad C = 0$$

seyn müsse, weil sonst (unter den gemachten Voraussetzungen) ∂X_a mit a zugleich bis in das Unendliche wachsen würde (was der N. 8. widerspricht).

Aus der Gleichung 7.) läßt sich wiederum über den Gang der Werthe von X_a (für die verschiedenen Werthe von a) nichts folgern, da ξ mit a zugleich sich ändern kann; läßt man aber das Integral X_a in 1.) unverändert, so erhält man nach derselben Formel ⊙ des §. 89. des **VIII.** Th.

$$11) \qquad X_a = \frac{Sin\,a\xi}{\xi} \cdot \frac{\pi}{2b};$$

und dieser Ausdruck rechts wird für $a = \frac{1}{\infty} = +0$ offenbar selber $= \frac{1}{\infty} = +0$, es mag ξ unendlich-groß, oder endlich, oder unendlich-klein seyn. — Diese Eigenschaft in die Gleichung ε. substituirt, und statt D und C ihre Werthe (aus η. und 10.) gesetzt, giebt nun sogleich (weil $a = +0$)

$$12) \qquad C' = \frac{\pi}{2b}.$$

Man hat daher (aus 1.—3. und ε., δ. und ζ.)

67) $$\int_0^\infty \frac{Sin\, ax}{x} \cdot \frac{1}{b^2+x^2} \cdot dx = \frac{\pi}{2b^2} \cdot (1-e^{-ba}),$$

68) $$\int_0^\infty Cos\, ax \cdot \frac{1}{b^2+x^2} \cdot dx = \frac{\pi}{2b} \cdot e^{-ba},$$

69) $$\int_0^\infty Sin\, ax \cdot \frac{x}{b^2+x^2} \cdot dx = \frac{\pi}{2} \cdot e^{-ba},$$

wenn nur a und b beliebig positiv gedacht werden.

Für einen negativen Werth von b gelten die Gleichungen 7.—9. und 11. (nach §. 2. N. 5.) noch, sobald man nur zur Rechten statt des negativen b, den positiven Werth $-b$ schreibt. Für $a = +0$ wird also nun $\partial X_a = -\frac{\pi}{2b}$ und dieser positive Werth $-\frac{\pi}{2b}$ ist zugleich der größeste, den ∂X_a annimmt. Daher ist nun $C' = 0$, weil sonst $C' \cdot e^{-ba}$ mit a zugleich unendlich-groß werden würde. Man behält jetzt $\partial X_a = C \cdot e^{ba}$ und es wird für $a = +0$, (aus ε.) $-\frac{\pi}{2b} = C$. — Die Gleichungen 67.—69.) gelten daher auch noch, wenn b negativ ist, sobald man dann $-b$ überall statt b schreibt.

Dieselben Gleichungen 67.—69., die für einen positiven Werth von b gelten, bleiben aber auch noch wahr für einen imaginären Werth $k+g \cdot i$ von b mit positivem reellen Theil k; und jene umgeänderten Gleichungen, welche für einen negativen Werth von b gelten, bleiben auch noch wahr für einen imaginären Werth $k+g \cdot i$ von b, wenn der reelle Theil k negativ ist.

Es wird dieses zunächst aus den Rechnungen der Note vermuthet, dann aber auch wie folgt, erwiesen:

Es ist, wenn man $x-g = z$ setzt, dabei g beliebig reell, aber k positiv sich denkt,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{Sin\, ax}{x-g\pm k\cdot i}\cdot dx = Cos\, ag\cdot \int_{-\infty}^{\infty} \frac{Sin\, az}{z\pm k\cdot i}\cdot dz$$
$$+ Sin\, ag\cdot \int_{-\infty}^{\infty} \frac{Cos\, az}{z\pm k\cdot i}\cdot dz,$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{Cos\, ax}{x-g\pm k\cdot i}\cdot dx = -Sin\, ag\cdot \int_{-\infty}^{\infty} \frac{Sin\, az}{z\pm k\cdot i}\cdot dz$$
$$+ Cos\, ag\cdot \int_{-\infty}^{\infty} \frac{Cos\, az}{z\pm k\cdot i}\cdot dz.$$

Ferner ist, wenn man in den folgenden Brüchen Zähler und Nenner mit $z\mp k\cdot i$ multiplicirt,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{Sin\, az}{z\pm k\cdot i}\cdot dz = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{z\cdot Sin\, az}{z^2+k^2}\cdot dz \mp i\cdot k\cdot \int_{-\infty}^{\infty} \frac{Sin\, az}{z^2+k^2}\cdot dz,$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{Cos\, az}{z\pm k\cdot i}\cdot dz = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{z\cdot Cos\, az}{z^2+k^2}\cdot dz \mp i\cdot k\cdot \int_{-\infty}^{\infty} \frac{Cos\, az}{z^2+k^2}\cdot dz.$$

Da nun von diesen 4 Integralen zur Rechten, das erste und vierte (nach 69. und 68. in Verbindung mit VIII. Th. §. 89. N. 3.) bezüglich $=\pi\cdot e^{-ka}$ und $=\frac{\pi}{k}\cdot e^{-ka}$, das zweite und dritte dagegen (nach VIII. Th. §. 89. N. 4.) der Null gleich sind, so folgt

13) $$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{Sin\, az}{z\pm k\cdot i}\cdot dz = \pi\cdot e^{-ka},$$

14) $$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{Cos\, az}{z\pm k\cdot i}\cdot dz = \mp i\cdot \pi\cdot e^{-ka};$$

folglich auch

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{Sin\, ax}{x-g\pm k\cdot i}\cdot dx = \pi\cdot e^{-ka}\cdot (Cos\, ag \mp i\cdot Sin\, ag)$$
$$= \pi\cdot e^{-ka}\cdot e^{\mp ag\cdot i} = \pi\cdot e^{-a(k\pm g\cdot i)}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{Cos\, ax}{x-g\pm k\cdot i}\cdot dx = \pi\cdot e^{-ka}\cdot (-Sin\, ag \mp i\cdot Cos\, ag)$$
$$= \mp i\pi\cdot e^{-ka}\cdot (Cos\, ag \mp i\cdot Sin\, ag)$$
$$= \mp i\cdot \pi\cdot e^{-a(k\pm g\cdot i)}.$$

Wird nun $\pm k + g \cdot i = b$ gesetzt, so giebt dies

$$\left.\begin{array}{ll} \text{I.} & \int_{\infty}^{+\infty} \frac{Sin\,ax}{x+b\cdot i} \cdot dx = \pi \cdot e^{\mp ab} \\ \text{II.} & \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{Cos\,ax}{x+b\cdot i} \cdot dx = \mp i \cdot \pi \cdot e^{\mp ab} \end{array}\right\} \text{ wenn } b = \pm k + g \cdot i \text{ und } k \text{ positiv ist,}$$

wo alle obern Vorzeichen zugleich gelten, oder alle unteren zugleich. In diesen Gleichungen stecken nun die Gleichungen 13. und 14. als besondere Fälle.

Multiplicirt man aber Zähler und Nenner der Differenzial-Funktionen in I. und II. mit $x - b \cdot i$, so ergiebt sich hieraus noch

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \cdot Sin\,ax}{b^2+x^2} \cdot dx - i \cdot b \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \frac{Sin\,ax}{b^2+x^2} \cdot dx = \pi \cdot e^{\mp ab},$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \cdot Cos\,ax}{b^2+x^2} \cdot dx - i \cdot b \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \frac{Cos\,ax}{b^2+x^2} \cdot dx = \mp i \cdot \pi \cdot e^{\mp ab}.$$

Und weil von diesen 4 Integralen zur Linken das 2te und 3te der Null gleich sind, so findet sich hieraus sogleich

69′) $$\int_{-\infty}^{\infty} Sin\,ax \cdot \frac{x}{b^2+x^2} \cdot dx = \pi \cdot e^{\mp ab},$$

68′) $$\int_{-\infty}^{\infty} Cos\,ax \cdot \frac{1}{b^2+x^2} \cdot dx = \pm \frac{\pi}{b} \cdot e^{\mp ab},$$

wo $b = \pm k + g \cdot i$ ist und k positiv gedacht.

Integrirt man aber diese letztere Gleichung nach a zwischen den Grenzen $+0$ und a, so erhält man noch

67′) $$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{Sin\,ax}{x} \cdot \frac{1}{b^2+x^2} \cdot dx = \frac{\pi}{b^2}(1 - e^{\mp ab})$$

und dies sind die Gleichungen 67.—69. wieder, nur (nach VIII. Th. §. 89.) doppelt genommen, während $b = \pm k + g \cdot i$ und k positiv gedacht ist, und alle oberen Vorzeichen zugleich gelten oder alle unteren zugleich.

Anmerkg. Dieser Resultate 67.—69. und 67′.—69′. kann

man sich bedienen, um — wenn $\frac{f_x}{F_x}$ eine beliebige ächt gebrochene Funktion von x ist, deren Nenner F_x lauter imaginäre Faktoren hat, — die beiden Integrale

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{f_x}{F_x} \cdot Sin\, ax \cdot dx \quad \text{und} \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f_x}{F_x} \cdot Cos\, ax \cdot dx$$

auszuwerthen.

Zerlegt man nämlich die gebrochene Funktion $\frac{f_x}{F_x}$ in ihre einfachen Partialbrüche, so haben solche die Form

$$\frac{A}{x+p} \quad \text{oder} \quad \frac{A}{(x+p)^n},$$

wo p reell oder imaginär, aber von der Form $g \pm k \cdot i$ ist. Man wird also die gedachte Aufgabe gelöst haben, sobald man die 4 Integrale

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{Sin\, ax}{x-g \pm k \cdot i} \cdot dx, \qquad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{Cos\, ax}{x-g \pm k \cdot i} \cdot dx,$$

und überhaupt

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{Sin\, ax}{(x-g \pm k \cdot i)^n} \cdot dx \quad \text{und} \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{Cos\, ax}{(x-g \pm k \cdot i)^n} \cdot dx$$

für alle positiven und ganzen Werthe von n ausgewerthet haben wird.

Was nun die erstern beiden betrifft, so sind ihre Werthe unter I. und II. im vorstehenden Paragraphen bereits gefunden. Um aber die beiden andern Integrale

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{Sin\, ax}{(x+g \pm k \cdot i)^n} \cdot dx \quad \text{und} \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{Cos\, ax}{(x+g \pm k \cdot i)^n} \cdot dx$$

zu erhalten, darf man nur die in I. und II. gefundenen Resultate, n mal hinter einander nach b differenziiren.

Für $k = 0$ gehören diese Integrale zu den unterbrochenen und haben daher gar keinen Werth; deshalb mußte vorausgesetzt werden, daß der Nenner F_x keine anderen als imaginäre Faktoren habe.

Anmerkg. 2. Da (nach VIII. Th. §. 89. N. 4.) allemal

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{Sin\,ax}{b^2+x^2} \cdot dx = 0$$

ist, so folgt aus der N. 68. auch noch

$$\text{III.} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ax\cdot i}}{b^2+x^2} \cdot dx = \frac{\pi}{b} \cdot e^{\mp ab},$$

wenn b positiv oder imaginär mit positivem Gliede vorausgesetzt wird, und wo rechts das (—) Zeichen gilt, wenn a positiv, das (+) Zeichen dagegen, wenn a negativ gedacht ist. — Ferner haben wir im dritten Beispiel zu §. 21. gefunden

$$1) \quad \int_0^{\infty} e^{-(a+x\cdot i)\cdot y} \cdot y^{c-1} \cdot dy = \frac{\Gamma_c}{(a+x\cdot i)^c},$$

wo die Potenz $(a+x\cdot i)^c$ ihren einfachsten Werth vorstellt, während x beliebig reell, a dagegen beliebig positiv oder imaginär aber mit positivem reellen Theile vorausgesetzt wird.

Multiplicirt man nun diese Gleichung 1. mit $\frac{e^{\beta x\cdot i}}{b^2+x^2}$, und integrirt man dann nach x zwischen den Grenzen $x = -\infty$ und $x = +\infty$, so erhält man

$$2) \quad \int_0^{\infty} \left(e^{-ay} \cdot y^{c-1} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{(\beta-y)x\cdot i}}{b^2+x^2} \cdot dx\right) \cdot dy$$
$$= \Gamma_c \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{b^2+x^2} \cdot \frac{e^{\beta x\cdot i}}{(a+x\cdot i)^c} \cdot dx.$$

A. Ist nun β negativ, so ist $\beta - y$ von $y = 0$ bis zu $y = +\infty$ stets negativ, daher wird (nach III.)

$$3) \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{(\beta-y)x\cdot i}}{b^2+x^2} \cdot dx = \frac{\pi}{b} \cdot e^{-(y-\beta)b};$$

und deshalb geht der Ausdruck zur Linken in 2.) über in

$$\frac{\pi}{b} \cdot e^{\beta b} \cdot \int_0^{\infty} e^{-(a+b)y} \cdot y^{c-1} \cdot dy \quad \text{d. h. in} \quad \frac{\pi}{b} \cdot e^{\beta b} \cdot \frac{\Gamma_c}{(a+b)^c}. \text{ —}$$

Die Gleichung 2.) giebt daher nun, wenn noch $-\beta$ statt β geschrieben wird,

IV. $$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{b^2+x^2}\cdot\frac{e^{-\beta x\cdot i}}{(a+x\cdot i)^c}\cdot dx=\frac{\pi}{b}\cdot\frac{e^{-\beta b}}{(a+b)^c},$$

wo jetzt wieder β, so wie c positiv sind, während a und b positiv oder imaginär sind, aber mit positivem reellen Theil, und wo die Potenzen $(a+x\cdot i)^c$ und $(a+b)^c$ ihre einfachsten Werthe vorstellen.

B. Ist aber das obige β (in 2.) positiv, so ist $\beta-y$ positiv von $y=0$ bis $y=\beta$, aber negativ von $y=\beta$ bis $y=\infty$. Es ist jetzt das Integral

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{(\beta-y)x\cdot i}}{b^2+x^2}\cdot dx=\frac{\pi}{b}\cdot e^{\mp(y-\beta)b} \quad \text{(nach III.)},$$

je nachdem y zwischen $\begin{Bmatrix}0 \text{ und } \beta\\ \beta \text{ und } \infty\end{Bmatrix}$ liegt. — Zerlegt man nun das Integral 2.) zur Linken nach y, in $\int_0^\beta+\int_\beta^\infty$, so findet sich (aus 2.)

V. $$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{b^2+x^2}\cdot\frac{e^{\beta x\cdot i}}{(a+x\cdot i)^c}\cdot dx$$

$$=\frac{\pi}{b\cdot\Gamma_c}\cdot\left[e^{-\beta b}\cdot\int_0^\beta e^{-(a-b)y}\cdot y^{c-1}\cdot dy+e^{+\beta b}\cdot\int_\beta^\infty e^{-(a+b)y}\cdot y^{c-1}\cdot dy\right],$$

wo β, eben so auch c, beliebig positiv gedacht sind, während a und b positiv oder imaginär seyn können, aber mit positivem reellen Theil, und wo die Potenz $(a+x\cdot i)^c$ ihren einfachsten Werth vorstellt.

Aus diesen Resultaten kann man nun wieder deren neue ableiten. — Differenziirt man die IV. zweimal hinter einander nach β, und subtrahirt man das Resultat von der mit b^2 multiplicirten IV. (damit der Nenner b^2+x^2 herausfällt), so erhält man sogleich noch

VI. $$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{-\beta x\cdot i}}{(a+x\cdot i)^c}\cdot dx=0,$$

wo β und c beliebig positiv sind und a beliebig positiv

oder imaginär ist mit positivem reellen Gliede, während die Potenz $(a+x\cdot i)^c$ ihren einfachsten Werth vorstellt.

Behandelt man nun die V. gerade so, d. h. differenziirt man sie zweimal hinter einander nach β und subtrahirt man das Resultat von der mit b^2 multiplicirten V., so erhält man dagegen *)

$$\text{VII.}\quad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{+\beta x\cdot i}}{(a+x\cdot i)^c}\cdot dx = \frac{2\pi}{\Gamma_c}\cdot e^{-\beta a}\cdot \beta^{c-1},$$

wenn β und c beliebig positiv sind, und a beliebig positiv oder imaginär ist mit positivem reellen Gliede, während die Potenz ihren einfachsten Werth vorstellt.

Setzt man aber

$$Cos\beta x \pm i\cdot Sin\beta x \quad \text{statt} \quad e^{\pm\beta x\cdot i},$$

---

*) Die beiden in V. zur Rechten in den eckigen Klammern befindlichen Theile, wenn man sie bezüglich durch p und durch q bezeichnet, so daß p+q die ganze in den eckigen Klammern befindliche Summe vorstellt, lassen sich so behandeln: Aus

$$p = e^{-\beta b}\cdot \int_0^{\beta} e^{-(a-b)\cdot y}\cdot y^{c-1}\cdot dy \quad \text{und} \quad q = e^{\beta b}\cdot \int_{\beta}^{\infty} e^{-(a+b)\cdot y}\cdot y^{c-1}\cdot dy$$

folgt nämlich augenblicklich

$$\partial p_\beta = -b\cdot p + e^{-\beta a}\cdot \beta^{c-1} \quad \text{und} \quad \partial q_\beta = b\cdot q - e^{-\beta a}\cdot \beta^{c-1},$$

also $$\partial(p+q)_\beta = -bp+bq = b(-p+q);$$

folglich $$\partial^2(p+q)_\beta = b(-\partial p_\beta + \partial q_\beta) = b^2(p+q) - 2b\cdot e^{-\beta a}\cdot \beta^{c-1}.$$

Der Ausdruck zur Rechten in V., wenn er zweimal hinter einander nach β differenziirt wird, giebt daher

$$\frac{\pi}{\Gamma_c}\cdot\left[b(p+q) - 2\cdot e^{-\beta a}\cdot \beta^{c-1}\right].$$

Multiplicirt man dagegen die V. mit b^2, so erhält man zur Rechten sogleich

$$\frac{\pi}{\Gamma_c}\cdot b(p+q),$$

und so macht sich die oben vorgeschriebene Rechnung mit Leichtigkeit.

und $(a^2+x^2)^{\frac{c}{2}} \cdot \left[Cos\left(c \cdot Arc\,tg.\,\frac{x}{a}\right)+i \cdot Sin\left(c \cdot Arc\,tg.\,\frac{x}{a}\right)\right]$

statt $(a+x \cdot i)^c$, und zerlegt man die Integrale zur Linken in zwei, in denen die Differenzial-Funktionen nur reelle Formen enthalten, so erhält man neue bestimmte Integrale. — U. s. w. f.

Wir wollen jedoch hier, um es noch einmal zu sagen, bloß die Wege andeuten, auf denen neue bestimmte Integrale ausgewerthet werden können.

§. 24.
Sechste Methode
der Auswerthung bestimmter Integrale.

Ein weiteres Verfahren zu Werthen bestimmter Integrale zu gelangen, besteht darin, daß man entweder statt der vollständigen Differenzial-Funktion oder statt eines Faktors derselben (wofür auch allemal die Einheit genommen werden kann) ein bestimmtes Integral setzt, und das so entstehende Doppel-Integral in umgekehrter Ordnung integrirt (nach VIII. Th. §. 95. N. 3.).

Erstes Beispiel.

Soll z. B.

1) $$K = \int_0^\infty \frac{Sin\,x}{\sqrt{x}} \cdot dx$$

gefunden werden, so kann man von der Wahrheit §. 20. N. 59. ausgehen (indem man daselbst x und a mit einander vertauscht), nämlich von der Gleichung

2) $$\int_0^\infty \frac{e^{-xa}}{\sqrt{a}} \cdot da = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{x}}\ {}^{*)},$$

---

*) In dem Integral 1.) hat x alle Werthe von +0 bis ∞. Soll also die Gleichung 2.) hier verwandt werden, so muß sie auch für alle diese Werthe von x wahr seyn, während sie im §. 20. für jeden positiven endlichen Werth von x erwiesen ist. Da aber beide Seiten der Gleichung

um den Faktor $\frac{1}{\sqrt{x}}$ durch ein bestimmtes Integral ausgedrückt zu haben, — letzteres aber statt $\frac{1}{\sqrt{x}}$ in die 1. substituiren; man erhält dann

$$K = \int_0^\infty \left(\frac{Sin\,x}{\sqrt{\pi}} \cdot \int_0^\infty \frac{e^{-ax}}{\sqrt{a}} \cdot da\right) \cdot dx$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cdot \int_0^\infty \left(\frac{1}{\sqrt{a}} \int_0^\infty e^{-ax} \cdot Sin\,x \cdot dx\right) \cdot da,$$

oder (nach §. 4. N. 8.)

$$K = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cdot \int_0^\infty \frac{1}{(1+a^2)\sqrt{a}} \cdot da;$$

2.) für $x = +0$ in ∞ übergehen, und immer stetig wachsen von $x = +p$ an bis zu $x = +0$ hin, so kann man diese Gleichung 2.) auch noch für $x = +0$ als geltend annehmen.

Man kann aber auch jeden Zweifel noch dadurch beseitigen, daß man das Integral $\int_0^\infty \frac{Sin\,x}{\sqrt{x}} \cdot dx$ zerlegt in $\int_0^\varepsilon \frac{Sin\,x}{\sqrt{x}} \cdot dx + \int_\varepsilon^\infty \frac{Sin\,x}{\sqrt{x}} \cdot dx$, und statt $\int_0^\varepsilon \frac{Sin\,x}{\sqrt{x}} \cdot dx$ (nach VIII. Th. §. 89. N. 2. I.) den Werth $\varepsilon \cdot \frac{Sin\,\theta\varepsilon}{\theta\varepsilon}$ d. h. $\varepsilon - \varepsilon \cdot \frac{\theta^2\varepsilon^2}{3!} + \cdots$ setzt, während θ zwischen 0 und 1 liegt; — so daß man sich überzeugt, daß dieser Theil des Integrals, je kleiner ε gedacht wird, dem Werthe ε immer näher rückt, also für $\varepsilon = +0$ selbst $= +0$ wird. Der andere Theil $\int_\varepsilon^\infty \frac{Sin\,x}{\sqrt{x}} \cdot dx$ unsers Integrals wird nun nach dem Texte behandelt und giebt

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \cdot \int_0^\infty \left(\frac{1}{\sqrt{a}} \cdot \int_\varepsilon^\infty e^{-ax} \cdot Sin\,x \cdot dx\right) \cdot da,$$

während (nach VIII. Th. §. 88. N. 2.)

$$\int_\varepsilon^\infty e^{-ax} \cdot Sin\,x \cdot dx = \int_0^\infty e^{-ax} \cdot Sin\,x \cdot dx - \int_0^\varepsilon e^{-ax} \cdot Sin\,x \cdot dx,$$

dieser letztere Subtrahend aber wieder $= \varepsilon \cdot e^{-a \cdot \theta\varepsilon} \cdot Sin(\theta\varepsilon)$ ist (wo θ zwischen 0 und 1 liegt), also mit ε zugleich immer kleiner und kleiner und zuletzt unendlich-klein wird.

folglich ist nun (nach §. 9. N. 18., wenn statt der dortigen m und p bezüglich $\frac{1}{2}$ und 2 gesetzt werden)

$$\text{I.}\qquad K = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{\frac{1}{2}\pi}{Sin\frac{1}{4}\pi} = \sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

Zweites Beispiel.

Genau auf demselben Wege erhält man

$$\int_0^\infty \frac{Cos\,x}{\sqrt{x}} \cdot dx = \int_0^\infty \left(\int_0^\infty \frac{Cos\,x}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{e^{-ax}}{\sqrt{a}} \cdot da \right) \cdot dx$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cdot \int_0^\infty \left(\frac{1}{\sqrt{a}} \int_0^\infty e^{-ax} \cdot Cos\,x \cdot dx \right) \cdot da,$$

also (nach §. 4. N. 9.)

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cdot \int_0^\infty \frac{\sqrt{a}}{1+a^2} \cdot da,$$

folglich (nach §. 9. N. 18.)

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{\frac{1}{2}\pi}{Sin\frac{3}{4}\pi} = \tfrac{1}{2}\sqrt{\pi} \cdot \frac{1}{Sin\frac{1}{4}\pi} = \sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

Drittes Beispiel.

Soll

$$\text{1)}\qquad K = \int_0^\infty \frac{Sin\,x}{x^{1-c}} \cdot dx = \int_0^\infty x^{c-1} \cdot Sin\,x \cdot dx$$

gefunden werden, wo c zwischen -1 und $+1$ liegend gedacht wird (damit das Integral nicht zu den unterbrochenen gehöre), so kann man §. 20. β. zu Hilfe nehmen, um den Faktor x^{c-1} oder $\frac{1}{x^{1-c}}$ durch ein bestimmtes Integral auszudrücken, indem man a statt x, ferner die der Voraussetzung zufolge stets positive Differenz $1-c$ statt p, und x statt k setzt, und man hat

$$\text{2)}\qquad \frac{\Gamma_{1-c}}{x^{1-c}} = \int_0^\infty \frac{e^{-ax}}{a^c} \cdot da,$$

welche Gleichung für alle Werthe von x gilt, die x in

unserem Integral haben soll (S. die Note zum 1ten Beispiel). — Dadurch wird nun, wenn man dieses bestimmte Integral statt des Faktors x^{c-1} in die 1.) substituirt,

$$3)\qquad K = \int_0^\infty \left(\frac{1}{a^c \cdot \Gamma_{1-c}} \cdot \int_0^\infty e^{-ax} \cdot Sin\, x \cdot dx\right) \cdot da$$

d. h. (nach §. 4. N. 8.)

$$4)\qquad K = \frac{1}{\Gamma_{1-c}} \cdot \int_0^\infty \frac{a^{(1-c)-1}}{1+a^2} \cdot da$$

oder (nach §. 9. N. 18.)

$$5)\qquad K = \frac{1}{\Gamma_{1-c}} \cdot \frac{\frac{1}{2}\pi}{Sin\, \frac{1}{2}(1-c)\pi} = \frac{1}{\Gamma_{1-c}} \cdot \frac{\frac{1}{2}\pi}{Cos\, \frac{1}{2}c\pi},$$

wo c zwischen -1 und $+1$ liegt.

Wird dagegen c positiv gedacht, also zwischen 0 und $+1$, so hat man noch (nach §. 20. ε.)

$$\Gamma_{1-c} \cdot \Gamma_c = \frac{\pi}{Sin\, c\pi} = \frac{\pi}{2 Sin\, \frac{1}{2}c\pi \cdot Cos\, \frac{1}{2}c\pi},$$

und die Gleichung 5.) geht dann noch über in

$$6)\qquad K = \Gamma_c \cdot Sin\, \tfrac{1}{2}c\pi,$$

wo nun c positiv und <1 gedacht werden muß.

Es ist aber auch (nach §. 20. Anmerkg. 2.), wenn c zwischen -1 und $+1$ liegt,

$$\Gamma_{1-c} \cdot \Gamma_{1+c} = \frac{c\pi}{Sin\, c\pi};$$

und dadurch geht die Gleichung 5.) noch über in

$$7)\qquad K = \frac{1}{c} \cdot \Gamma_{1+c} \cdot Sin\, \tfrac{1}{2}c\pi = (c-1)!\, Sin\, \tfrac{1}{2}c\pi,$$

wo c wieder zwischen -1 und $+1$ liegt.

Viertes Beispiel.

Und auf dieselbe Weise findet man

$$\int_0^\infty \frac{Cos\,x}{x^{1-c}} \cdot dx = \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{Cos\,x}{x^{1-c}} \cdot \frac{x^{1-c}}{\Gamma_{1-c}} \cdot \frac{e^{-ax}}{a^c} \cdot dx \cdot da$$

$$= \frac{1}{\Gamma_{1-c}} \cdot \int_0^\infty \left(\frac{1}{a^c} \cdot \int_0^\infty e^{-ax} \cdot Cos\,x \cdot dx \right) \cdot da$$

$$= \frac{1}{\Gamma_{1-c}} \cdot \int_0^\infty \frac{a^{(2-c)-1}}{1+a^2} \cdot da$$

$$= \frac{1}{\Gamma_{1-c}} \cdot \frac{\frac{1}{2}\pi}{Sin\,\frac{1}{2}(2-c)\pi} = \frac{\pi}{2 \cdot \Gamma_{1-c} \cdot Sin\,\frac{1}{2}c\pi}$$

$$= \frac{1}{c} \cdot \Gamma_{1+c} \cdot Cos\,\tfrac{1}{2}c\pi = (c-1)!\, Cos\,\tfrac{1}{2}c\pi,$$

wenn c zwischen -1 und $+1$ liegt, — und

$$= \Gamma_c \cdot Cos\,\tfrac{1}{2}c\pi,$$

wenn c positiv und <1 ist, weil nur dann das Integral Γ_c d. h. $\int_{+0}^1 \left(L\frac{1}{x}\right)^{c-1} \cdot dx$ d. h. $\int_0^\infty e^{-x} \cdot x^{c-1} \cdot dx$ eine Bedeutung hat.

Anmerkg. 1. Setzt man in diesen vier Resultaten $x = bz$, so erhält man sogleich noch, wenn b positiv vorausgesetzt wird (damit die Grenzen der neuen Integrale wieder 0 und $+\infty$ werden)

70) $$\int_0^\infty \frac{Sin\,bx}{\sqrt{x}} \cdot dx = 2\int_0^\infty Sin(bx^2) \cdot dx \; {}^{*)}$$

$$= \int_{-\infty}^\infty Sin(bx^2) \cdot dx = \sqrt{\frac{\pi}{2b}};$$

71) $$\int_0^\infty \frac{Cos\,bx}{\sqrt{x}} \cdot dx = 2\int_0^\infty Cos(bx^2) \cdot dx$$

$$= \int_{-\infty}^\infty Cos(bx^2) \cdot dx = \sqrt{\frac{\pi}{2b}};$$

---

*) Man erhält dies Integral aus dem zur Linken, wenn man $x = z^2$ setzt. — So auch in den drei folgenden Nummern.

$$72)\quad \int_0^\infty x^{c-1}\cdot Sin\, bx\cdot dx = 2\int_0^\infty x^{2c-1}\cdot Sin(bx^2)\cdot dx\ ^{*)}$$

$$= \frac{1}{c}\cdot\frac{\Gamma_{1+c}}{b^c}\cdot Sin\tfrac{1}{2}c\pi = \frac{(c-1)!}{b^c}\cdot Sin\tfrac{1}{2}c\pi$$

$$= \frac{\Gamma_c}{b^c}\cdot Sin\tfrac{1}{2}c\pi;$$

---

*) Nach VIII. Th. §§. 90.—93. ist dieses Integral, trotz dem, daß $2c-1$ nicht bloß negativ, sondern auch positiv werden kann, je nachdem $c<\frac{1}{2}$ oder $c>\frac{1}{2}$ ist (während c immer <1 vorausgesetzt wird) doch ein convergentes, weil die unendliche Reihe von Integralen, in die sich das vorgelegte zerlegt, wenn man die Grenzen nach und nach 0 und $\sqrt{\frac{\pi}{b}}$, dann $\sqrt{\frac{\pi}{b}}$ und $\sqrt{\frac{2\pi}{b}}$, ferner $\sqrt{\frac{2\pi}{b}}$ und $\sqrt{\frac{3\pi}{b}}$, u. s. f., — überhaupt $\sqrt{\frac{n\pi}{b}}$ und $\sqrt{\frac{(n+1)\pi}{b}}$ (wo n positiv ganz) seyn läßt, — eine solche ist, deren Glieder abwechselnde Vorzeichen haben und dabei stets abnehmen. Es bildet nämlich, wenn $\sqrt{\frac{n\pi}{b}} = \alpha$ und $\sqrt{\frac{(n+1)\pi}{b}} = \beta$ gesetzt wird, das Integral $\int_\alpha^\beta x^{2c-1}\cdot Sin(bx^2)\cdot dx$ den Inhalt einer krummlinigen Figur, welcher immer kleiner ist als der Inhalt

$$\int_\alpha^\beta x^{2c-1}\cdot dx = \frac{1}{2c}(\beta^{2c}-\alpha^{2c}) = \frac{\pi^c}{2c\cdot b^c}\cdot[(n+1)^c-n^c]$$

einer andern Figur, welche um erstere beschrieben ist. Nun ist aber, wenn $n=\frac{1}{v}$ gesetzt wird

$$(n+1)^c-n^c = \left(\frac{1}{v}+1\right)^c-\left(\frac{1}{v}\right)^c = \frac{(1+v)^c}{v^c}-\frac{1}{v^c}$$

$$= c\cdot v^{1-c}+c_2\cdot v^{2-c}+c_3\cdot v^{3-c}+\cdots,$$

wo c_2, c_3, ꝛc. ꝛc. Binomial-Koeffizienten vorstellen und wo, da $c<1$ ist, alle Exponenten positiv sind. Diese letzteren Figuren werden also desto kleiner, je kleiner v d. h. je größer n gedacht wird, und werden unendlich-klein für $n=\infty$; und das letztere gilt natürlich nun auch von den Inhalten der ersteren Figuren, welche in diese letztern eingeschlossen sind. — Dagegen finden diese Schlüsse nicht mehr statt, sobald $c=1$ oder gar $c>1$ seyn sollte.

73) $\int_0^\infty x^{c-1}\cdot Cos\, bx\cdot dx = 2\int_0^\infty x^{2c-1}\cdot Cos(bx^2)\cdot dx$

$$= \frac{1}{c}\cdot\frac{\Gamma_{1+c}}{b^c}\cdot Cos\tfrac{1}{2}c\pi = \frac{(c-1)!}{b^c}\cdot Cos\tfrac{1}{2}c\pi$$

$$= \frac{\Gamma_c}{b^c}\cdot Cos\tfrac{1}{2}c\pi,$$

wenn nur überall b positiv ist, während in 72. und 73. der Werth c zwischen -1 und $+1$ liegen muß, und die Formen $\frac{\Gamma_c}{b^c}\cdot Sin\tfrac{1}{2}c\pi$ und $\frac{\Gamma_c}{b^c}\cdot Cos\tfrac{1}{2}c\pi$ sogar c positiv voraussetzen, so lange, wie bisher, unter

Γ_c das Integral $\int_0^\infty x^{c-1}\cdot e^{-x}\cdot dx$ oder $\int_{+0}^1 \left(L\frac{1}{x}\right)^{c-1}\cdot dx$

verstanden wird. — Dabei ist b, wo es erscheint, positiv vorausgesetzt worden.

Dies sind aber die Gleichungen I.—IV. in der Anmerkung zum 2ten Beispiel des §. 21., welche dort noch einer Bestätigung entgegen sahen, die sie nun erhalten haben. — Für $c = \frac{1}{2}$ gehen aus den NN. 72. 73. sogleich wieder die NN. 70. und 71. hervor, weil (nach §. 20. N. 57.) $\Gamma_{\frac{1}{2}} = \sqrt{\pi}$ ist.

Anmerkg. Aus den Gleichungen

$$\int_{-\infty}^\infty Sin(x^2)\cdot dx = \sqrt{\frac{\pi}{2}} = \int_{-\infty}^\infty Cos(x^2)\cdot dx,$$

welche aus den vorstehenden NN. 70. und 71. für $b = 1$ hervorgehen, folgt nicht bloß (nach VIII. Th. §. 98. III.) wieder das allgemeiner scheinende Resultat der NN. 70. und 71., sondern auch (nach ebendaselbst IV.) noch

I. $$\int_{-\infty}^\infty Sin\left[\left(ax-\frac{b}{x}\right)^2\right]\cdot dx = \frac{1}{a}\sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

und

II. $$\int_{-\infty}^\infty Cos\left[\left(ax-\frac{b}{x}\right)^2\right]\cdot dx = \frac{1}{a}\sqrt{\frac{\pi}{2}};$$

woraus sich, — wenn man

$$\frac{Sin}{Cos}\left(a^2x^2+\frac{b^2}{x^2}-2ab\right)$$

in $\frac{Sin}{Cos}\left(a^2x^2+\frac{b^2}{x^2}\right)\cdot Cos\,2ab \mp \frac{Cos}{Sin}\left(a^2x^2+\frac{b^2}{x^2}\right)\cdot Sin\,2ab$

zerlegt, — noch ergiebt

$$\text{III.}\quad \int_{-\infty}^{\infty} Sin\left(a^2x^2+\frac{b^2}{x^2}\right)\cdot dx = (Cos\,2ab+Sin\,2ab)\cdot\frac{1}{a}\sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \frac{\sqrt{\pi}}{a}\times Sin\left(\frac{\pi}{4}+2ab\right)$$

und

$$\text{IV.}\quad \int_{-\infty}^{\infty} Cos\left(a^2x^2+\frac{b^2}{x^2}\right)\cdot dx = (Cos\,2ab-Sin\,2ab)\cdot\frac{1}{a}\sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \frac{\sqrt{\pi}}{a}\times Cos\left(\frac{\pi}{4}+2ab\right),$$

wenn nur (in I.—IV.) a und b beliebig positiv sind.

Fünftes Beispiel.

Wäre das im §. 23. N. 68. bereits ausgewerthete Integral, nämlich

$$\int_0^{\infty}\frac{Cos\,ax}{b^2+x^2}\cdot dx \quad \ldots (=K)$$

noch einmal auszuwerthen, und dächte man daran, daß

$$\int_0^{\infty} e^{-v\cdot a}\cdot dv = \frac{1}{a} = \int_0^{\infty} 2y\cdot e^{-y^2a}\cdot dy\ {}^{*}),$$

also

$$\frac{1}{b^2+x^2} = \int_0^{\infty} 2y\cdot e^{-y^2(b^2+x^2)}\cdot dy$$

ist, — so würde man sogleich haben

$$K = \int_0^{\infty}\left(2y\cdot e^{-b^2y^2}\cdot\int_0^{\infty} e^{-y^2x^2}\cdot Cos\,ax\cdot dx\right)\cdot dy.$$

Nun ist aber (nach §. 21. N. 64.)

---

*) Indem man $v = y^2$ setzt.

$$\int_0^\infty e^{-y^2x^2} \cdot Cos\,ax \cdot dx = \frac{1}{2y}\sqrt{\pi} \times e^{-\frac{a^2}{4y^2}};$$

folglich wird

$$K = \sqrt{\pi} \cdot \int_0^\infty e^{-\left(b^2y^2 + \frac{a^2}{4y^2}\right)} \cdot dy.$$

Dieses letztere Integral kann man nun aus dem bekannten Werthe $\frac{1}{2}\sqrt{\pi} = \int_0^\infty e^{-t^2} \cdot dt$ ableiten, wie solches bereits §. 21. N. 62. geschehen ist. — Man findet, wenn man dort b^2 statt b, und $\frac{1}{4}a^2$ statt a setzt, und wenn man sich das neue b wieder positiv denkt, eben so wie auch das neue a,

$$\int_0^\infty e^{-b^2y^2 - \frac{a^2}{4y^2}} \cdot dy = \frac{1}{2b} \cdot \sqrt{\pi} \times e^{-ab},$$

wodurch

$$K = \frac{\pi}{2b} \cdot e^{-ab}$$

sich ergiebt, gerade so wie im §. 23. N. 68.

§. 25.

Siebente Methode

der Auswerthung bestimmter Integrale.

Eine weitere Methode, bestimmte Integrale auszuwerthen, besteht darin,

> daß man die Differenzial-Funktion in mehrere Theile zertheilt, dadurch also auch das vorgelegte bestimmte Integral in mehrere Einzel-Integrale zerlegt, in der Hoffnung, daß sich letztere auswerthen lassen.

Auf diese Weise haben wir im §. 18. das Integral $\int_{+0}^{\pi} L(Sin\,x) \cdot dx$ umgeformt in $\frac{1}{2}\int_{+0}^{\pi} L(Sin\,x)^2 \cdot dx$, dies letztere Integral aber dann zerlegt in

$\frac{1}{2}\int_{+0}^{\pi} L(1+Cos\,x) \cdot dx + \frac{1}{2}\int_{+0}^{\pi} L(1-Cos\,x) \cdot dx$, und letztere beiden Integrale dann dadurch ausgewerthet, daß wir das allgemeinere

Integral $\int_0^\pi L(1+a\cdot Cos\,x)\cdot dx$ nach der 4ten Methode (des §. 15.) auswertheten und dann statt a abwechselnd $+1$ und -1 setzten.

Auf dieselbe Weise haben wir im §. 23. Anmerkg. 2. die Integrale $\int_{-\infty}^{+\infty} Sin\,ax\cdot\frac{f_x}{F_x}\cdot dx$ und $\int_{-\infty}^{+\infty} Cos\,ax\cdot\frac{f_x}{F_x}\cdot dx$ in lauter Theil-Integrale zerlegt, deren Werthe gefunden werden konnten.

So noch an mehreren andern Orten.

Erstes Beispiel.

Gesetzt es wäre auszuwerthen der Werth des bestimmten Integrals

$$\int_{-\infty}^{+\infty} Sin(b^2+x^2)\cdot Cos\,2bx\cdot dx,$$

so wird man das Produkt $Sin(b^2+x^2)\cdot Cos\,2bx$ zerlegen in die Summe $\frac{1}{2}Sin((b-x)^2)+\frac{1}{2}Sin((b+x)^2)$; und unser vorgelegtes Integral ist dann

$$=\tfrac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} Sin((b-x)^2)\cdot dx+\tfrac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} Sin((b+x)^2)\cdot dx.$$

Da aber (nach VIII. Th. §. 98. II.) diese letztern beiden Integrale denselben Werth haben, wie das im §. 24. N. 71. bereits ausgewerthete Integral $\int_{-\infty}^{+\infty} Sin(x^2)\cdot dx$, nämlich den Werth $\sqrt{\frac{\pi}{2}}$, so ergiebt sich unser vorgelegtes Integral $=\sqrt{\frac{\pi}{2}}$.

Behandelt man die analogen Integrale auf dieselbe Weise, so findet sich bald

$$74)\quad\begin{cases}\int_{-\infty}^{+\infty} Sin(b^2+x^2)\cdot Cos\,2bx\cdot dx=\sqrt{\frac{\pi}{2}};\\[2mm] \int_{-\infty}^{+\infty} Cos(b^2+x^2)\cdot Cos\,2bx\cdot dx=\sqrt{\frac{\pi}{2}};\\[2mm] \int_{-\infty}^{+\infty} Sin(b^2+x^2)\cdot Sin\,2bx\cdot dx=0;\\[2mm] \int_{-\infty}^{+\infty} Cos(b^2+x^2)\cdot Sin\,2bx\cdot dx=0,\end{cases}$$

welche beiden letztern Resultate sich (nach VIII. Th. §. 88. N. 4.) von selbst verstehen. — Der Werth b kann beliebig reell gedacht werden.

Zweites Beispiel.

Soll

$$\int_{-\infty}^{+\infty} Sin(x^2) \cdot Cos\, 2bx \cdot dx = K$$

ausgewerthet werden, und verfährt man dabei auf die eben beschriebene Weise, so erhält man zunächst

$$Sin(x^2) \cdot Cos\, 2bx = \tfrac{1}{2} Sin(x^2 - 2bx) + \tfrac{1}{2} Sin(x^2 + 2bx),$$

und es ist daher das vorgelegte bestimmte Integral

$$K = \tfrac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} Sin(x^2 - 2bx) \cdot dx + \tfrac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} Sin(x^2 + 2bx) \cdot dx.$$

Weil aber $x^2 \mp 2bx = (x \mp b)^2 - b^2$ ist, so hat man wieder

$$Sin(x^2 \mp 2bx) = Sin((x \mp b)^2) \cdot Cos(b^2) - Cos((x \mp b)^2) \cdot Sin(b^2);$$

und es findet sich daher, wenn man §. 24. N. 70. und N. 71. zu Hilfe nimmt:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} Sin(x^2) \cdot Cos\, 2bx \cdot dx = [Cos(b^2) - Sin(b^2)] \cdot \sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

Und ganz auf analogem Wege findet man

$$\int_{-\infty}^{+\infty} Cos(x^2) \cdot Cos\, 2bx \cdot dx = [Cos(b^2) + Sin(b^2)] \cdot \sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

Setzt man aber hier noch $x = z \cdot \sqrt{a}$, und b statt $2b\sqrt{a}$, also $\frac{b}{2\sqrt{a}}$ statt b, so giebt dies

75) $$\left\{\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} Sin(ax^2) \cdot Cos(bx) \cdot dx &= \left(Cos\frac{b^2}{4a} - Sin\frac{b^2}{4a}\right) \cdot \sqrt{\frac{\pi}{2a}} \\ &= \sqrt{\frac{\pi}{a}} \times Sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{b^2}{4a}\right) \\ \text{und} \\ \int_{-\infty}^{+\infty} Cos(ax^2) \cdot Cos(bx) \cdot dx &= \left(Cos\frac{b^2}{4a} + Sin\frac{b^2}{4a}\right) \cdot \sqrt{\frac{\pi}{2a}} \\ &= \sqrt{\frac{\pi}{a}} \times Cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{b^2}{4a}\right), \end{aligned}\right.$$

wenn nur a beliebig positiv und b beliebig reell ist. Stände in diesen Gleichungen 75. links statt $Cos\,bx$ jetzt $Sin\,bx$, so würde (nach VIII. Th. §. 88. N. 4.), zur Rechten 0 stehen müssen.

Drittes Beispiel.

Sollen die Integrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} Sin(ax^2+bx)\cdot dx \quad \text{und} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} Cos(ax^2+bx)\cdot dx$$

ausgewerthet werden, so findet man sogleich aus

$$Sin(ax^2+bx) = Sin(ax^2)\cdot Cos\,bx + Cos(ax^2)\cdot Sin\,bx$$

$$Cos(ax^2+bx) = Cos(ax^2)\cdot Cos\,bx - Sin(ax^2)\cdot Sin\,bx$$

und aus N. 75.

$$76)\quad \begin{cases} \int_{-\infty}^{+\infty} Sin(ax^2+bx)\cdot dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}} \times Sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{b^2}{4a}\right); \\ \int_{-\infty}^{+\infty} Cos(ax^2+bx)\cdot dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}} \times Cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{b^2}{4a}\right), \end{cases}$$

wenn nur a beliebig positiv und b beliebig reell ist.

Und eben so findet sich noch

$$77)\quad \begin{cases} \int_{-\infty}^{+\infty} Sin(ax^2+bx+c)\cdot dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}} \times Sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{b^2-4ac}{4a}\right) \\ \int_{-\infty}^{+\infty} Cos(ax^2+bx+c)\cdot dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}} \times Cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{b^2-4ac}{4a}\right), \end{cases}$$

wenn nur a beliebig positiv ist und b und c beliebig reell gedacht sind.

Viertes Beispiel.

So würde man nach derselben Methode das Integral

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(a+cx)\cdot Cos\,rx}{m+2nx+x^2}\cdot dx$$

(in welchem $m-n^2$ positiv gedacht werden muß, damit der Nenner nie Null wird), dadurch, daß man $x+n = z$ setzt,

zunächst umwandeln (wenn der Bequemlichkeit wegen $m-n^2=b^2$ und $a-cn=g$ gesetzt wird) in

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{(g+cz)\cdot Cos(rz-rn)}{b^2+z^2}\cdot dz$$

und dann zerlegen in

$$Cos\,rn\cdot\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{(g+cz)\cdot Cos\,rz}{b^2+z^2}\cdot dz+Sin\,rn\cdot\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{(g+cz)\cdot Sin\,rz}{b^2+z^2}\cdot dz.$$

Das erstere dieser beiden Integrale zerlegt sich dann wieder in

$$g\cdot\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{Cos\,rz}{b^2+z^2}\cdot dz+c\cdot\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{z\cdot Cos\,rz}{b^2+z^2}\cdot dz,$$

von denen das letztere (nach VIII. Th. §. 88. N. 4.) $=0$ ist; das andere der obigen Integrale zerlegt sich dagegen in

$$g\cdot\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{Sin\,rz}{b^2+z^2}\cdot dz+c\cdot\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{z\cdot Sin\,rz}{b^2+z^2}\cdot dz,$$

von denen das erstere $=0$ ist, wiederum nach VIII. Th. §. 88. N. 4.

Da nun (nach §. 23. NN. 68. und 69.), wenn r und b positiv vorausgesetzt werden (mit Zuziehung der N. 3. des §. 88. des VIII. Th.)

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{Cos\,rz}{b^2+z^2}\cdot dz=\frac{\pi}{b}\cdot e^{-br}$$

und

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{z\cdot Sin\,rz}{b^2+z^2}\cdot dz=\pi\cdot e^{-br}$$

ist, sobald man b und r positiv voraussetzt, so findet sich zuletzt:

$$78)\quad \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{(a+cx)\cdot Cos\,rx}{m+2nx+x^2}\cdot dx$$
$$=\left(\frac{a-cn}{\sqrt{m-n^2}}\cdot Cos\,rn+c\cdot Sin\,rn\right)\cdot\pi\cdot e^{-r\cdot\sqrt{m-n^2}}.$$

Und ganz auf dieselbe Weise findet sich noch

79) $$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{(a+cx)\cdot Sin\, rx}{m+2nx+x^2}\cdot dx$$
$$=\left(c\cdot Cos\, rn-\frac{a-cn}{\sqrt{m-n^2}}\cdot Sin\, rn\right)\cdot\pi\cdot e^{-r\cdot\sqrt{m-n^2}},$$

wenn nur in beiden Gleichungen (78. und 79.) $\sqrt{m-n^2}$ und r positiv (ganz oder gebrochen oder irrational) sind.

§. 26.

Fortsetzung der siebenten Methode.

Am entschiedensten hebt sich diese (siebente) Methode als eine eigenthümliche heraus, wenn man die Differenzial-Funktion in unendlich viele Theile, d. h. in eine unendliche Reihe zerlegt *).

Schon im §. 14. F. ist auf diesem Wege $\int_0^\infty \frac{x^{m-1}}{1+x^p}\cdot dx$ berechnet worden. Gleichzeitig wurde dort darauf aufmerksam gemacht, daß man, um im Resultate stets convergente Reihen zu erhalten, dieses Integral erst zerlegen müsse in

$$\int_0^1 \frac{x^{m-1}}{1+x^p}\cdot dx+\int_1^\infty \frac{x^{m-1}}{1+x^p}\cdot dx,$$

dann aber bei dem erstern Integral die Funktion $\frac{x^{m-1}}{1+x^p}$ nach steigenden Potenzen von x, also in die Reihe

$$x^{m-1}-x^{m+p-1}+x^{m+2p-1}-x^{m+3p-1}+ \text{ꝛc. ꝛc.}$$

verwandeln müsse, während bei dem anderen Integral dieselbe Funktion, so geschrieben: $\frac{x^{m-p-1}}{1+x^{-p}}$ und in eine nach fallenden Potenzen von x fortlaufende Reihe verwandelt wird, nämlich in die Reihe

$$x^{m-p-1}-x^{m-2p-1}+x^{m-3p-1}-x^{m-4p-1}+ \text{ꝛc. ꝛc.}$$

---

*) Bidone hat auf diesem Wege die meisten der damals bereits ihrem Werthe nach bekannten bestimmten Integrale ausgewerthet (S. die „Turiner neuen Memoiren" von 1812.).

Jedes dieser beiden Integrale führt dann zu einer convergenten unendlichen Reihe, und addirt man beide, so ergiebt sich:

$$\int_0^\infty \frac{x^{m-1}}{1+x^p}\cdot dx = \frac{1}{m}+\frac{1}{p-m}-\frac{1}{p+m}-\frac{1}{2p-m}+\frac{1}{2p+m}$$
$$+\frac{1}{3p-m}-\frac{1}{3p+m}-\text{ꝛc. ꝛc.},$$

wenn nur $m<p$ ist.

Eben so sind hieher gehörige Beispiele die Integrale

$$\int_0^\infty \frac{x^{m-1}+x^{p-m-1}}{1+x^p}\cdot dx \quad \text{und} \quad \int_0^\infty \frac{x^{m-1}-x^{p-m-1}}{1-x^p}\cdot dx,$$

welche bereits im §. 14. ausgewerthet worden sind.

Jedesmal kommt es darauf an, die erhaltenen unendlichen Reihen wieder zu summiren, wenn man dieselben endlichen Ausdrücke haben will, welche §. 9. N. 18. und §. 14. NN. 38. u. 39. für dieselben Integrale bereits gefunden worden sind.

Wir wollen nun noch eine interessantere Folge hieher gehöriger Beispiele geben.

Erstes Beispiel.

Es soll $\int_0^1 \frac{\sqrt{1-c^2x^2}}{\sqrt{1-x^2}}$ ausgewerthet werden (welches Integral zu den sogenannten elliptischen Transcendenten gehört) für den Fall, daß c sehr klein ist.

In diesem Falle wird man den Zähler in eine nach Potenzen von c fortlaufende Reihe verwandeln und man hat nach dem binomischen Lehrsatze

$$\sqrt{1-c^2x^2} = S\left[\frac{(\frac{1}{2})^{a|-1}\cdot(-1)^a}{a!}\cdot x^{2a}\cdot c^{2a}\right] = S\left[\frac{(-1)^{a|2}}{2^{a|2}}\cdot x^{2a}\cdot c^{2a}\right],$$

wo S die Summe aller Glieder für $a = 0, 1, 2, 3, 4$ bis ins Unendliche, ausdrückt. Dann wird

$$\int_0^1 \frac{\sqrt{1-c^2x^2}}{\sqrt{1-x^2}}\cdot dx = S\left[\frac{(-1)^{a|2}}{2^{a|2}}\cdot c^{2a}\cdot\int_0^1 \frac{x^{2a}}{\sqrt{1-x^2}}\cdot dx\right]$$

und dies giebt (nach §. 11. N. 25.)

$$\text{I.}\qquad \int_0^1 \frac{\sqrt{1-c^2x^2}}{\sqrt{1-x^2}}\cdot dx = S\left[\frac{(-1)^{a|2}}{2^{a|2}}\cdot\frac{1^{a|2}}{2^{a|2}}\cdot c^{2a}\right]$$

$$\text{d. h.}\quad = 1-\tfrac{1}{4}\cdot c^2-\frac{3}{2^2\cdot 4^2}\cdot c^4-\frac{3^2\cdot 5}{2^2\cdot 4^2\cdot 6^2}\cdot c^6$$

$$-\frac{3^2\cdot 5^2\cdot 7}{2^2\cdot 4^2\cdot 6^2\cdot 8^2}\cdot c^8 - \text{in inf.},$$

welche Reihe für ein kleines c sehr schnell convergirt.

Zweites Beispiel.

Es soll

$$1)\qquad \int_0^\infty \frac{1}{b^2+x^2}\cdot\frac{1-a\cdot Cos\,cx}{1+a^2-2a\cdot Cos\,cx}\cdot dx = K$$

ausgewerthet werden.

Da im §. 23. N. 68. bereits gefunden worden ist

$$2)\qquad \int_0^\infty \frac{Cos\,mx}{b^2+x^2}\cdot dx = \frac{\pi}{2b}\cdot e^{-bm},$$

(wenn b positiv ist oder imaginär mit positivem reellen Theil und m positiv), so wird man versuchen

$\dfrac{1-a\cdot Cos\,cx}{1+a^2-2a\cdot Cos\,cx}$ in eine unendliche Reihe zu verwandeln, welche nach Cosinus der vielfachen Bogen fortschreitet. Zu dem Ende setzt man $\dfrac{e^{cx\cdot i}+e^{-cx\cdot i}}{2}$ statt $Cos\,cx$, zerlegt den Nenner $1+a^2-2a\cdot Cos\,cx$ in die beiden Faktoren $(1-a\cdot e^{cx\cdot i})(1-a\cdot e^{-cx\cdot i})$, und den gedachten Bruch selbst in die beiden (Partial-) Brüche

$$\frac{\frac{1}{2}}{1-a\cdot e^{cx\cdot i}}+\frac{\frac{1}{2}}{1-a\cdot e^{-cx\cdot i}},$$

und verwandelt nun jeden dieser beiden Brüche in eine nach Potenzen von $e^{\pm cx\cdot i}$ fortlaufende Reihe; und man erhält dann, wenn der absolute Werth von a, <1 ist, damit diese unendliche Reihe convergirt,

$$3)\quad \frac{1-a\cdot Cos\, cx}{1+a^2-2a\cdot Cos\, cx} = 1+a\cdot Cos\, cx+a^2\cdot Cos\, 2cx+a^3\cdot Cos\, 3cx+\cdots,$$

$$\text{d. h.} \quad = S[a^{\mathfrak{d}}\cdot Cos\, \mathfrak{d}cx],$$

wo $\mathfrak{d}$ nach und nach 0, 1, 2, 3, ꝛc. und alle ganzen (positiven) Zahlen vorstellt, während S die Summe aller dieser Glieder bedeutet.

Daher ist unser Integral K jetzt

$$= S\left[a^{\mathfrak{d}}\cdot\int_0^\infty \frac{Cos\, \mathfrak{d}cx}{b^2+x^2}\cdot dx\right],$$

d. h. (nach 2.), wenn c beliebig positiv gedacht wird,

$$4)\quad K = \frac{\pi}{2b}\cdot S\left[a^{\mathfrak{d}}\cdot e^{-\mathfrak{d}bc}\right] = \frac{\pi}{2b}\cdot S\left[(a\cdot e^{-bc})^{\mathfrak{d}}\right].$$

Weil aber $S[z^{\mathfrak{d}}] = \dfrac{1}{1-z}$

ist, so giebt die 4.) sogleich:

$$\text{II.}\quad \int_0^\infty \frac{1}{b^2+x^2}\cdot\frac{1-a\cdot Cos\, cx}{1+a^2-2a\cdot Cos\, cx}\cdot dx = \frac{\pi}{2b}\cdot\frac{1}{1-a\cdot e^{-bc}},$$

wenn nur c positiv, a dagegen positiv oder negativ aber an sich <1 ist und b positiv oder imaginär, aber mit positivem reellen Theil gedacht wird. Doch bleibt die Formel noch gültig für $a=0$ und auch für $c=0$, wie man sich nachträglich davon überzeugt.

Die Reihe in 3. muß aber deshalb als convergent vorausgesetzt werden, weil das bestimmte Integral allemal schon Zahlenwerthe voraussetzt, die unendliche Reihe also, welche an die Stelle der Differenzial-Funktion gesetzt wird, bereits als ein Ziffernwerth gedacht werden muß.

Setzt man hier links und rechts $\frac{1}{a}$ statt a, so ergiebt sich noch

$$\text{III.}\quad \int_0^\infty \frac{1}{b^2+x^2}\cdot\frac{a-Cos\, cx}{1+a^2-2a\cdot Cos\, cx}\cdot dx = \frac{\pi}{2b}\cdot\frac{1}{a-e^{-bc}},$$

wenn nur b beliebig positiv oder imaginär mit positivem reellen Theil gedacht wird, c beliebig positiv ist und a positiv oder negativ, aber an sich >1; auch kann $c=0$ seyn.

Drittes Beispiel.

Suchen wir jetzt den Werth des vorliegenden bestimmten Integrals III. für den Fall, daß der absolute Werth von a, <1 ist.

Der Bruch $\frac{a-Cos\,cx}{1+a^2-2a\cdot Cos\,cx}$ zerlegt sich sogleich in

$$\frac{\frac{1}{2}}{a-e^{cx\cdot i}}+\frac{\frac{1}{2}}{a-e^{-cx\cdot i}}$$

d. h. in $-\frac{1}{2}\left[\frac{e^{-cx\cdot i}}{1-a\cdot e^{-cx\cdot i}}+\frac{e^{cx\cdot i}}{1-a\cdot e^{cx\cdot i}}\right]$.

Verwandelt man jeden dieser beiden Brüche in eine unendliche Reihe, die nach Potenzen desselben a fortläuft, welches jetzt an sich <1 gedacht ist, so erhält man

$$\frac{a-Cos\,cx}{1+a^2-2a\cdot Cos\,cx}=-S[a^{\mathfrak{b}}\cdot Cos(\mathfrak{b}+1)cx].$$

Also wird, wenn man die Gleichung 2.) des zweiten Beispiels zu Hilfe nimmt,

$$\int_0^\infty \frac{1}{b^2+x^2}\cdot\frac{a-Cos\,cx}{1+a^2-2a\cdot Cos\,cx}\cdot dx=-\frac{\pi}{2b}\cdot S[a^{\mathfrak{b}}\cdot e^{-(\mathfrak{b}+1)bc}]$$

$$=-\frac{\pi}{2b}\cdot e^{-bc}\cdot S[a^{\mathfrak{b}}\cdot e^{-\mathfrak{b}bc}]=-\frac{\pi}{2b}\cdot e^{-bc}\cdot\frac{1}{1-a\cdot e^{-bc}}=\frac{\pi}{2b}\cdot\frac{1}{a-e^{bc}}$$

wenn nur c positiv ist und b positiv oder imaginär, aber mit positivem reellen Theil.

Man findet also, wenn man dies und III. zusammenfaßt:

$$80)\quad \int_0^\infty \frac{1}{b^2+x^2}\cdot\frac{a-Cos\,cx}{1+a^2-2a\cdot Cos\,cx}\cdot dx$$

$$=\begin{cases}\frac{\pi}{2b}\cdot\frac{1}{a-e^{bc}}, & \text{wenn } \pm a<1,\\ \frac{\pi}{2b}\cdot\frac{1}{a-e^{-bc}}, & \text{wenn } \pm a>1.\end{cases}$$

Diese Gleichung gilt jedoch offenbar auch noch, wenn $c = 0$ ist.

Setzt man nun hier $\frac{1}{a}$ statt a, so ergiebt sich auch das Integral II. des 2ten Beispiels für den Fall, wo $\pm a > 1$ gedacht wird, nämlich

81) $$\int_0^\infty \frac{1}{b^2+x^2} \cdot \frac{1-a \cdot \mathit{Cos}\, cx}{1+a^2-2a \cdot \mathit{Cos}\, cx} \cdot dx = \begin{cases} \frac{\pi}{2b} \cdot \frac{1}{1-a \cdot e^{-bc}}, & \text{wenn } \pm a < 1, \\ \frac{\pi}{2b} \cdot \frac{1}{1-a \cdot e^{bc}}, & \text{wenn } \pm a > 1. \end{cases}$$

Beide Gleichungen 80. und 81. setzen übrigens c beliebig positiv oder Null voraus, dagegen b positiv oder imaginär mit positivem reellen Theil, während a beliebig reell gedacht ist, sobald nur in den Bedingungs-Gleichungen ($\pm a < 1$ oder $\pm a > 1$) unter $\pm a$ stets der absolute Werth gedacht d. h. $+a$ genommen wird, wenn a positiv ist, $-a$ dagegen, wenn a negativ vorausgesetzt wird.

Für $a = 1$ gilt keine der beiden Gleichungen *).

---

*) Da, so oft
$$F_z = S[A_b \cdot z^b]$$
ist, auch allemal
$$\tfrac{1}{2}(F_{e^{x \cdot i}} + F_{e^{-x \cdot i}}) = S[A_b \cdot \mathit{Cos}\, bx]$$
und
$$\frac{1}{2i} \cdot (F_{e^{x \cdot i}} - F_{e^{-x \cdot i}}) = S[A_b \cdot \mathit{Sin}\, bx]$$
seyn muß (nach VIII. Th. §. 18.), so kann man die bestimmten Integrale
$$\int_0^\infty \frac{1}{b^2+x^2} \cdot (F_{e^{x \cdot i}} + F_{e^{-x \cdot i}}) \cdot dx$$ allemal auf die Integrale
$$\int_0^\infty \frac{\mathit{Cos}\, mx}{b^2+x^2} \cdot dx,$$ und die bestimmten Integrale
$$\int_0^\infty \frac{1}{x \cdot (b^2+x^2)} \cdot (F_{e^{x \cdot i}} - F_{e^{-x \cdot i}}) \cdot dx$$ auf die Integrale
$$\int_0^\infty \frac{\mathit{Sin}\, mx}{x} \cdot \frac{1}{b^2+x^2} \cdot dx$$ zurückführen, und dadurch auswerthen.

Anmerkg. 1. Integrirt man das Resultat 80. nach a, so bekommt man

I. $$\frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{L(1+a^2-2a\cdot Cos\, cx)}{b^2+x^2}\cdot dx$$

$$= \begin{cases} \frac{\pi}{2b}\cdot[log(a-e^{bc})+C], & \text{wenn } \pm a<1 \\ \frac{\pi}{2b}\cdot[log(a-e^{-bc})+C'], & \text{wenn } \pm a>1 \end{cases};$$

und es kommt nun zunächst darauf an, diese Konstanten C und C′ noch näher zu bestimmen.

A. Wir wollen zu dem Ende zunächst b reell und positiv voraussetzen.

Ist dann $\pm a<1$, so kann man in der Formel I. $a=0$ setzen und man erhält

II. $$0 = \frac{\pi}{2b}\cdot[log(-e^{bc})+C];$$

folglich, wenn man aus dieser Gleichung und der I. die Konstante C eliminirt,

III. $$\int_0^\infty \frac{L(1+a^2-2a\cdot Cos\, cx)}{b^2+x^2}\cdot dx = \frac{\pi}{b}\cdot log(1-a\cdot e^{-bc});$$

und da der Ausdruck links offenbar reell ist, so muß auch rechts von den unendlich-vielen Werthen des Logarithmen der reelle Werth genommen werden. — Und diese Gleichung gilt, es mag a positiv oder negativ seyn, also auch noch, wenn $-a$ statt a geschrieben wird, sobald nur der absolute Werth von a kleiner als 1 ist.

Ist aber $\pm a>1$, so muß man unterscheiden den Fall, wo a zwischen $+1$ und $+\infty$ liegend gedacht wird, von dem anderen Falle, wo a zwischen -1 und $-\infty$ liegt. — Denkt man sich zunächst a positiv, so setze man sogleich $a=+\infty$ in I., und man erhält:

$$\text{IV.}\qquad \frac{\pi}{2b}\cdot L\,a\ ^{*)} = \frac{\pi}{2b}\cdot[log\,a+C'] \quad \text{für} \quad a = +\infty;$$

also $C' = L\,a - log\,a = -log\,1$ **).

Wird nun dieser Werth von C' in die I. substituirt, so findet sich, wenn a positiv und >1 vorausgesetzt wird,

$$\text{V.}\qquad \int_0^\infty \frac{L(1+a^2-2a\cdot Cos\,cx)}{b^2+x^2}\cdot dx = \frac{\pi}{b}\cdot log(a-e^{-bc}),$$

wo offenbar zur Rechten der reelle Werth des Logarithmen zu setzen ist. — Ist aber a negativ und an sich >1, so muß man, um die Konstante C' zu bestimmen, $-\infty$ statt a setzen (in I.), und man erhält, weil das Integral links stets reell wird,

$$\text{VI.}\qquad \frac{\pi}{2b}\cdot L(-a) = \frac{\pi}{2b}\cdot[log\,a+C'] \quad \text{für} \quad a = -\infty,$$

woraus $C' = L(-a) - log\,a = -log(-1)$ ***) hervorgeht. Dieser Werth von C' in die I. substituirt, giebt nun, wenn a negativ, aber an sich >1 ist,

$$\text{VII.}\qquad \int_0^\infty \frac{L(1+a^2-2a\cdot Cos\,cx)}{b^2+x^2}\cdot dx = \frac{\pi}{2b}\cdot log(-a+e^{-bc}),$$

wo rechts wiederum der reelle Werth des Logarithmen zu setzen ist.

Man hat also gefunden (aus III. und V.), vorausgesetzt, daß a und c und b positiv sind,

---

*) Es geht nämlich nun, wegen $a = \infty$, der Zähler der Differenzial-Funktion, in $L(a^2)$ d. h. $2L\,a$ über, während

$$\int \frac{1}{b^2+x^2}\cdot dx = \frac{1}{b}\cdot\frac{1}{Tg}\frac{x}{b}$$ ist.

**) Es ist $log\,a = L\,a + log\,1$.

***) Weil $log\,a = L(-a) + log(-1)$.

82) $$\int_0^\infty \frac{L(1+a^2-2a\cdot Cos\,cx)}{b^2+x^2}\cdot dx = \begin{Bmatrix} \frac{\pi}{b}\cdot L(1-a\cdot e^{-bc}), & \text{wenn } a<1 \\ \frac{\pi}{b}\cdot L(a-e^{-bc}), & \text{wenn } a>1 \end{Bmatrix};$$

dagegen aus III. und VII., wenn $-a$ statt a gesetzt wird, also wenn wiederum a und c und b positiv sind,

83) $$\int_0^\infty \frac{L(1+a^2+2a\cdot Cos\,cx)}{b^2+x^2}\cdot dx = \begin{Bmatrix} \frac{\pi}{b}\cdot L(1+a\cdot e^{-bc}), & \text{wenn } a<1 \\ \frac{\pi}{b}\cdot L(a+e^{-bc}), & \text{wenn } a>1 \end{Bmatrix}.$$

B. Denken wir uns nun den andern Fall, in welchem $b = k+g\cdot i$ und k positiv ist, und in welchem die Gleichung I. auch noch gilt.

Ist dann $\pm a<1$, so gelten auch noch die Gleichungen II. und III. unverändert, und es bleibt jetzt nur noch die Frage zu entscheiden, welcher der unendlich-vielen Werthe des Logarithmen zur Rechten in III. jetzt zu nehmen ist, wo b imaginär vorausgesetzt wird, d. h. es bleibt die Frage zu beantworten, wenn derselbe Logarithme auf die Form $Lr+(2\nu\pi+\varphi)\cdot i$ (nach VIII. Th. Einleitg. §. 5.) gebracht wird, welcher Werth von ν zu nehmen ist, d. h. ob $\nu=0$ oder welche bestimmte, ob positive, ob negative ganze Zahl statt ν zu setzen ist. — Weil aber für alle Werthe von a, die zwischen $+1$ und -1 liegen, der Werth des Integrals stetig sich ändert, so ist innerhalb dieses ganzen Raumes ein und derselbe Werth, also der Werth von ν zu nehmen, der für $a=0$ genommen werden muß. Da aber für $a=0$ das Integral zur Linken den Werth 0 annimmt, so muß $\nu=0$ genommen werden, d. h. die Formeln 82. und 83. gelten [so lange $a<1$ gedacht wird] auch noch für einen imaginären Werth von

b mit positivem reellen Theil, sobald rechts der Buchstabe L den einfachsten Werth des Logarithmen vorstellt (S. VIII. Th. Einleitg. §. 5.), während a und c positiv vorausgesetzt werden.

Ist aber (während $b = k + g \cdot i$ und k positiv gedacht wird) $\pm a > 1$, so bleiben die Gleichungen V. und VII. auch noch gültig, und dabei muß derjenige Werth des Logarithmen zur Rechten genommen werden, welcher in V. für $a = +\infty$, in VII. dagegen für $a = -\infty$ in den reellen Werth übergeht; also ist wiederum jedesmal $\nu = 0$ zu nehmen und

die Formeln 82. und 83. gelten also [so lange $a > 1$ ist] auch noch für einen imaginären Werth von b mit positivem reellen Theil, sobald rechts der Buchstabe L den einfachsten Werth des Logarithmen vorstellt, während a und c positiv vorausgesetzt werden.

Es gelten also die Gleichungen 82. und 83. sowohl, wenn b reell und positiv ist, als auch, wenn b imaginär mit **positivem** reellen Theil gedacht wird, sobald man nur rechts stets die einfachsten Werthe des Logarithmen nimmt, also genau im Sinne der Bezeichnung des §. 5. der Einleitung zum VIII. Th., so lange nur a und c positiv vorausgesetzt werden; doch kann auch $c = 0$ seyn.

Anmerkg. 2. Da in jeder der NN. 82. und 83. die beiden Formen zur Rechten, für $a = 1$ in einander übergehen, so erhält man aus ihnen noch für $a = 1$,

$$84) \quad \int_0^\infty \frac{L(Sin\, cx)}{b^2+x^2} \cdot dx = \frac{\pi}{2b} \cdot L\left(\frac{1-e^{-2bc}}{2}\right),$$

$$85) \quad \int_0^\infty \frac{L(Cos\, cx)}{b^2+x^2} \cdot dx = \frac{\pi}{2b} \cdot L\left(\frac{1+e^{-2bc}}{2}\right) {}^{*)},$$

*) Wollte man aus den Gleichungen N. 84. und N. 85. neue Gleichungen dadurch ableiten, daß man die eben genannten nach c differenziirt, so würde man Resultate erhalten, welche zwar von Legendre in seinen

wenn nur in beiden Nummern b und c beliebig positiv gedacht werden, oder $c = 0$ oder b imaginär, aber mit positivem reellen Theil.

Subtrahirt man diese beiden Gleichungen von einander, so erhält man noch

$$86)\quad \int_0^\infty \frac{L(Tg\, cx)}{b^2+x^2}\cdot dx = \frac{\pi}{2b}\cdot L\left\{\frac{e^{bc}-e^{-bc}}{e^{bc}+e^{-bc}}\right\},$$

welche also unter denselben Voraussetzungen gilt, unter denen die NN. 84. und 85. wahr sind.

Viertes Beispiel.

Ganz auf demselben Wege, der in den vorhergehenden Beispielen betreten worden ist, findet man nun noch, indem man §. 23. N. 69. zu Hilfe nimmt:

$$\int^\infty \frac{x}{b^2+x^2}\cdot\frac{Sin\, cx}{1+a^2\pm 2a\cdot Cos\, cx}\cdot dx = \frac{\frac{1}{2}\pi}{e^{bc}\pm a},\quad \text{wenn } a<1.$$

Setzt man nun hier $\frac{1}{a}$ statt a, so erhält man dasselbe bestimmte Integral $= \frac{\frac{1}{2}\pi}{a^2\cdot e^{bc}\pm a}$, wenn $a>1$ ist.

Man hat daher:

$$87)\quad \int_0^\infty \frac{x}{b^2+x^2}\cdot\frac{Sin\, cx}{1+a^2\pm 2a\cdot Cos\, cx}\cdot dx = \begin{cases} \dfrac{\frac{1}{2}\pi}{e^{bc}\pm a}, & \text{wenn } a<1 \\[2ex] \dfrac{\frac{1}{2}\pi}{a^2\cdot e^{bc}\pm a}, & \text{wenn } a>1, \end{cases}$$

Exercises de calcul intégral gegeben, aber deshalb unrichtig sind, weil die entstehenden bestimmten Integrale

$$\int_0^\infty \frac{x\cdot Tg\, cx}{b^2+x^2}\cdot dx \quad \text{und} \quad \int_0^\infty \frac{x\cdot Cotg\, cx}{b^2+x^2}\cdot dx$$

an allen Stellen, wo bezüglich $x = (\nu+\frac{1}{2})\frac{\pi}{c}$ und $x = \nu\cdot\frac{\pi}{c}$ ist, unterbrochen sind und daher gar keinen Werth haben, sondern zu denjenigen Ausdrücken gehören, welche in einer Rechnung durchaus nicht mehr vorkommen dürfen.

wo alle oberen oder alle unteren Vorzeichen gleichzeitig gelten, wenn nur a, b, c beliebig positiv sind*), oder b imaginär ist, aber mit positivem reellen Theil.

Für $a = 1$ ist das Integral in 87. zur Linken, weil es $Tg\frac{1}{2}cx$ oder $Cotg\frac{1}{2}cx$ in sich aufnimmt für unendlich-viele, unten in der Note schon angeführte positive Werthe von x, unterbrochen, so daß solches gar keinen Werth hat.

Anmerkg. 1. Addirt man die beiden Formeln 87. (die eine wo $+a$, die andere wo $-a$ steht), so erhält man noch, wenn zu gleicher Zeit a statt a^2 geschrieben wird:

$$88)\quad \int_0^\infty \frac{x}{b^2+x^2}\cdot\frac{Sin\, cx}{1+a^2-2a\cdot Cos\, 2cx}\cdot dx = \begin{cases} \dfrac{\frac{1}{2}\pi}{1+a}\cdot\dfrac{e^{bc}}{e^{2bc}-a}, & \text{wenn } a<1, \\[2ex] \dfrac{\frac{1}{2}\pi}{1+a}\cdot\dfrac{e^{bc}}{a\cdot e^{2bc}-1}, & \text{wenn } a>1, \end{cases}$$

wenn nur a, b, c beliebig positiv sind**), oder b imaginär ist mit positivem reellen Theil.

Legendre hat übrigens bei allen diesen Resultaten nur die eine Form, indem er nicht beachtet hat, daß der Werth aller dieser Integrale eine andere Form annimmt, so oft $a>1$ wird. Seine Resultate bedürfen daher im Allgemeinen einer Korrektion, worauf wir hier den Anfänger ein für allemal aufmerksam machen.

---

*) Dieselben Resultate gehen übrigens auch aus den NN. 82. und 83. (im dritten Beispiel Anmerkg. 1.) hervor, wenn man solche nach c differenziirt.

**) Obgleich hier beide Formen, sobald man $a = 1$ nimmt, in ein und dasselbe Resultat übergehen, so darf man die Gleichung 88. doch nicht für $a = 1$ noch gelten lassen, weil (für $a = 1$) das links entstehende bestimmte Integral $\int_0^\infty \frac{1}{b^2+x^2}\cdot\frac{x}{Sin\, cx}\cdot dx$ zu den unterbrochenen gehört (so oft $x = \nu\frac{\pi}{c}$ wird) und daher gar keinen Werth hat. Bei Legendre (Exercises etc.) ist deshalb der angegebene Werth desselben ein unrichtiger.

Für $a = 1$ wird das Integral in 88. zur Linken, weil es $Sin\, cx$ im Nenner bekommt, für unendlich-viele Werthe von x unterbrochen und solches hat daher für $a = 1$ gar keinen Werth.

Anmerkg. 2. Setzt man in den Formeln 80.–88. $-b$ statt b, so ändern sich die Integrale zur Linken nicht. Man hat also dann dieselben Integrale für den andern Fall ausgewerthet, in welchem b entweder negativ oder imaginär ist, mit negativem reellen Theil, wenn nur a und c beliebig positiv bleiben.

Fünftes Beispiel.

Sollen gefunden werden die Werthe von

$$\int_0^{2\pi} \frac{Sin\, mx}{1-a\cdot Cos\, x}\cdot dx \quad \text{und} \quad \int_0^{2\pi} \frac{Cos\, mx}{1-a\cdot Cos\, x}\cdot dx,$$

wo m eine positive ganze Zahl seyn soll, so entwickle man, indem man sich $(1-a\cdot Cos\, x)(1+\alpha^2)$ auf die Form $1+\alpha^2-2\alpha\cdot Cos\, x$ gebracht denkt, (wodurch $\alpha = \frac{1\pm\sqrt{1-a^2}}{a}$ wird) den Bruch $\frac{e^{-mxi}}{1-\alpha\cdot e^{xi}}$ in eine nach Potenzen von α fortlaufende Reihe, setze dann $-i$ statt i, addire und subtrahire beide Resultate, integrire endlich zwischen den Grenzen 0 und 2π (nach x) und man erhält die Gleichungen

$$\text{I.} \quad \int_0^{2\pi} \frac{Sin\, mx-\alpha\cdot Sin(m+1)x}{1+\alpha^2-2\alpha\cdot Cos\, x}\cdot dx = 0,$$

$$\text{II.} \quad \int_0^{2\pi} \frac{Cos\, mx-\alpha\cdot Cos(m+1)x}{1+\alpha^2-2\alpha\cdot Cos\, x}\cdot dx = 2\pi\cdot\alpha^m,$$

wo $\alpha<1$ vorausgesetzt werden muß, damit die hier vorkommenden unendlichen Reihen convergent sind. Zerlegt man nun die Integrale zur Linken, in so ferne sich die Zähler in 2 Theile zerlegen, in zwei Integrale, so hat man zwei Reduktions-Formeln, durch welche, wenn man statt m nach und nach

m—1, m—2, m—3, ..., 3, 2, 1, 0 setzt, unsere beiden vorgelegten Integrale auf

$$\int_0^{2\pi} \frac{Sin\,x}{1+\alpha^2-2\alpha\cdot Cos\,x}\cdot dx = 0$$

und
$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{1+\alpha^2-2\alpha\cdot Cos\,x}\cdot dx = \frac{2\pi}{1-\alpha^2}$$

(wie letztere durch die Auffindung der unbestimmten Integrale unmittelbar sich ergeben) zurückgeführt werden.

Man erhält auf diesem Wege

89) $$\int_0^{2\pi} \frac{Sin\,mx}{1\mp a\cdot Cos\,x}\cdot dx = 0$$

90) $$\int_0^{2\pi} \frac{Cos\,mx}{1\mp a\cdot Cos\,x}\cdot dx = \frac{2\pi}{\sqrt{1-a^2}}\cdot\left(\frac{1-\sqrt{1-a^2}}{\pm a}\right)^m,$$

wenn nur m positiv ganz und a beliebig reell, aber an sich <1 ist*).

Zerlegt man diese Integrale in $\int_0^{\pi}+\int_{\pi}^{2\pi}$, und verwandelt man das letztere dadurch, daß man $x = 2\pi - z$ setzt, so findet sich in N. 89. der zweite Theil dem erstern gleich und entgegen, dagegen in N. 90. die beiden Theile genau einander gleich. Man erhält also noch

91) $$\int_0^{\pi} \frac{Cos\,mx}{1\mp a\cdot Cos\,x}\cdot dx = \frac{\pi}{\sqrt{1-a^2}}\cdot\left(\frac{1-\sqrt{1-a^2}}{\pm a}\right)^m,$$

wenn nur m positiv ganz, a dagegen beliebig reell aber an sich <1 ist**).

---

*) Weil $\alpha = \frac{1\pm\sqrt{1-a^2}}{a}$ geworden, damit

$$(1-a\cdot Cos\,x)\cdot(1+\alpha^2) = 1+\alpha^2-2\alpha\cdot Cos\,x$$

seyn könne, so muß $a<1$ seyn, damit α reell wird. Und da $\alpha<1$ werden muß, so darf von dem $\pm$ Zeichen nur das (—) Zeichen genommen werden. Weil aber endlich α auch negativ seyn kann, wenn nur an sich <1, so kann auch a negativ seyn, wenn nur an sich <1.

**) Diesen Werth hätte man auch sogleich auf demselben für $\int_0^{2\pi}$ betretenen Wege direkt finden können.

Ganz auf analogem Wege findet sich nun auch noch

92) $$\int_0^{2\pi} \frac{Sin\, mx}{1 \mp a \cdot Cos\, x} \cdot dx =$$

$$\frac{2\pi}{\sqrt{1-a^2}} S \left[\frac{\left(\frac{1+\sqrt{1-a^2}}{\pm a}\right)^{b+1} - \left(\frac{1-\sqrt{1-a^2}}{\pm a}\right)^{b+1}}{m-(b+1)} \right]$$

$$+ \frac{2\pi}{\sqrt{1-a^2}} \left[\left(\frac{1+\sqrt{1-a^2}}{\pm a}\right)^m - \left(\frac{1-\sqrt{1-a^2}}{\pm a}\right)^m \right] \cdot L \frac{2\sqrt{1 \mp a}}{\sqrt{1 \pm a} + \sqrt{1 \mp a}}$$

93) $$\int_0^{2\pi} \frac{x \cdot Cos\, mx}{1 \mp a \cdot Cos\, x} \cdot dx = \frac{2\pi^2}{\sqrt{1-a^2}} \cdot \left(\frac{1-\sqrt{1-a^2}}{\pm a}\right)^m,$$

wenn nur m positiv ganz und a beliebig reell, aber an sich <1 ist.

Und setzt man hier überall $\frac{1}{a}$ statt a, so findet man noch die Integrale

$$\int_0^{2\pi} \frac{Sin\, mx}{a \mp Cos\, x} \cdot dx, \quad \int_0^{2\pi} \frac{Cos\, mx}{a \mp Cos\, x} \cdot dx, \quad \int_0^{\pi} \frac{Cos\, mx}{a \mp Cos\, x} \cdot dx,$$

$$\int_0^{2\pi} \frac{x \cdot Sin\, mx}{a \mp Cos\, x} \cdot dx, \quad \int_0^{2\pi} \frac{x \cdot Cos\, mx}{a \mp Cos\, x} \cdot dx,$$ jedoch alle unter der Voraussetzung, daß $a > 1$ ist.

Dann kann man sich auch die Aufgabe stellen: die bestimmten Integrale der NN. 90.—93. zur Linken, für den Fall auszuwerthen, wo $a > 1$, so wie die so eben zuletzt erwähnten be-

---

*) Wenn die Gleichungen 89. und 90. für jeden positiven ganzen oder gebrochenen Werth von m wahr wären, so könnte man die NN. 92. u. 93. aus ihnen dadurch ableiten, daß man sie nach m differenziirte. — Jetzt würde man auf diesem Wege unrichtige Resultate erhalten. — Zerlegt man aber das bestimmte Integral in N. 93. in $\int_0^{\pi} + \int_{\pi}^{2\pi}$ und setzt man in letzterem Theil $x = 2\pi - z$, so erhält man noch

$$\int_0^{2\pi} \frac{x \cdot Cos\, mx}{1-a \cdot Cos\, x} \cdot dx = 2\pi \cdot \int_0^{\pi} \frac{Cos\, mx}{1-a \cdot Cos\, x} \cdot dx.$$

Deshalb ist der Werth in N. 93. das 2π fache des Werthes in N. 91.

stimmten Integrale zu finden, wenn in ihnen $a < 1$ gedacht wird. U. s. w.

Anmerkg. Ohne mehr hieher gehörige Beispiele zu geben, wollen wir nur noch bemerken, daß man nach derselben hier zuletzt beschriebenen Methode, auch das in N. 63. des §. 21. bereits ausgewerthete Integral $\int_0^\infty e^{-ax^2} \cdot Cos\, bx \cdot dx$ finden kann, wenn man statt $Cos\, bx$ die unendliche Reihe setzt, die Glieder von der Form $\int_0^\infty e^{-ax^2} \cdot x^{2n} \cdot dx$ aber dadurch findet, daß man die Gleichung §. 20. N. 60. hinter einander nach a differenziirt.

Auch kann man $\int_0^\infty e^{-ax^2} \cdot x^{2n} \cdot dx$ aus dem Integral $\int_0^\infty e^{-ax} \cdot x^{p-1} \cdot dx = \frac{\Gamma_p}{a^p}$ (§. 20. 1tes Beisp. β.) dadurch ableiten, daß man $x = z^2$ setzt, wodurch man sogleich erhält:

$$\int_0^\infty e^{-az^2} \cdot z^{2p-1} \cdot dx = \frac{\Gamma_p}{2a^p},$$

welches, wenn $2p-1 = 2n$ gesetzt wird,

$$\int_0^\infty e^{-ax^2} \cdot x^{2n} \cdot dx = \frac{\Gamma_{n+\frac{1}{2}}}{2 \cdot a^{n+\frac{1}{2}}}$$

giebt, so daß, wie bisher schon oft, nur noch die Berechnung der Gamma-Funktion d. h. des Integrals

$$\Gamma_c \text{ d. h. } \int_0^\infty e^{-x} \cdot x^{c-1} \cdot dx \quad \text{oder} \quad \int_{+0}^1 \left(L\frac{1}{x}\right)^{c-1} \cdot dx$$

erforderlich ist, — dasmal jedoch nur für den Fall, daß $c = n + \frac{1}{2}$ und n positiv ganz ist.

Diese Berechnung der Werthe der Gamma-Funktion Γ_c oder der gebrochenen Faktorielle $(c-1)!$ ist aber im VIII. Th. Kap. X. gelehrt worden *).

---

*) Setzen wir die Sätze der Anmerkung 2. des §. 20. voraus (und §. 20. N. 57.), so hat man, wenn n positiv ganz ist,

Noch machen wir schließlich den Anfänger darauf aufmerksam, daß, wenn die Werthbestimmung eines vorgelegten bestimmten Integrals nach allen hier mitgetheilten Methoden mißlingt, solches Integral auch noch ein oder einigemale theilweise integrirt werden muß, um es, wo möglich, auf ein anderes zurückzuführen, dessen Auswerthung direkter gelingt.

§. 27.

Betrachten wir noch einen der zu §. 26. gehörigen Fälle, in denen es jedoch nicht möglich ist, die durch Integriren zuletzt erhaltene unendliche Reihe wieder zu summiren, sondern wo man die unendliche Reihe selber benutzt, um den Werth des bestimmten Integrals näherungsweise zu berechnen.

Es sey z. B. $\int_0^T e^{-t^2} \cdot dt$ näherungsweise zu berechnen für irgend einen reellen Werth von T.

Verwandelt man e^{-t^2} ohne Weiteres in eine nach ganzen Potenzen von t fortlaufende Reihe und integrirt man dann jedes Glied, so erhält man aus der bekannten Reihe für e^x, nämlich aus

$$e^x = S\left[\frac{x^a}{a!}\right],$$

zunächst

$$e^{-t^2} = S\left[(-1)^a \cdot \frac{t^{2a}}{a!} \right],$$

$$\Gamma_{n+\frac{1}{2}} = (n-\tfrac{1}{2})^{n|-1} \cdot \Gamma_{\frac{1}{2}} = (\tfrac{1}{2})^{n|1} \cdot \Gamma_{\frac{1}{2}} = \frac{1^{n|2}}{2^n} \cdot \Gamma_{\frac{1}{2}}$$

d. h.

$$\Gamma_{n+\frac{1}{2}} = \frac{1^{n|2}}{2^n} \cdot \sqrt{\pi}.$$

Daraus folgt aber das vorgelegte Integral, nämlich:

$$\int_0^\infty e^{-ax^2} \cdot x^{2n} \cdot dx = \frac{1^{n|2}}{2^{n+1} \cdot a^{n+\frac{1}{2}}} \cdot \sqrt{\pi},$$

wenn nur a beliebig positiv, n dagegen positiv ganz ist (Vgl. Anmerkg. 1. zu §. 20.).

hierauf

$$\int e^{-t^2}\cdot dt = S\left[(-1)^a\cdot\frac{t^{2a+1}}{(2a+1)\cdot a!}\right],$$

zuletzt

1) $$\int_0^T e^{-t^2}\cdot dt = S\left[(-1)^a\cdot\frac{T^{2a+1}}{(2a+1)\cdot a!}\right]$$

d. h. $$= T - \frac{T^3}{3\cdot 1} + \frac{T^5}{5\cdot 2!} - \frac{T^7}{7\cdot 3!} + \frac{T^9}{9\cdot 4!} - \text{ꝛc. ꝛc.}$$

Diese Reihe ist für jeden Werth von T convergent, für sehr große Werthe von T aber nur langsam.

Um ein anderes Resultat zu erhalten zugleich mit Grenzen des Fehlers kann man auch beliebig oft wiederholt theilweise integriren, nämlich so:

$$\int e^{-t^2}\cdot dt = e^{-t^2}\cdot t + 2\int e^{-t^2}\cdot t^2\cdot dt,$$

$$\int e^{-t^2}\cdot t^2\cdot dt = e^{-t^2}\cdot\frac{t^3}{3} + \tfrac{2}{3}\int e^{-t^2}\cdot t^4\cdot dt,$$

$$\int e^{-t^2}\cdot t^4\cdot dt = e^{-t^2}\cdot\frac{t^5}{5} + \tfrac{2}{5}\int e^{-t^2}\cdot t^6\cdot dt, \quad \text{u. s. w. f.};$$

dann findet sich sogleich

2) $$\int_0^T e^{-t^2}\cdot dt = e^{-T^2}\cdot T\left(1 + \frac{2T^2}{1^{2|2}} + \frac{(2T^2)^2}{1^{3|2}} + \frac{(2T^2)^3}{1^{4|2}} + \ldots\right),$$

welche Reihe, als unendliche gedacht, für jeden Werth von T convergent ist, zu welcher aber, wenn sie nur bis zum $(n-1)^{\text{ten}}$ Gliede $e^{-T^2}\cdot T\cdot\frac{(2T^2)^{n-1}}{1^{n|2}}$ einschließlich fortgesetzt gedacht wird, noch das Ergänzungsglied

$$\frac{2^n}{1^{n|2}}\int_0^T e^{-t^2}\cdot t^{2n}\cdot dt$$

hinzutritt. — Dieses Ergänzungsglied ist aber (nach VIII. Th. §. 89. N. 1. ⊙, wenn $\varphi = t^{2n-1}$ und $\psi = e^{-t^2}\cdot t$ gesetzt wird)

$$= \frac{2^n}{1^{n|2}}\cdot(1 - \tfrac{1}{2}e^{-T^2})\cdot\theta^{2n-1}\cdot T^{2n-1},$$

oder auch (wenn $\varphi = e^{-t^2}$ und $\psi = t^{2n}$ genommen wird)

$$= \frac{2^n}{1^{n+1|2}} \cdot e^{-\theta^2 T^2} \cdot T^{2n+1},$$

oder auch (nach ebendaselbst Nr. 2. I.)

$$= \frac{2^n}{1^{n|2}} \cdot e^{-\theta^2 T^2} \cdot \theta^{2n} \cdot T^{2n+1},$$

wo jedesmal θ zwischen 0 und 1 liegt, aber unbekannt bleibt.

Will man eine Reihe haben, welche nach fallenden Potenzen von T fortläuft, so muß man e^{-t^2} zerlegen in $(e^{-t^2} \cdot t) \cdot \frac{1}{t}$ und nun theilweise integriren. Dies giebt

$$\int e^{-t^2} \cdot dt = -\tfrac{1}{2} \cdot e^{-t^2} \cdot \frac{1}{t} - \tfrac{1}{2} \int e^{-t^2} \cdot \frac{1}{t^2} \cdot dt,$$

$$\int e^{-t^2} \cdot \frac{1}{t^2} \cdot dt = -\tfrac{1}{2} \cdot e^{-t^2} \cdot \frac{1}{t^3} - \tfrac{3}{2} \int e^{-t^2} \cdot \frac{1}{t^4} \cdot dt,$$

$$\int e^{-t^2} \cdot \frac{1}{t^4} \cdot dt = -\tfrac{1}{2} \cdot e^{-t^2} \cdot \frac{1}{t^5} - \tfrac{5}{2} \int e^{-t^2} \cdot \frac{1}{t^6} \cdot dt,$$

u. s. w. f.; also zuletzt

$$\int e^{-t^2} \cdot dt = -\frac{e^{-t^2}}{2t}\left(1 - \frac{1}{2t^2} + \frac{1^{2|2}}{(2t^2)^2} - \frac{1^{3|2}}{(2t^2)^3} + \frac{1^{4|2}}{(2t^2)^4} - \dots\right)$$

und so findet sich daher

3) $$\int_T^\infty e^{-t^2} \cdot dt =$$

$$\frac{e^{-T^2}}{2T}\left(1 - \frac{1}{2T^2} + \frac{1^{2|2}}{(2T^2)^2} - \frac{1^{3|2}}{(2T^2)^3} + \frac{1^{4|2}}{(2T^2)^4} - \dots\right)$$

so zwar, daß, wenn man diese Reihe bis zum n^{ten} Gliede fortsetzt, dann noch das Ergänzungsglied

$$(-1)^n \cdot \frac{1^{n|2}}{2^n} \cdot \int_T^\infty e^{-t^2} \cdot \frac{1}{t^{2n}} \cdot dt$$ hinzutreten muß, während dieses Ergänzungsglied (nach VIII. Th. §. 89.) an sich kleiner als

$$\frac{1^{n-1|2}}{2^n} \cdot e^{-T^2} \cdot \frac{1}{T^{2n-2}}$$ ist.

Da aber

$$\int_0^T e^{-t^2} \cdot dt = \int_0^\infty e^{-t^2} \cdot dt - \int_T^\infty e^{-t^2} \cdot dt,$$

während $\int_0^\infty e^{-t^2} \cdot dt = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}$ schon bekannt ist, so würde man sich dieser Formel 3.) besonders dann mit Vortheil bedienen, wenn T größer (geworden oder) gegeben ist *).

---

*) Laplace hat dasselbe Integral im T. IV. seiner Mécanique céleste noch in einen continuirlichen Bruch verwandelt, worüber auch noch seine Théorie des probabilités pag. 104. nachgesehen werden kann. — In Kramp's Analyse des réfractions astronomiques et terrestres, ferner in Bessel's fundamenta astronomiae, so wie noch in Enke's astronomischen Jahrbuche findet man übrigens Tafeln der ausgerechneten Werthe dieser Transcendenten $\int_0^T e^{-t^2} \cdot dt$.

Viertes Kapitel.

Einige Arbeiten Cauchy's über bestimmte Integrale. — Achte Methode der Auswerthung der bestimmten Integrale.

§. 28.

Um die Begriffe des Cauchy recht deutlich machen zu können müssen wir vor allen Dingen unseren Lesern die von uns bis jetzt im VIII. Th. Kap. 7. festgestellten Begriffe ins Gedächtniß zurückrufen, nämlich:

1) Ist $\int f \cdot dx = F_x$, so bezeichnen wir die Differenz $F_b - F_a$ allemal durch das Zeichen $\int_{b \div a} f \cdot dx$. — Wir nennen dieses Zeichen das allgemein-bestimmte Integral, und wir denken uns die Grenzen a und b unabhängig von einander beliebig reell oder imaginär, endlich oder unendlich-groß oder unendlich-klein.

2) Durch das andere Zeichen $\int_a^b f \cdot dx$ bezeichnen wir dagegen die Summe von unendlich-vielen, durch $f_x \cdot dx$ vorgestellten Produkten, die entstehen, wenn statt x nach und nach alle, um $dx = \frac{b-a}{n}$, wo n unendlich-groß ist, von einander verschiedenen Werthe, von a an bis b hin, gesetzt werden. — Dieses Zeichen $\int_a^b f \cdot dx$ nennen wir das numerisch-bestimmte Integral, oder auch schlechthin das bestimmte Integral. — Auch hier denken wir uns die Grenzen a und b beliebig reell oder imaginär *).

---

*) Sind a und b imaginär (oder a allein, oder b allein), —

3) Der Werth des allgemein-bestimmten Integrals $\int_{b \div a} f \cdot dx$ hängt von den Werthen von f_x, die zu Werthen von x gehören, welche zwischen a und b liegen, gar nicht ab und existirt daher, unbekümmert darum, ob die Funktion f_x zwischen $x = a$ und $x = b$ ihr Daseyn ein- oder mehrere Male oder gar nicht, unterbricht. Das allgemein-bestimmte Integral $\int_{b \div a} f \cdot dx$ existirt also, sobald nur F_b und F_a noch im Kalkul zulässige Ausdrücke sind.

4) Ganz anders ist es mit dem (numerisch-) bestimmten Integral $\int_a^b f \cdot dx$. — Seine Existenz setzt voraus

α) daß f_x von $x = a$ an bis zu $x = b$ hin sein Daseyn entweder gar nicht unterbreche, oder daß doch, wenn für $x = c$, welcher Werth zwischen a und b liegend gedacht wird, die Funktion f_x ihr Daseyn unterbricht, — das Produkt $(x-c) \cdot f_x$ für $x = c$ den Werth 0 oder $\pm \frac{1}{\infty}$ annehme, also daß z. B. wenn f_x die Form $\frac{\varphi_x}{(x-c)^\mu}$ haben sollte, dann $\mu < 1$ seyn muß; — in so ferne im entgegengesetzten Falle das Integral selbst gar keinen bestimmten endlichen Werth hat (ein unterbrochenes ist);

---

ist also $a = \alpha_1 + \beta_1 \cdot i$ und $b = \alpha_2 + \beta_2 \cdot i$, so kann man sich den Uebergang von a zu b auch so denken, daß stets statt x der Werth $u + \varphi_u \cdot i$ gesetzt wird, während φ_u eine beliebige Funktion von u vorstellt, welche jedoch den Grenzbedingungen genügt, daß nämlich $\varphi_u = \beta_1$ wird für $u = \alpha_1$, und $\varphi_u = \beta_2$ wird für $u = \alpha_2$. Es wird dann

$dx = du + \partial\varphi_u \cdot du \cdot i$ und $du = \frac{\alpha_2 - \alpha_1}{n}$, so wie n unendlich-groß (und ganz) gedacht.

Nimmt man aber φ_u von der Form $pu + q$, und bestimmt man p und q den obigen Bedingungen gemäß, so hat man wieder den Fall des Textes.

β) daß, wenn a oder b den Werth $\pm\infty$ annehmen, gewisse Bedingungen (der Convergenz des Integrals) erfüllt seyn müssen, wenn das Integral selbst, obschon es nicht zu den unterbrochenen gehören mag — einen bestimmten Werth haben (d. h. nicht divergent seyn) soll.

5) So oft aber $\int_a^b f \cdot dx$ wirklich einen Werth hat, so oft ist solcher dem Werthe $\int_{b \div a} f \cdot dx$ gleich; — die Gleichung

$$(\odot)\cdots \qquad \int_a^b f \cdot dx = \int_{b \div a} f \cdot dx$$

lehrt uns also, wie die Rechnung zu verfahren habe, um die durch $\int_a^b f \cdot dx$ bezeichnete Summe von unendlich-vielen unendlich-kleinen Produkten von der Form $f \cdot dx$ auszuwerthen.

§. 29.

I. Cauchy (in seinem Résumé des leçons etc. sur le calcul intégral) führt erstlich (in der Leç. XXI.) einen Begriff des bestimmten Integrals $\int_a^b f \cdot dx$ ein, der im Wesentlichen mit dem der N. 2. des §. 28. d. h. mit unserem (numerisch-) bestimmten Integral übereinstimmt, so daß die Summe unendlich-vieler unendlich-kleiner Produkte von der Form $f \cdot dx$ darunter verstanden wird.

II. Später (in der Leç. XXIV.) macht er eben so wie wir es gethan haben, bemerklich wie

α) wenn die Funktion f_x zwischen den Grenzwerthen a und b von x, z. B. für $x = c$ ihre Stetigkeit unterbricht, und noch

β) wenn beide Grenzen oder doch eine davon, unendlich-groß werden,

wie dann die gedachte Summe unendlich-vieler unendlich-kleiner Produkte theils unbestimmt, theils unendlich-groß seyn (oder, wie wir sagen, gar nicht mehr existiren) kann.

Für diese Fälle verknüpft nun Cauchy mit dem Zeichen

$\int_a^b f \cdot dx$ einen ihm eigenthümlichen allgemeineren Begriff, welcher zuweilen mit unserem (numerisch-) bestimmten Integral, zuweilen mit unserem allgemein-bestimmten Integral, häufig aber auch mit keinem von beiden zusammenfällt, und dann also für uns ein ganz neuer besonderer Begriff ist.

III. Unterbricht nämlich f_x für $x = c$, welcher Werth c zwischen reellen Werthen a und b liegen soll, ihre Stetigkeit, so versteht Cauchy unter dem Zeichen

$$\int_a^b f \cdot dx \quad \text{allemal das, was aus der Summe}$$

$$\int_{(c-\mu\varepsilon) \div a} f \cdot dx + \int_{b \div (c+\nu\varepsilon)} f \cdot dx$$

wird, wenn μ und ν beliebig positiv und endlich gedacht werden und wenn nach beendigter Integration und Addition, $\varepsilon = +\frac{1}{\infty}$ gesetzt wird.

Die Bedeutung des von Cauchy gebrauchten Zeichens $\int_a^b f \cdot dx$ ist also jetzt eine erweiterte und ausgesprochen in der Gleichung

$$(\odot) \ldots \quad \int_a^b f \cdot dx = \int_{b \div (c+\nu\varepsilon)} f \cdot dx + \int_{(c-\mu\varepsilon) \div a} f \cdot dx \quad \text{für} \quad \varepsilon = \frac{1}{\infty};$$

und sie fällt mit der früheren Bedeutung des (numerisch-) bestimmten Integrals (§. 28. N. 2.) zusammen, so oft $(x-c) \cdot f_x = 0$ wird für $x = c$, — sie ist aber ein ganz neuer Begriff, der auch nicht mit dem allgemein-bestimmten Integral $\int_{b \div a} f \cdot dx$ zusammenfällt, so oft $(x-c) \cdot f_x$ für $x = c$ nicht unendlich-klein oder Null wird *).

*) Wir setzen die Funktion f stets eindeutig (einförmig) voraus. Sollte nun aber doch

$$\int_{(c-\mu\varepsilon) \div a} f \cdot dx \quad \text{oder} \quad \int_{b \div (c+\nu\varepsilon)} f \cdot dx$$

ein vieldeutiger (vielförmiger) Ausdruck werden, so ist allemal dasjenige Verfahren einzuschlagen, durch welches nach den §§. 2. 3. die z. B. durch

Ist z. B. $f_x = \frac{1}{x}$, $a = -1$, $b = +1$, $c = 0$, so ist zunächst

$$\int f_x \cdot dx = \int \frac{1}{x} \cdot dx = \log x.$$

Von der durch das (numerisch-) bestimmte Integral $\int_{-1}^{+1} \frac{1}{x} \cdot dx$ (im Sinne der N. 2. des §. 28.) vorgestellten Summe unendlich-vieler unendlich-kleiner Produkte kann hier nicht mehr die Rede seyn, weil eine solche nicht existirt. Dagegen ist

$$\int_{b \div (c+\nu\varepsilon)} f \cdot dx = \int_{1 \div \nu\varepsilon} \frac{1}{x} \cdot dx = \log 1 - \log \nu\varepsilon = \log \frac{1}{\nu\varepsilon},$$

und

$$\int_{(c-\mu\varepsilon) \div a} f \cdot dx = \int_{(-\mu\varepsilon) \div (-1)} \frac{1}{x} \cdot dx = \log(-\mu\varepsilon) - \log(-1) = \log \mu\varepsilon.$$

Jeder einzelne dieser letztern beiden Ausdrücke zur Rechten wird nun für $\varepsilon = \frac{1}{\infty}$ (negativ oder positiv) unendlich-groß; die Summe beider Gleichungen giebt aber, für jeden Werth von ε, also auch für $\varepsilon = \frac{1}{\infty}$,

$$\int_{b \div (c+\nu\varepsilon)} f \cdot dx + \int_{(c-\mu\varepsilon) \div a} f \cdot dx = \log \frac{\mu}{\nu};$$

und dies ist also der Werth von $\int_{-1}^{+1} \frac{1}{x} \cdot dx$ im erweiterten Sinne des Cauchy; und daß dieser Werth auch von dem allgemein-bestimmten Integral $\int_{1 \div (-1)} \frac{1}{x} \cdot dx$ d. h. von $\log 1 - \log(-1)$ d. h. von $\log(-1)$ sehr verschieden ist, fällt deutlich in die Augen.

IV. Im Falle II. β. (also wenn eine der Grenzen oder alle beide unendlich-groß werden) erweitert Cauchy den Begriff seines Integrals

$$\int_{-\infty}^{b} f \cdot dx, \quad \text{oder} \quad \int_{a}^{\infty} f \cdot dx, \quad \text{oder} \quad \int_{-\infty}^{\infty} f \cdot dx$$

$\int_{(c-\mu\varepsilon) \div a} f \cdot dx$ ausgedrückte Rechnung den Werth der durch $\int_{a}^{c-\mu\varepsilon} f \cdot dx$ ausgedrückten Summe geben müßte, wenn ε nicht $\frac{1}{\infty}$, sondern endlich und positiv wäre, so daß letztere Summe noch existirte.

dahin, daß er statt $-\infty$ zunächst die Form $-\frac{1}{\mu\varepsilon}$, statt $+\infty$ aber die andere Form $\frac{1}{\nu\varepsilon}$ setzt, sich dabei μ und ν beliebig (unbestimmt) konstant und positiv denkt, und zuletzt als Definition annimmt:

$$(\mathfrak{C})\ldots\quad \left\{\begin{aligned} &\int_{-\infty}^{b} f\cdot dx = \int_{b \div \left(-\frac{1}{\mu\varepsilon}\right)} f\cdot dx \\ &\int_{a}^{\infty} f\cdot dx = \int_{\frac{1}{\nu\varepsilon}\div a} f\cdot dx \\ &\int_{-\infty}^{\infty} f\cdot dx = \int_{\frac{1}{\nu\varepsilon}\div\left(-\frac{1}{\mu\varepsilon}\right)} f\cdot dx \end{aligned}\right\}$$ unter der Voraussetzung, daß nach beendigter Rechnung $\varepsilon = \frac{1}{\infty}$ gesetzt wird,

so daß hier zur Rechten jedesmal die Rechnungs-Vorschriften stehen, mittelst welcher man von der Funktion f_x aus, zu den, mittelst der Zeichen zur Linken (nach Cauchy) bezeichneten Begriffen gelangt. — Tritt also mit diesem Falle II. β. nicht zugleich auch der erstere Fall II. α. ein, so ist der Sinn des Cauchy hier genau der unseres allgemein-bestimmten Integrals, nur daß $-\infty$ und $+\infty$ in der bestimmten Form $-\frac{1}{\mu\varepsilon}$ und $+\frac{1}{\nu\varepsilon}$ für $\varepsilon = \frac{1}{\infty}$ angenommen worden sind *).

Sind jedoch die Integrale zur Linken, als (numerisch-) bestimmte (im Sinne der N. 2. des §. 28. angesehen) convergente, so fällt dieser erweiterte Begriff des Cauchy auch mit dem letztgedachten zusammen.

V. Treten aber beide Fälle II. α. und II. β. gleichzeitig

---

*) Dieser Umstand erklärt (auch in unserem Sinne) die Richtigkeit der Anwendungen, welche Cauchy (z. B. pagg. 126. 127. des angef. Werkes) öfter von seinem Integrale $\int_{-\infty}^{\infty} f\cdot dx$ auch in dem Falle macht, wo dasselbe, als (numerisch-) bestimmtes Integral gedacht, nicht convergent ist, also als solches gar keinen Werth, oder wie man auch häufig sagt, einen unendlich-großen Werth haben würde.

ein, dann läßt sich z. B. die Bedeutung von $\int_{-\infty}^{\infty} f\cdot dx$ (nach Cauchy) aussprechen in der Gleichung

$$(\male)\cdots \quad \int_{-\infty}^{\infty} f\cdot dx = \int_{\frac{1}{\nu\varepsilon}}^{\div(c+\nu_1\varepsilon)} f\cdot dx + \int_{(c-\mu_1\varepsilon)}^{\div\left(-\frac{1}{\mu\varepsilon}\right)} f\cdot dx$$

für $\varepsilon = \frac{1}{\infty}$,

wo μ, ν, μ_1, ν_1, beliebig (unbestimmt) positiv gedacht sind.

Ganz analoge Bedeutungen nehmen bei Cauchy die Zeichen $\int_a^b f\cdot dx$, $\int_{-\infty}^{\infty} f\cdot dx$, 2c. 2c. an, wenn die Funktion f für mehrere Werthe c, c′, c″, 2c., die zwischen den Grenzen der Integrale liegen, ihre Stetigkeit unterbricht.

VI. In allen Fällen aber fällt der erweiterte Begriff des Cauchy mit dem (numerisch-) bestimmten Integral (im Sinne der N. 2. des §. 28.) zusammen, d. h. er enthält das letztere als einen besondern Fall in sich, so oft dieses letztere existirt, d. h. ununterbrochen und convergent ist.

VII. So oft in dem erweiterten Begriff des Cauchy die Werthe von μ, ν, μ_1, ν_1, 2c. beliebig positiv gedacht werden, so oft nennt er solches den allgemeinen Werth (valeur générale); so oft aber μ, ν, μ_1, ν_1, 2c. alle, den bestimmten Werth 1 haben, so oft nennt er solches den Hauptwerth (valeur principale).

Der allgemeine Werth und der Haupt-Werth des Cauchy unterscheiden sich aber nicht mehr von einander, sondern werden einander gleich, so oft das Integral, als (numerisch-) bestimmtes (im Sinne des §. 28. N. 2.) gedacht, ununterbrochen und convergent ist, weil sie dann beide mit dem Werthe dieses letztern zusammenfallen.

---

*) Den Unterschied (d. h. die Differenz) zwischen dem allgemeinen Werth und dem Hauptwerthe bezeichnet Cauchy im Falle der III. durch

$$\int_{c-\varepsilon}^{c-\mu\varepsilon} f\cdot dx + \int_{c+\nu\varepsilon}^{c+\varepsilon} f\cdot dx$$

§. 30.

Ist f eine beliebige Funktion von x und y, und sind $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{X}$ unabhängig von y, desgleichen $\mathfrak{y}$ und $\mathfrak{Y}$ unabhängig von x, — so ist allemal, — auch wenn die Funktion f für die gleichzeitigen Werthe x = a und y = b ihre Stetigkeit unterbricht, während a zwischen $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{X}$, und b zwischen $\mathfrak{y}$ und $\mathfrak{Y}$ liegen mag,

1) $$\int_{\mathfrak{X}\div\mathfrak{x}}\left(\int_{\mathfrak{Y}\div\mathfrak{y}} f\cdot dy\right)\cdot dy = \int_{\mathfrak{Y}\div\mathfrak{y}}\left(\int_{\mathfrak{X}\div\mathfrak{x}} f\cdot dx\right)\cdot dy$$

(S. VIII. Th. §. 95. N. 2.).

Dagegen ist nicht nothwendig allemal

2) $$\int_{\mathfrak{x}}^{\mathfrak{X}}\left(\int_{\mathfrak{y}}^{\mathfrak{Y}} f\cdot dy\right)\cdot dx = \int_{\mathfrak{y}}^{\mathfrak{Y}}\left(\int_{\mathfrak{x}}^{\mathfrak{X}} f\cdot dx\right)\cdot dy,$$

wenn die Integrale als (numerisch-) bestimmte (im Sinne des §. 28. N. 2.) gedacht werden, sondern es findet diese Gleichung 2. nur dann statt, wenn keines der Integrale ein unterbrochenes und keines divergent ist.

Aber eben deshalb gilt die Gleichung 2. auch nicht nothwendig allemal im Sinne des allgemeinen oder im Sinne des Haupt-Werthes des Cauchy.

Und eben so wenig ist nothwendig allemal

---

im Falle der IV. durch

$$\int_{-\frac{1}{\mu\varepsilon}}^{-\frac{1}{\varepsilon}} f\cdot dx + \int_{\frac{1}{\varepsilon}}^{\frac{1}{\nu\varepsilon}} f\cdot dx$$

im Falle der V. dagegen durch

$$\int_{-\frac{1}{\mu\varepsilon}}^{-\frac{1}{\varepsilon}} f\cdot dx + \int_{c-\varepsilon}^{c-\mu_1\varepsilon} f\cdot dx + \int_{c+\nu_1\varepsilon}^{c+\varepsilon} f\cdot dx + \int_{\frac{1}{\varepsilon}}^{\frac{1}{\nu\varepsilon}} f\cdot dx;$$

und jeden einzelnen dieser Summanden nennt er ein singuläres Integral (intégrale singulière).

Da die weitere Betrachtung der singulären Integrale uns ohne allem Nutzen zu seyn scheint, so soll hier von denselben nicht weiter die Rede seyn.

3) $$\int_{\mathfrak{x}}^{\mathfrak{X}} \left(\int_{\mathfrak{Y} \div \mathfrak{y}} f \cdot dy\right) \cdot dx = \int_{\mathfrak{y}}^{\mathfrak{Y}} \left(\int_{\mathfrak{X} \div \mathfrak{x}} f \cdot dx\right) \cdot dy.$$

In dem Falle nun, wo die Funktion $f_{x,y}$ für die gleichzeitig gesetzten Werthe $x = a$ und $y = b$, ihre Stetigkeit unterbricht, während a zwischen $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{X}$, und b zwischen $\mathfrak{y}$ und $\mathfrak{Y}$ liegen, oder wo $b = \mathfrak{y}$ oder $b = \mathfrak{Y}$ ist, — in dem Falle also, wo die Gleichung 3.) zwar noch statt finden kann, aber nicht mehr nothwendig statt zu finden braucht, — sucht nun Cauchy den Unterschied der beiden Doppel-Integrale in 3.), unter der Voraussetzung, daß das innere $\int_{\mathfrak{X} \div \mathfrak{x}} f \cdot dx$ oder $\int_{\mathfrak{Y} \div \mathfrak{y}} f \cdot dy$ stets ein allgemein-bestimmtes (§. 28. N. 1.)*), das äußere Integral dagegen allemal der (§. 29. VII.) definirte Hauptwerth des Cauchy, aber eben deshalb in allen den Fällen zu gleicher Zeit das im §. 28. N. 2. definirte numerisch-bestimmte Integral ist, in welchen letzteres als ununterbrochen und convergent sich ausweist, also wirklich einen Werth hat.

Setzt man zu dem Ende

4) $$\begin{cases} \int_{\mathfrak{y}}^{\mathfrak{Y}} \left(\int_{\mathfrak{X} \div \mathfrak{x}} f \cdot dx\right) \cdot dy - \int_{\mathfrak{x}}^{\mathfrak{X}} \left(\int_{\mathfrak{Y} \div \mathfrak{y}} f \cdot dy\right) \cdot dx = \varDelta, \\ \text{so findet sich} \\ \varDelta = \int_{\mathfrak{y}}^{\mathfrak{Y}} \left(\int_{(a+\varepsilon) \div (a-\varepsilon)} f \cdot dx\right) \cdot dy \quad \text{für} \quad \varepsilon = \frac{1}{\infty}, \end{cases}$$

d. h. wenn nach beendigter Integration $\varepsilon = \frac{1}{\infty}$ gesetzt wird, und wenn man unter denjenigen Integralen, welche die Form der numerisch-bestimmten haben, nöthigenfalls den Hauptwerth des Cauchy versteht, nämlich sobald sie als (numerisch-) be-

---

*) Cauchy hat zwar den Begriff des allgemein-bestimmten Integrals, so wenig eingeführt als das entsprechende Zeichen $\int_{b \div a} f \cdot dx$. Wir geben jedoch hier die Arbeiten des Cauchy ganz genau so, wie sie dem Wesen nach sind, bemühen uns aber, solche klarer darzustellen und bei der Gelegenheit sie auch zu berichtigen und zu verbessern.

stimmte Integrale im Sinne der N. 2. des §. 28. gedacht, entweder zu den unterbrochenen oder zu den divergenten gehören. Nur darf a nicht einer der Grenzen $\mathfrak{x}$ oder $\mathfrak{X}$ selbst gleich seyn.

Ist aber $a = \mathfrak{x}$ selbst, so wird

5) $$\Delta = \int_{\mathfrak{y}}^{\mathfrak{Y}} \left(\int_{(\mathfrak{x}+\varepsilon)\div\mathfrak{x}} f \cdot dx \right) \cdot dy \quad \text{für} \quad \varepsilon = \frac{1}{\infty}.$$

Und ist $a = \mathfrak{X}$, so wird

6) $$\Delta = \int_{\mathfrak{y}}^{\mathfrak{Y}} \left(\int_{\mathfrak{X}\div(\mathfrak{X}-\varepsilon)} f \cdot dx \right) \cdot dy \quad \text{für} \quad \varepsilon = \frac{1}{\infty}\text{ *)}.$$

Beweis. Denn man hat (nach N. 1.) für jedes ε

α) $$\int_{\mathfrak{Y}\div\mathfrak{y}} \left(\int_{(a-\varepsilon)\div\mathfrak{x}} f \cdot dx \right) \cdot dy = \int_{(a-\varepsilon)\div\mathfrak{x}} \left(\int_{\mathfrak{Y}\div\mathfrak{y}} f \cdot dy \right) \cdot dx.$$

und

β) $$\int_{\mathfrak{Y}\div\mathfrak{y}} \left(\int_{\mathfrak{X}\div(a+\varepsilon)} f \cdot dx \right) \cdot dy = \int_{\mathfrak{X}\div(a+\varepsilon)} \left(\int_{\mathfrak{Y}\div\mathfrak{y}} f \cdot dy \right) \cdot dx.$$

Addirt man nun beide Gleichungen α.) und β.) zu einander, so hat man zur Rechten offenbar die Summe, welche für $\varepsilon = \frac{1}{\infty}$ in den von Cauchy mit $\int_{\mathfrak{x}}^{\mathfrak{X}} \left(\int_{\mathfrak{Y}\div\mathfrak{y}} f \cdot dy \right) \cdot dx$ bezeichneten Hauptwerth desselben übergeht, auch wenn $\mathfrak{x}$ oder $\mathfrak{X}$ unendlich-groß und durch $-\frac{1}{\varepsilon}$, $+\frac{1}{\varepsilon}$ ersetzt worden seyn sollten [während dieser Hauptwerth mit unserem (numerisch-) bestimmten Integral $\int_{\mathfrak{x}}^{\mathfrak{X}} \left(\int_{\mathfrak{Y}\div\mathfrak{y}} f \cdot dx \right) \cdot dy$ übereinstimmt, so oft letzteres zu den ununterbrochenen und convergenten gehört, d. h. wirklich noch einen Werth hat (§. 29. III. IV.)]. — Zur Linken bekommt man aber bei der gedachten Addition, weil offenbar

$$\int_{\mathfrak{X}\div(a+\varepsilon)} f \cdot dx + \int_{(a-\varepsilon)\div\mathfrak{x}} f \cdot dx = \int_{\mathfrak{X}\div\mathfrak{x}} f \cdot dx - \int_{(a+\varepsilon)\div(a-\varepsilon)} f \cdot dx$$

ist, als Resultat

$$\int_{\mathfrak{Y}\div\mathfrak{y}} \left(\int_{\mathfrak{X}\div\mathfrak{x}} f \cdot dx \right) \cdot dy - \int_{\mathfrak{Y}\div\mathfrak{y}} \left(\int_{(a+\varepsilon)\div(a-\varepsilon)} f \cdot dx \right) \cdot dy;$$

---

*) Diese beiden Nummern 5.) und 6.), welche Cauchy nicht hat, müssen noch eingeschaltet werden, wenn spätere von Cauchy benutzte Thatsachen, z. B. was er pag. 213. der Exercises de Mathemat. Ière année sagt, aber sehr schlecht (d. h. eigentlich gar nicht) rechtfertigt, außer Zweifel gestellt seyn sollen.

während von diesem letzteren Resultate sowohl der Minuend als auch der Subtrahend bezüglich den durch $\int_{\mathfrak{y}}^{\mathfrak{Y}}(\cdots)\cdot dy$ bezeichneten (numerisch-) bestimmten Integralen gleich sind, so lange dieselben existiren, oder (im Falle $\mathfrak{y}$ oder $\mathfrak{Y}$ unendlich-groß und eines der gedachten durch $\int_{\mathfrak{y}}^{\mathfrak{Y}}(\cdots)dy$ bezeichneten Integrale nicht mehr convergent seyn sollte) für $\varepsilon = \frac{1}{\infty}$ doch allemal das geben, was Cauchy den Hauptwerth nennt. Dadurch ist nun unsere N. 4. erwiesen.

Sollte aber $a = \mathfrak{x}$ seyn, so würde bloß die Gleichung $\beta.$) allein genommen werden. Diese würde zur Rechten $\left(\text{für } \varepsilon = \frac{1}{\infty}\right)$ schon allein das geben, was Cauchy unter Hauptwerth versteht, und was unser (numerisch-) bestimmtes Integral ist, so oft letzteres existirt, während zur Linken $\int_{\mathfrak{X} \div (a+\varepsilon)} f\cdot dx$ in $\int_{\mathfrak{X} \div \mathfrak{x}} f\cdot dx - \int_{(\mathfrak{x}+\varepsilon) \div \mathfrak{x}} f\cdot dx$ übergeht und dadurch die N. 5. außer Zweifel gesetzt ist.

Ganz Analoges findet statt, wenn $a = \mathfrak{X}$ seyn sollte. Die Gleichung $\alpha.$) allein enthält dann schon den Beweis der N. 6., weil dann das Integral $\int_{(a-\varepsilon) \div \mathfrak{x}} f\cdot dx$ in $\int_{(\mathfrak{X}-\varepsilon) \div \mathfrak{x}} f\cdot dx$, also in $\int_{\mathfrak{X} \div \mathfrak{x}} f\cdot dx - \int_{\mathfrak{X} \div (\mathfrak{X}-\varepsilon)} f\cdot dx$ übergeht.

Beispiel. Ist z. B. $f = \frac{-x^2+y^2}{(x^2+y^2)^2}$, $\mathfrak{x} = \mathfrak{y} = -1$ und $\mathfrak{X} = \mathfrak{Y} = +1$, so ist

$$\int f\cdot dy = \frac{-y}{x^2+y^2}, \qquad \int f\cdot dx = \frac{x}{x^2+y^2}$$

und $a = 0$, so wie $b = 0$. — Es ist ferner

$$\int_{\mathfrak{Y} \div \mathfrak{y}} f\cdot dy = \frac{-2}{1+x^2} \quad \text{und} \quad \int_{\mathfrak{X} \div \mathfrak{x}} f\cdot dx = \frac{2}{1+y^2};$$

daher ist noch, weil $\int \frac{2}{1+y^2}\cdot dy = 2\cdot \frac{1}{Tg}\, y$ gefunden wird,

$$\int_{\mathfrak{y}}^{\mathfrak{Y}}\left(\int_{\mathfrak{X} \div \mathfrak{x}} f\cdot dx\right)\cdot dy = \left[2\,\frac{1}{Tg}\, y\right]_{1 \div (-1)}$$
$$= 2\,Arc\,tg.\,1 - 2\,Arc\,tg.\,(-1) = +\pi;$$

$$\int_{\mathfrak{x}}^{\mathfrak{X}}\left(\int_{\mathfrak{Y} \div \mathfrak{y}} f\cdot dy\right)\cdot dx = \left[-2\,\frac{1}{Tg}\, x\right]_{1 \div (-1)}$$
$$= -2\,Arc\,tg.\,1 + 2\,Arc\,tg.\,(-1) = -\pi.$$

Subtrahirt man diese beiden Gleichungen von einander, so findet man die Differenz der beiden Doppel-Integrale zur Linken, $= 2\pi$; und gerade so groß rechnet sich auch $\varDelta$ aus der obigen N. 4. aus; denn man findet

$$\int_{(a+\varepsilon)\div(a-\varepsilon)} f \cdot dx = \frac{\varepsilon}{\varepsilon^2+y^2} - \frac{-\varepsilon}{\varepsilon^2+y^2} = 2\frac{\varepsilon}{\varepsilon^2+y^2};$$

das Integral hiervon (nach y) ist $= 2 \cdot \frac{1}{Tg} \frac{y}{\varepsilon}$, und daher wird nun

$$\varDelta = \left[2\frac{1}{Tg}\frac{y}{\varepsilon}\right]_{1\div(-1)} = 4\,Arc\,tg.\frac{1}{\varepsilon} \quad \text{für} \quad \varepsilon = \frac{1}{\infty}$$

d. h. $\varDelta = 4\,Arc\,tg.(+\infty) = 4 \times \frac{1}{2}\pi = 2\pi$;

und so sieht sich unser Lehrsatz N. 4. in diesem Beispiele bestätigt.

§. 31.

Wenden wir diesen Lehrsatz §. 30. NN. 4.—6. zunächst auf den Fall an, daß f als eine bloße Funktion von u und $u = x+y\cdot i$ gedacht wird, — daß $\int f \cdot du = F_u$ ist und daß statt F_u nach und nach allerlei Funktionen von u gesetzt werden.

A. Setzt man aber zuerst $F_u = (u-a-b\cdot i)^\mu$, wo μ beliebig reell ist, so findet sich auf dem gewöhnlichen Wege der Integration der gedachte Unterschied

$$\varDelta \quad \text{d. h.} \quad \int_{\mathfrak{y}}^{\mathfrak{Y}} \left(\int_{(a+\varepsilon)\div(a-\varepsilon)} f \cdot dx\right) \cdot dy$$

der beiden Doppel-Integrale, wenn a zwischen den Grenzen $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{X}$, und b zwischen den Grenzen $\mathfrak{y}$ und $\mathfrak{Y}$ liegt, eben so wie wenn a und b außerhalb dieser Grenzen liegen, oder mit einer oder der andern dieser Grenzen zusammenfallen, doch allemal der Null gleich, mit Ausnahme des einzigen Falles, wo $\mu = -1$, also $F_u = \frac{1}{u-a-b\cdot i}$ ist und der Fälle, wo μ negativ und an sich >1 ist und gleichzeitig $b = \mathfrak{Y}$ oder $b = \mathfrak{y}$ seyn sollte. — In diesem erstgedachten Ausnahmsfalle aber zeigt sich derselbe Unterschied $\varDelta$, $= 2\pi$, wenn a und b zwischen den gedachten Grenzen liegen, dagegen $\varDelta = \pi$, wenn a oder b mit einer dieser Grenzen zusam-

menfällt, — endlich $\Delta = \frac{1}{2}\pi$, wenn a und b mit einer ihrer Grenzen zusammenfallen *).

Um dies recht deutlich zu erkennen und der Schwierigkeit, welche die Mehrdeutigkeit der Logarithmen an die Hand giebt, aus dem Wege zu gehen, muß man die Rechnung etwa so ausführen:

Weil nämlich $\int f\cdot dx = \int f\cdot du = F_u = \frac{1}{u-a-b\cdot i}$ ist, so hat man sogleich unmittelbar

$$\int_{(a+\varepsilon)\div(a-\varepsilon)} f\cdot dx = \frac{1}{\varepsilon+(y-b)\cdot i} - \frac{1}{-\varepsilon+(y-b)\cdot i} = \frac{2\varepsilon}{\varepsilon^2+(y-b)^2}.$$

Integrirt man nun dies nach y, so ergiebt sich $2\cdot\frac{1}{Tg}\frac{y-b}{\varepsilon}$; und der Unterschied Δ wird daher $= 2\,Arc\,tg.\frac{\mathfrak{Y}-b}{\varepsilon} - 2\,Arc\,tg.\frac{\mathfrak{y}-b}{\varepsilon}$ (nach §. 30. N. 4.), so lange nur a zwischen $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{X}$ liegt.

Haben nun $\mathfrak{Y}-b$ und $\mathfrak{y}-b$ einerlei Vorzeichen d. h. liegt b außerhalb der Grenzen $\mathfrak{Y}$ und $\mathfrak{y}$, so ist für $\varepsilon = \frac{1}{\infty}$ dieser Unterschied offenbar $= 0$; fällt aber b mit einer dieser Grenzen, d. h. entweder mit $\mathfrak{y}$ oder mit $\mathfrak{Y}$ zusammen, so hat man für $\varepsilon = \frac{1}{\infty}$, entweder $\Delta = 2\,Arc\,tg.(+\infty)$ oder $\Delta = -2\,Arc\,tg.(-\infty)$ d. h. jedesmal $\Delta = \pi$. — Und liegt endlich b zwischen $\mathfrak{y}$ und $\mathfrak{Y}$, so daß $\mathfrak{Y}-b$ positiv, dagegen $\mathfrak{y}-b$ negativ ist, so folgt für $\varepsilon = \frac{1}{\infty}$, $\Delta = 2\,Arc\,tg.(+\infty) - 2\,Arc\,tg.(-\infty)$ d. h. $\Delta = 2\pi$, wenn nur jedesmal a zwischen den Grenzen $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{X}$ liegt.

Ist aber $a = \mathfrak{x}$, so ist (nach §. 30. N. 5.)

$$\Delta = \int_{\mathfrak{y}}^{\mathfrak{Y}} \left(\int_{(a+\varepsilon)\div a} f.dx\right)\cdot dy = \int_{\mathfrak{y}}^{\mathfrak{Y}} \left(\frac{1}{\varepsilon+(y-b)\cdot i} - \frac{1}{(y-b)\cdot i}\right)\cdot dy$$

für $\varepsilon = \frac{1}{\infty}$.

Nun ist aber

---

*) Der Unterschied Δ zeigt sich also in diesem Ausnahmsfalle nur dann $= 0$, wenn a und b außerhalb der oben gedachten Grenzen liegen; — dann aber versteht es sich von selbst, weil dann F_u d. h. $F_{x+y\cdot i}$ für $x = a$ und $y = b$ ihre Stetigkeit nicht unterbricht.

$$\frac{1}{\varepsilon+(y-b)\cdot i}-\frac{1}{(y-b)\cdot i}=\frac{\varepsilon}{\varepsilon^2+(y-b)^2}+i\cdot\left[\frac{1}{(y-b)}-\frac{y-b}{\varepsilon^2+(y-b)^2}\right].$$

Integrirt man daher dies nach y, so erhält man

$$\frac{1}{Tg}\frac{y-b}{\varepsilon}+\tfrac{1}{2}i\cdot log\frac{(y-b)^2}{\varepsilon^2+(y-b)^2},$$

d. h. $$\frac{1}{Tg}\frac{y-b}{\varepsilon}\quad \text{für}\quad \varepsilon=\frac{1}{\infty};$$

folglich wird jetzt

$$\Delta = Arc\,tg.\frac{Y-b}{\varepsilon}-Arc\,tg.\frac{y-b}{\varepsilon}\quad \text{für}\quad \varepsilon=\frac{1}{\infty},\quad \text{d. h.}\quad \Delta=\pi,$$

wenn b zwischen y und Y liegt, oder $\Delta=\frac{1}{2}\pi$, wenn b mit einer dieser Grenzen zusammenfällt. Denselben Werth erhält man aber aus §. 30. N. 6., im Falle $a = X$ seyn sollte.

B. Wird $F_u = (u-a-b\cdot i)^\mu\cdot log(u-a-b\cdot i)$ gedacht, wo μ wiederum beliebig reell ist, so findet sich der gedachte Unterschied Δ allemal der Null gleich, auch wenn $\mu=-1$ ist, wenn nur nicht $b = Y$ und auch nicht $b = y$ ist; — wie man sogleich auf dem gewöhnlichen Wege der Integration erkennt, wenn man namentlich zu Hilfe nimmt, daß, wenn μ nicht $=-1$ ist,

$$\int z^\mu\cdot log\,z\cdot dz=\frac{1}{\mu+1}\cdot z^{\mu+1}\left[-\frac{1}{\mu+1}+log\,z\right],$$

für $\mu=-1$ aber

$$\int\frac{log\,z}{z}\cdot dz=\tfrac{1}{2}(log\,z)^2$$

gefunden wird. Man muß nur $(log\,\alpha)^2-(log\,\beta)^2$ zunächst in

$$(log\,\alpha+log\,\beta)(log\,\alpha-log\,\beta)\quad \text{d. h. in}\quad log(\alpha\beta)\times log\frac{\alpha}{\beta},$$

und dann die Logarithmen der imaginären Zahlen nach VIII. Th. Einleitg. §. 5. umformen.

C. Ist F_u irgend eine algebraische rationale gebrochene Funktion von u, in derem Nenner der Faktor $u-a-b\cdot i$ nur einmal vorkommt, so kann man von ihr den Partialbruch

$\frac{\alpha}{u-a-b\cdot i}$ absondern; und da für den übrigen Theil der Funktion keine Unterbrechung der Stetigkeit mehr statt findet, so ist der Unterschied Δ der gedachten beiden Doppel-Integrale (§. 30. NN. 4.–6.) jetzt genau derselbe, wie er für den abgesonderten Partialbruch $\frac{\alpha}{u-a-b\cdot i}$ (in A.) gefunden wird, nämlich

$= 2\pi\cdot\alpha$, wenn a zwischen $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{X}$, und b zwischen $\mathfrak{y}$ und $\mathfrak{Y}$ liegt, — oder

$= \pi\cdot\alpha$, wenn a oder b mit einer ihrer Grenzen zusammenfällt, — endlich

$= \frac{1}{2}\pi\cdot\alpha$, wenn a und b mit einer ihrer Grenzen zusammenfallen.

Und sollte im Nenner von F_u der Faktor $u-a-b\cdot i$ mehrere Male vorkommen, so kann man die Partialbrüche

$\frac{\alpha}{u-a-b\cdot i}+\frac{\beta}{(u-a-b\cdot i)^2}+\frac{\gamma}{(u-a-b\cdot i)^3}+$ ꝛc. ꝛc. absondern; und da der Unterschied Δ der beiden Doppel-Integrale (§. 30. NN. 4.–6.) nach A.) für die letzteren Partialbrüche, welche die Zähler β, γ, ꝛc. haben, abermals der Null gleich wird, wenn nur nicht $b=\mathfrak{Y}$ und auch nicht $b=\mathfrak{y}$ ist, so ist auch jetzt noch dieser Unterschied Δ, $= 2\pi\cdot\alpha$, oder $= \pi\cdot\alpha$, je nachdem a zwischen $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{X}$ liegt, oder mit einer dieser Grenzen zusammenfällt, wenn nur α der Koeffizient des Gliedes $\alpha\cdot\varepsilon^{-1}$ ist in der Entwickelung von $F_{a+b.i+\varepsilon}$ nach steigenden Potenzen von ε; in so ferne diese Entwickelung, wenn man zuletzt $u-a-b\cdot i$ statt ε schreibt, eben die Absonderung der Partialbrüche bewirkt, wie aus der Theorie der Zerlegung einer gebrochenen Funktion in ihre Partialbrüche bekannt ist.

Kommt der Faktor $u-a-b\cdot i$ im Nenner von F_u nur einmal vor, so ist der Zähler α, $= du\cdot F_{u+du}$ für $u=a+b\cdot i$ und $du=\frac{1}{\infty}$, wie aus der Zerlegung einer Funktion in ihre Partialbrüche bekannt ist.

D. Was wir aber so eben für eine algebraische rationale gebrochene Funktion F_u ausgesagt haben, gilt offenbar für jede Funktion F_u von der Form $\frac{W_u}{(u-a-b\cdot i)^n}$, wenn $n=1$ oder beliebig positiv ganz ist und W_u für $u=a+b\cdot i$ nicht mehr die Form $\frac{1}{0}$ annimmt, übrigens aber ganz beliebig ist; — weil man, indem $u-a-b\cdot i=\varepsilon$ gesetzt wird $\frac{W_{a+b\cdot i+\varepsilon}}{\varepsilon^n}$ in eine Reihe von der Form

$$\frac{A}{\varepsilon^n}+\frac{B}{\varepsilon^{n-1}}+\cdots+\frac{\gamma}{\varepsilon^3}+\frac{\beta}{\varepsilon^2}+\frac{\alpha}{\varepsilon}+\psi_\varepsilon,$$

verwandeln kann, wo ψ_ε für $\varepsilon=0$ nicht mehr die Form $\frac{1}{0}$ annimmt. Die Funktion F_u ist dadurch in lauter Theile zerlegt, für welche mit Ausnahme des Theils $\frac{\alpha}{u-a-b\cdot i}$ die Differenz $\varDelta$ der beiden Doppel-Integrale der Null gleich wird, entweder nach A.) oder weil die Funktion (wie z. B. $\psi_{u-a-b\cdot i}$) für $x=a$ und $y=b$ nicht mehr ihre Stetigkeit unterbricht. — Nur muß, wenn $n>1$ ist, vorausgesetzt werden, daß nicht $b=\mathfrak{Y}$ und auch nicht $b=\mathfrak{y}$ ist.

Und wäre n gebrochen, etwa $=m+\nu$, wo m ganz und $\nu<1$ ist, so würde sich denken lassen

$$F_u=\frac{W_u}{(u-a-b\cdot i)^{m+\nu}}=\frac{1}{\varepsilon^\nu}\cdot\left[\frac{A}{\varepsilon^m}+\cdots+\frac{B}{\varepsilon^2}+\frac{C}{\varepsilon}+\psi_\varepsilon\right]$$

und es wäre also dann der Unterschied $\varDelta$ der beiden Doppel-Integrale für F_u, genau so (nach A.) wie er für $\frac{\psi_\varepsilon}{\varepsilon^\nu}$ d. h. für $\frac{\psi_{u-a-b\cdot i}}{(u-a-b\cdot i)^\nu}$ gefunden wird, wenn $\nu<1$ ist, nämlich der Null gleich, wenn nur nicht $b=\mathfrak{Y}$ und auch nicht $b=\mathfrak{y}$ ist.

Weil aber jetzt der Koeffizient α des Gliedes $\alpha\cdot\varepsilon^{-1}$ der

Entwickelung von $F_{a+b\cdot i+\varepsilon}$, offenbar $=0$ wird, so giebt das Verfahren C.) auch jetzt noch den richtigen Unterschied Δ der fraglichen beiden Doppel-Integrale, so lange man nur unter α den Zähler des Partialbruches versteht, welcher dem Nenner $u-a-b\cdot i$ angehört (und welcher hier zuletzt $=0$ gewesen ist).

§. 32.

Das Endresultat dieser Untersuchung ist also Folgendes:

Ist F_u eine ganz beliebige Funktion von u; stellt ferner $a+b\cdot i$ nach und nach alle verschiedenen Werthe von u vor, welche F_u auf die Form $\frac{1}{0}$ bringen (oder, wie man häufiger sagt, der Funktion F_u einen unendlich-großen Werth geben, oder, was dasselbe ist, der Gleichung $\frac{1}{F_u}=0$ genügen), — liegt dabei a zwischen $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{X}$, und b zwischen $\mathfrak{y}$ und $\mathfrak{Y}$, so ist allemal der Unterschied Δ, d. h.

$$(\odot.\ 1)\cdots\quad \int_{\mathfrak{y}}^{\mathfrak{Y}}(F_{\mathfrak{X}+y\cdot i}-F_{\mathfrak{x}+y\cdot i})\cdot dy+i\cdot\int_{\mathfrak{x}}^{\mathfrak{X}}(F_{x+\mathfrak{Y}\cdot i}-F_{x+\mathfrak{y}\cdot i})\cdot dx,$$
$$=2\pi\cdot\Sigma(\alpha),$$

wenn α jedesmal den Koeffizienten des Gliedes $\alpha\cdot\varepsilon^{-1}$ vorstellt, in der Entwickelung von $F_{a+b\cdot i+\varepsilon}$ nach steigenden Potenzen von ε *), und wenn $\Sigma(\alpha)$ die Summe aller dieser Koeffizienten ausdrückt für alle verschiedenen Werthe von $a+b\cdot i$, — wenn ferner von demjenigen Koeffizienten α nur die Hälfte genommen wird, dessen zugehöriger Werth a einer der Grenzen $\mathfrak{X}$ oder $\mathfrak{x}$ gleich seyn sollte, wenn ferner gar nur der vierte Theil genommen wird, im Falle auch noch b mit einer der Grenzen $\mathfrak{Y}$ oder $\mathfrak{y}$ zusammenfallen sollte, welches letztere jedoch voraussetzt, daß nun der Faktor $u-a-b\cdot i$ in dem Nenner von F_u nur ein einziges Mal vorkommt (nach

---

*) Diesen Koeffizienten α nennt Cauchy le résidu der Funktion F_u für $u=a+b\cdot i$ genommen (S. Exercises de Mathém. I[e] année. 1826.).

§. 31. A.), oder daß, wenn der Nenner von F_u den Faktor $(u-a-b\cdot i)^\varrho$ hat, ϱ nicht größer als 1 ist.

Kommt aber einer dieser Faktoren $u-a-b\cdot i$ im Nenner von F_u nur einmal vor, so ist allemal

$$(♁)\cdots \quad \alpha = du\cdot F_{u+du} \quad \text{für} \quad u = a+b\cdot i \quad \text{und} \quad du = \frac{1}{\infty}.$$

Kommt einer dieser Faktoren $u-a-b\cdot i$ im Nenner von F_u mehrere Male z. B. n mal vor, so würde diese letztere Gleichung (♁) noch immer den Werth von α geben, wenn man nur rechts statt F_u das setzen wollte, was übrig bleibt, wenn man von dieser Funktion erst alle ihre Partialbrüche von der Form

$$\frac{A}{(u-a-b\cdot i)^n} \quad \text{bis zu} \quad \frac{N}{(u-a-b\cdot i)^2} \quad \text{subtrahirt.}$$

Dabei stellen in der Gleichung ⊙. 1. die Integrale zur Linken, (numerisch-) bestimmte (im Sinne der N. 2. des §. 28.) vor, oder doch, im Falle letztere nicht mehr existiren (in so ferne sie unterbrochene oder divergente seyn sollten) die Hauptwerthe des Cauchy, wie solche §. 29. VII. definirt worden sind.

Anmerkg. Dieser Satz ⊙. 1. ist nun derjenige, aus welchem Cauchy einige sehr allgemeine Formeln zur Auswerthung bestimmter Integrale zieht; indem er für die Funktion F und für die Grenzen $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{y}$ und $\mathfrak{Y}$ solche Annahmen macht, daß in der Formel ⊙. 1. drei der 4 Integrale verschwinden, oder zwei nur verschwinden, die beiden andern aber in ein einziges zusammenfallen oder durch einander ausgedrückt werden. Dies mag nun das folgende näher nachweisen.

§. 33.

Es werden nämlich die Werthe der Integrale

$$\int_{\mathfrak{y}}^{\mathfrak{Y}} F_{\mathfrak{X}+y\cdot i}\cdot dy, \quad \int_{\mathfrak{y}}^{\mathfrak{Y}} F_{\mathfrak{x}+y\cdot i}\cdot dy, \quad \int_{\mathfrak{x}}^{\mathfrak{X}} F_{x+\mathfrak{Y}\cdot i}\cdot dx, \quad \text{etc.}$$

offenbar unendlich-klein, so oft bezüglich die Funktionen

$$F_{\mathfrak{X}+y\cdot i}, \quad F_{\mathfrak{x}+y\cdot i}, \quad F_{x+\mathfrak{Y}\cdot i}, \quad \text{etc.}$$

innerhalb der Grenzen der Integrale stets unendlich-klein bleiben und die Grenzen selbst nicht unendlich-groß sind.

Ist aber das Produkt

$$(x+y\cdot i)\cdot F_{x+y\cdot i} = p_{x,y}$$

zwischen den jedesmaligen Grenzen der Integrale ebenfalls stets unendlich-klein, so verschwindet das entsprechende der obigen Integrale auch dann noch, wenn die gedachten Grenzen (eine davon oder alle beide) positiv oder negativ unendlich-groß sind.

Denn es ist dann auch für $\mathfrak{y} = -\infty$ oder $\mathfrak{Y} = +\infty$, z. B. wenn wir bloß p_y statt $p_{\mathfrak{X},y}$ schreiben, und wenn man bedenkt, daß

$$\frac{1}{\mathfrak{X}+y\cdot i} = \frac{\mathfrak{X}-y\cdot i}{\mathfrak{X}^2+y^2} = \frac{\mathfrak{X}}{\mathfrak{X}^2+y^2} - i\cdot\frac{y}{\mathfrak{X}^2+y^2}$$

ist,

$$\int_{\mathfrak{y}}^{\mathfrak{Y}} F_{\mathfrak{X}+y\cdot i}\cdot dy = \int_{\mathfrak{y}}^{\mathfrak{Y}} \frac{p_y}{\mathfrak{X}+y\cdot i}\cdot dy$$

$$= \int_{\mathfrak{y}}^{\mathfrak{Y}} p_y\cdot\frac{\mathfrak{X}}{\mathfrak{X}^2+y^2}\cdot dy - i\int_{\mathfrak{y}}^{\mathfrak{Y}} p_y\cdot\frac{y}{\mathfrak{X}^2+y^2}\cdot dy$$

(nach VIII. Th. §. 89.)

$$= p'\cdot\int_{\mathfrak{y}}^{\mathfrak{Y}} \frac{\mathfrak{X}}{\mathfrak{X}^2+y^2}\cdot dy - i\cdot p''\cdot\int_{\mathfrak{y}}^{\mathfrak{Y}} \frac{y}{\mathfrak{X}^2+y^2}\cdot dy,$$

wo p' und p'' Mittelwerthe von p_y, also ebenfalls unendlich-klein sind. Integrirt man nun wirklich, so findet sich

$$p'\cdot\int_{\mathfrak{y}}^{\mathfrak{Y}} \frac{\mathfrak{X}}{\mathfrak{X}^2+y^2}\cdot dy = p'\cdot\left(Arc\,tg.\frac{\mathfrak{Y}}{\mathfrak{X}} - Arc\,tg.\frac{\mathfrak{y}}{\mathfrak{X}}\right)$$ also unendlich-klein,

und

$$p''\cdot\int_{\mathfrak{y}}^{\mathfrak{Y}} \frac{y}{\mathfrak{X}^2+y^2}\cdot dy = p''\cdot L\sqrt{\frac{\mathfrak{X}^2+\mathfrak{Y}^2}{\mathfrak{X}^2+\mathfrak{y}^2}}$$ also auch unendlich-klein,

denn obgleich der 2te Faktor die Form $= L\infty$ annehmen kann, so ist doch allemal $p''\cdot L\infty$ (nach VIII. Th. Einleitg. §. 16.) noch unendlich-klein, weil p'' unendlich-klein ist.

Aehnliches gilt für die ähnlichen Integrale. — Nimmt man daher in dem Satze ⊙. 1. des §. 32. die Grenzen der Integrale so an, daß man

$$\mathfrak{x} = -\infty, \quad \mathfrak{X} = +\infty, \quad \mathfrak{y} = 0 \text{ und } \mathfrak{Y} = +\infty$$

hat, und setzt man dabei die Funktion F_u so voraus, daß

1) $F_{x+y\cdot i}$ unendlich-klein wird für $x = \pm\infty$ und für alle positiven Werthe von y,

und

2) $(x+y\cdot i)\cdot F_{x+y\cdot i}$ unendlich-klein wird für $y=\infty$ und für alle reellen Werthe von x, so verschwinden in der Formel ⊙. 1.) drei der vier Integrale und man erhält sogleich

$$(\text{C. } 1.)\cdots \int_{-\infty}^{\infty} F_x\cdot dx \quad \text{d. h.} \quad \int_0^{\infty}(F_x+F_{-x})\cdot dx\;{}^{*)} = 2\pi\cdot i\cdot\Sigma(\alpha),$$

wenn $\Sigma(\alpha)$ die im §. 32. festgestellte Bedeutung hat, so daß α nie etwas anderes ist, als der Koeffizient von ε^{-1} in der Entwickelung von $F_{a+b\cdot i+\varepsilon}$ nach steigenden Potenzen von ε; während $a+b\cdot i$ alle Werthe von x vorstellt, welche $\frac{1}{F_x}=0$ machen und in denen b positiv oder Null ist, wenn

---

*) Es ist allemal

$$\int_{-\infty}^{+\infty} = \int_{-\infty}^{0} + \int_0^{\infty} \quad \text{und} \quad \int_{-\infty}^{0} F_x\cdot dx = \int_0^{\infty} F_{-x}\cdot dx. -$$

Man kann auch hier sogleich noch Folgendes hinzufügen: Setzt man

$$x=\frac{1}{y}, \quad \text{so wird} \quad \int_0^{\infty} F_x\cdot dx = \int_0^{\infty} F_{\frac{1}{y}}\cdot\frac{1}{y^2}\cdot dy,$$

$$\text{also} \quad \int_0^{\infty}\left(F_x+F_{-x}\right)\cdot dx = \int_0^{\infty}\frac{1}{y^2}\cdot\left(F_{\frac{1}{y}}+F_{-\frac{1}{y}}\right)\cdot dy.$$

Also kann man statt des einen dieser beiden Integrale auch die halbe Summe beider setzen, so daß man auch noch

$$\int_{-\infty}^{\infty} F_x\cdot dx = \int_0^{\infty}\left(F_x+F_{-x}\right)\cdot dx$$

$$= \int_0^{\infty}\frac{x\cdot\left(F_x+F_{-x}\right)+\frac{1}{x}\cdot\left(F_{\frac{1}{x}}+F_{-\frac{1}{x}}\right)}{2}\cdot\frac{1}{x}\cdot dx$$

hat. Der Werth des erstern oder des andern dieser 3 Integrale ist daher allemal auch der Werth des dritten.

Diese Schlüsse gelten alle noch, auch wenn es sich um die Hauptwerthe des Cauchy handelt.

man nur zugleich, so oft $b = 0$ wird (nach §. 32.) von dem zugehörigen Gliede α der Summe $\Sigma(\alpha)$, nur die Hälfte nimmt, welcher letztere Fall jedoch (nach §. 31. A.) voraussetzt, daß der (nun reelle) Faktor $x-a$ in dem Nenner von F_x in der Potenz $(x-a)^\mu$ vorkommt und $\mu \overline{\overline{<}} 1$ ist.

Dabei sind die Integrale zur Linken entweder (numerisch-) bestimmte (im Sinne der N. 2. des §. 28.) oder (im Falle sie unterbrochen oder divergent sind) doch noch immer Hauptwerthe des Cauchy.

Man wende aber diese Sätze auf keinen Einzelfall an, so lange nicht die Bedingungen 1.) und 2.) wirklich erfüllt sind.

§. 34.

Erstes Beispiel. Diese Bedingungen sind aber erfüllt, so oft F_x eine gebrochene (rationale algebraische) Funktion $\frac{\varphi_x}{\psi_x}$ von x, und ihr Zähler φ_x um mindestens zwei Grade niedriger ist als ihr Nenner ψ_x. Setzt man dabei voraus, daß der Nenner ψ_x lauter ungleiche Faktoren von der Form $x-a-b\cdot i$ hat, in denen b entweder Null oder positiv ist, so findet sich sogleich (aus C)

$$\text{I.} \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi_x}{\psi_x} \cdot dx = 2\pi \cdot i \cdot \Sigma\left(dx \cdot \frac{\varphi_{x+dx}}{\psi_{x+dx}}\right) \quad \text{für} \quad x = a+b\cdot i,$$

wo jedoch nur alle diejenigen Faktoren von ψ in Betracht kommen, in denen b entweder 0 oder positiv ist, während so oft $b = 0$ ist, von dem entsprechenden Gliede der Summe Σ nur die Hälfte genommen werden darf. — Weil aber dann (wenn $b = 0$) und nur dann, das Integral zur Linken gleichzeitig unterbrochen ist, so wird dann die Gleichung 1.) nur richtig seyn, wenn man unter dem Integralzeichen den Hauptwerth des Cauchy versteht.

Alles dieses gilt, wenn auch der Zähler φ_x eine irrationale Funktion von der Form $Ax^\mu + Bx^\nu + Cx^\varrho + \cdots$ seyn sollte, in welcher der höchste Exponent μ um mehr als 1 kleiner als

der Grad der ganzen Funktion ψ_x im Nenner ist, und der Nenner lauter verschiedene einfache Faktoren, oder doch nur solche gleiche Faktoren hat [von der Form $(x-a-b\cdot i)^n$], in denen b negativ ist.

Sollte aber der Nenner ψ_x gleiche Faktoren $x-a-b\cdot i$ haben, in denen b entweder 0 oder positiv ist, etwa den Faktor $(x-a-b\cdot i)^n$, so müßte man bei der Berechnung des zugehörigen Gliedes der Summe Σ jetzt statt $\frac{\varphi_x}{\psi_x}$ das setzen, was übrig bleibt, wenn man von diesem Quotienten alle seine Partialbrüche von der Form

$$\frac{\alpha_n}{(x-a-b\cdot i)^n}+\frac{\alpha_{n-1}}{(x-a-b\cdot i)^{n-1}}+\cdots+\frac{\alpha_2}{(x-a-b\cdot i)^2},$$

(mit Ausschluß des Partialbruches $\frac{\alpha}{x-a-b\cdot i}$) davon subtrahirt, d. h. man vergesse nicht, daß dann statt $dx\cdot\frac{\varphi_{x+dx}}{\psi_{x+dx}}$ der Koeffizient von ε^{-1} der Entwickelung von $\frac{\varphi_{a+b\cdot i+\varepsilon}}{\psi_{a+b\cdot i+\varepsilon}}$ nach steigenden Potenzen von ε gesetzt werden muß.

Cauchy betrachtet auf diesem Wege (in seinem Résumé des leçons etc. 1823.) die beiden Integrale

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{(-x\cdot i)^{\mu-1}}{1+x^2}\cdot dx \quad \text{und} \quad \int_{-\infty}^{\infty}\frac{(-x\cdot i)^{\mu-1}}{1-x^2}\cdot dx,$$

in denen μ positiv und kleiner als 2 gedacht ist und von denen wir hier nur das erstere beachten wollen, da das andere, als (numerisch-) bestimmtes gedacht, zweimal (für $x=-1$ und für $x=+1$) unterbrochen ist, folglich gar keinen Werth mehr hat, die Anwendung der Formel 1. also nur den Hauptwerth des Cauchy liefert.

Da (in dem ersteren) der Nenner $1+x^2$ zweimal der Null gleich wird, einmal für $x=-i$ und dann für $x=+i$, und nur in letzterem Falle b positiv, nämlich $=+1$ ist,

während $a = 0$, so hat man dasmal rechts in 1.) nur ein einziges Glied, nämlich das Glied

$$2\pi \cdot i \cdot dx \cdot \frac{(-i)^{\mu-1} \cdot (x+dx)^{\mu-1}}{1+(x+dx)^2} \quad \text{für} \quad x = +i;$$

d. h. (weil der Nenner $= 2i \cdot dx$ wird) das Glied

$$\pi \cdot (-i)^{\mu-1} \cdot (+i)^{\mu-1} \quad \text{d. h.} \quad 1^{\mu-1} \cdot \pi,$$

wofür Cauchy ohne Weiteres π setzt.

Dadurch erhält Cauchy

$$2) \qquad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(-xi)^{\mu-1}}{1+x^2} \cdot dx = \pi,$$

wo $\quad (-xi)^{\mu-1} = x^{\mu-1}(-i)^{\mu-1} \quad$ und

$$(-i)^{\mu-1} = Cos(\mu-1)(2m+\tfrac{1}{2})\pi \mp i \cdot Sin(\mu-1)(2m+\tfrac{1}{2})\pi$$

ist, während m entweder 0 oder eine positive ganze Zahl vorstellt (deren Werth nun eigentlich noch näher bestimmt werden müßte).

Cauchy zerlegt aber $\int_{-\infty}^{\infty}$ in $\int_{-\infty}^{0} + \int_{0}^{\infty}$, so daß die vorstehende Gleichung übergeht in

$$3) \qquad \int_{0}^{\infty} [(+i)^{\mu-1} + (-i)^{\mu-1})] \cdot \frac{x^{\mu-1}}{1+x^2} \cdot dx = \pi,$$

und er setzt dann ohne Weiteres

$$(+i)^{\mu-1} + (-i)^{\mu-1} = 2\,Sin\tfrac{1}{2}\mu\pi.$$

Dadurch erhält er sogleich (aus 3.)

$$4) \qquad \int_{0}^{\infty} \frac{x^{\mu-1}}{1+x^2} \cdot dx = \frac{\pi}{2\,Sin\frac{1}{2}\mu\pi},$$

welches Resultat allerdings mit dem von Euler bereits gefundenen (S. §. 9. N. 18.) übereinstimmt, durch das vorliegende Schlußverfahren aber nicht hinreichend motivirt ist. — Solche Rechnungen, in denen i d. h. $\sqrt{-1}$ vorkommt, müssen etwas anders und so geführt werden, wie ein Beispiel davon in dem letzten der „Aufsätze aus dem Gebiete der höheren Mathematik.“ Berlin 1828. zu sehen ist, — wenn sie nämlich auf vollständige

Gründlichkeit Anspruch machen wollen. Auch in dem vorliegenden Fall läßt sich das eben angeführte Verfahren mit Leichtigkeit und Sicherheit anwenden.

Zweites Beispiel. Setzt man in der Formel (C. 1.) des §. 33. $\frac{f_x}{x^2+k^2}$ statt F_x, so sind die Bedingungen 1.) und 2.) daselbst wiederum erfüllt, so lange $f_{x+y\cdot i}$ für $y=\infty$ nicht unendlich-groß wird. Setzt man daher noch voraus, daß die neue Funktion f_x durch keinen Werth von x auf die Form $\frac{1}{0}$ gebracht werden kann, so hat man (weil der Nenner x^2+k^2 zweimal der Null gleich wird, nämlich für $x=-k\cdot i$ und für $x=+k\cdot i$ und nur im letztern Fall $b=k$, also positiv wird, wenn man k positiv voraussetzt) dasmal zur Rechten (in C. 1.) wiederum nur ein einziges Glied, nämlich das Glied

$$2\pi\cdot i\cdot dx\cdot\frac{f_{x+dx}}{(x+dx)^2+k^2} \quad \text{für} \quad x=k\cdot i;$$

d. h. $\frac{\pi}{k}\cdot f_{ki}$; also findet sich

$$\text{II.} \qquad \int_0^\infty (f_x+f_{-x})\cdot\frac{1}{x^2+k^2}\cdot dx=\frac{\pi}{k}\cdot f_{k\cdot i},$$

wenn nur k positiv ist und f_x durch keinen reellen oder imaginären Werth von x auf die Form $\frac{1}{0}$ gebracht werden kann und wenn endlich $f_{x+y\cdot i}$ für $y=\infty$ nicht unendlich-groß wird.

Drittes Beispiel. Setzt man aber $\frac{x\cdot f_x}{x^2+k^2}$ statt F_x (in C. 1. des §. 33.), so ist die Bedingung 2.) daselbst nur dann erfüllt, wenn man noch $f_{x+y\cdot i}$ für $y=\infty$ unendlich-klein voraussetzt.

Dann findet sich aber sogleich

$$\text{III.} \quad \int_0^\infty (f_x - f_{-x}) \cdot \frac{x}{x^2+k^2} \cdot dx = \pi \cdot i \cdot f_{k \cdot i},$$

wenn nur $f_{x+y \cdot i}$ unendlich-klein wird für $y = \infty$, wenn ferner f_x durch keinen Werth von x auf die Form $\frac{1}{0}$ gebracht werden kann und wenn k positiv ist.

Viertes Beispiel. Wird (in C. 1. des §. 33.) $\frac{f_x}{x}$ statt F_x gesetzt, so ist die Bedingung 2.) daselbst wiederum nur dann erfüllt, wenn man noch $f_{x+y \cdot i} = \frac{1}{\infty}$ voraussetzt für $y = \infty$. Wird nun wiederum f_x durch keinen Werth von x auf die Form $\frac{1}{0}$ gebracht, so hat man dasmal aus $\frac{1}{F_x} = 0$ bloß $x = 0$, also $b = 0$. Der Ausdruck rechts in C. 1. hat also dasmal wiederum nur ein einziges Glied, von welchem (wegen $b = 0$) noch überdies nur die Hälfte genommen werden darf. Man erhält daher rechts bloß

$$\pi \cdot i \cdot dx \cdot \frac{f_{x+dx}}{x+dx} \quad \text{für} \quad x = 0,$$

d. h. $\pi \cdot i \cdot f_0$; so daß man hat

$$\text{IV.} \quad \int_0^\infty (f_x - f_{-x}) \cdot \frac{1}{x} \cdot dx = \pi \cdot i \cdot f_0,$$

wenn nur $f_{x+y \cdot i} = \frac{1}{\infty}$ wird für $y = \infty$, und wenn f_x für keinen Werth von x auf die Form $\frac{1}{0}$ gebracht werden kann.

Anmerkg. Die Gleichung I. stimmt mit der II. des §. 7. überein. — Die Gleichungen II.—IV. enthalten viele bekannte bestimmte Integrale als besondere Fälle in sich. Setzt man z. B. $e^{ax \cdot i}$ statt f_x, so wird $f_{x+y \cdot i} = e^{-ay} \cdot (\mathit{Cos}\, ax + i \cdot \mathit{Sin}\, ax)$ offenbar unendlich-klein für $y = \infty$, sobald a positiv ge-

dacht wird. Es sind daher alle Bedingungen erfüllt, welchen die Funktion f_x in II.–IV. zu genügen hat. Diese Gleichungen geben daher sogleich

1) $$\int_0^\infty Cos\,ax \cdot \frac{1}{k^2+x^2} \cdot dx = \frac{\pi}{2k} \cdot e^{-ak}$$

2) $$\int_0^\infty Sin\,ax \cdot \frac{x}{k^2+x^2} \cdot dx = \frac{\pi}{2} \cdot e^{-ak}$$

3) $$\int_0^\infty \frac{Sin\,ax}{x} \cdot dx = \tfrac{1}{2}\pi,$$

wenn nur in allen drei Gleichungen a und k beliebig positiv vorausgesetzt werden *).

Setzt man noch $(-xi)^{a-1} \cdot e^{bxi}$ statt f_x (d. h. also in C. 1. des §. 33. $\frac{1}{x^2+k^2}(-xi)^{a-1} \cdot e^{bxi}$ statt F_x), so wird

$$f_{x+y\cdot i} = (y-x\cdot i)^{a-1} \cdot e^{-by} \cdot (Cos\,bx + i \cdot Sin\,bx),$$

also für $y = \infty$ nur dann unendlich-klein, wenn b positiv vorausgesetzt wird. Damit aber f_x durch keinen Werth von x auf die Form $\frac{1}{0}$ gebracht werde, muß man $a \overline{\overline{>}} 1$ voraussetzen. Die Gleichung II. giebt nun sogleich

94) $$\int_0^\infty x^{a-1} \cdot Sin(\tfrac{1}{2}a\pi - bx) \cdot \frac{1}{x^2+k^2} \cdot dx = \frac{\pi}{2} \cdot k^{a-2} \cdot e^{-bk},$$

wo b und k beliebig positiv, und $a \overline{\overline{>}} 1$ gedacht worden sind.

Diese Gleichung gilt aber auch noch, wenn $a < 1$ ist, wenn nur positiv. Es giebt zwar die Gleichung C. 1. des §. 33.

---

*) Die beiden erstern dieser Resultate sind zuerst von Laplace gegeben worden; das dritte hat Euler zuerst gefunden. Sie sind von uns hier §. 23. NN. 68. 69. und §. 18. N. 51.) früher auf anderen Wegen bereits hingestellt worden.

**) Da diese Gleichung 4. für $b = 0$ auf das schon bekannte (im ersten Beispiele gefundene) Integral zurückkommt, so gilt diese Gleichung 4.) auch noch für $b = 0$. — Eben so gilt die Gleichung 2.) auch noch für $k = 0$, weil sie dann in die N. 3. übergeht.

jetzt noch zur Rechten ein Glied mehr, nämlich das für $x = 0$, zur Hälfte genommen. Solches wird aber

$$= \pi \cdot i \cdot dx \cdot \frac{f_{x+dx}}{(x+dx)^2+k^2} \quad \text{für} \quad x = 0, \quad \text{also} \quad = \pi \cdot i \cdot \frac{dx \cdot f_{dx}}{k^2},$$

d. h. $-\frac{(-i \cdot dx)^a \cdot e^{bxi} \cdot \pi}{k^2}$, d. h. unendlich-klein oder Null, so lange a noch positiv ist.

Soll endlich das Integral links in allen Fällen convergent seyn, so wird man auch noch $a < 2$ voraussetzen müssen. Im entgegengesetzten Falle stellt das Integral zur Linken nur den Hauptwerth des Cauchy vor, dessen praktischer Nutzen zur Zeit noch nicht abzusehen ist.

§. 35.

Man kann aber das Resultat C. 1. des §. 33. auch noch in eine andere Form gießen, welche abermals eine größere Anzahl bestimmter Integrale in sich faßt.

I. Setzt man nämlich in dem Integral C. 1. zur Linken, $\frac{1}{1+x^2} \cdot f_{\left(\frac{1+x \cdot i}{1-x \cdot i}\right)}$ statt F_x und dann $x = Tg\,\frac{1}{2}y$, so geht solches Integral in $\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{+\pi} f_{e^{y \cdot i}} \cdot dy$ d. h. in $\frac{1}{2}\int_0^{\pi} (f_{e^{y \cdot i}} + f_{e^{-y \cdot i}}) \cdot dy$ *), oder (wenn man $y = 2z$ setzt) in $\int_0^{\frac{1}{2}\pi} (f_{e^{2z \cdot i}} + f_{e^{-2z \cdot i}}) \cdot dz$ über, während die Bedingung des §. 33., daß $(x+y \cdot i) \cdot F_{x+y \cdot i}$ unendlich-klein werden müsse (für

---

*) Es ist

$$\int_{-\pi}^{\pi} \varphi_y \cdot dy = \int_{-\pi}^{0} \varphi_y \cdot dy + \int_0^{\pi} \varphi_y \cdot dy;$$

setzt man aber in dem ersteren Integral zur Linken $-v$ statt y, so geht solches in $\int_0^{\pi} \varphi_{-y} \cdot dy$ über. — Also ist allemal

$$\int_{-\pi}^{\pi} \varphi_y \cdot dy = \int_0^{\pi} (\varphi_y + \varphi_{-y}) \cdot dy.$$

$y = \infty$ und alle reellen Werthe von x), übergeht in die Bedingung, daß $(z+1) \cdot f_z = 0$ werde für $z = -1$.

Auf der rechten Seite von (C. 1.) bekommt man dagegen $2\pi \cdot i \times \Sigma$, wo Σ die Summe der Koeffizienten von ε^{-1} vorstellt, in den verschiedenen Entwickelungen der Ausdrücke, in welche F_x d. h. $\frac{1}{1+x^2} \cdot f_{\frac{1+x \cdot i}{1-x \cdot i}}$ übergeht, wenn man $a+b \cdot i+\varepsilon$ statt x setzt, statt $a+b \cdot i$ aber nach und nach alle die Werthe von x, welche $\frac{1}{F_x}$ d. h. $\frac{x^2+1}{f_{\left(\frac{1+x \cdot i}{1-x \cdot i}\right)}} = 0$ machen, und in denen b entweder Null oder positiv ist; während, so oft $b = 0$ ist, von dem entsprechenden Gliede nur die Hälfte genommen werden darf. In diesem letzteren Falle darf aber in dem dann reellen Faktor $(x-a)^\mu$ im Nenner von F_x, d. h. in $f_{\frac{1+x.i}{1-x \cdot i}}$, der Exponent μ, nur $\overline{\overline{<}} 1$ seyn.

II. Nun läßt sich aber beweisen, daß jeder solche Koeffizient von ε^{-1} in der gedachten Entwickelung von F_x (für $x = a+b \cdot i+\varepsilon$) nach steigenden Potenzen von ε, zu gleicher Zeit der Koeffizient von ε^{-1} in der analogen Entwickelung von $F_{(\psi_z)} \cdot \partial \psi_z$ für $z = p+q \cdot i+\varepsilon$ ist, wenn $x = \psi_z$ gesetzt worden und wenn $p+q \cdot i$ jeden aus dieser Gleichung zu jedem Werth von x gehörigen Werth von z vorstellt, so lange $\partial \psi_z$ für $z = p+q \cdot i$ nur einen einzigen Werth hat. — Und weil $x = a+b \cdot i$ der Gleichung $\frac{1}{F_x} = 0$ genügt, so muß $z = p+q \cdot i$ der Gleichung $\frac{1}{F_{(\psi_z)}} = 0$ genügen, d. h. aus dieser letztern Gleichung gefunden werden.

Nimmt man daher hier x oder ψ_z so, daß $\frac{1+i \cdot x}{1-i \cdot x} = z$ wird, d. h. nimmt man $\psi_z = i \cdot \frac{1-z}{1+z}$, so wird

$\partial\psi_z = -\frac{2i}{1+z^2}$, so wie

$$F_{(\psi_z)} = \frac{1}{1+(\psi_z)^2} \cdot f_{\left(\frac{1+i\cdot\psi_z}{1-i\cdot\psi_z}\right)} = \tfrac{1}{4}(1+z^2)\cdot\frac{f_z}{z},$$

während $1+x^2 = \frac{4z}{1+z^2}$ wird. Man erhält also dann zur rechten Seite von (C. 1.) den Ausdruck $2\pi i \times \Sigma$, wo Σ die Summe der Koeffizienten von ε^{-1} vorstellt in den verschiedenen Entwickelungen der Ausdrücke, in welche

$F_{(\psi_z)} \cdot \partial\psi_z$ d. h. $-\frac{1}{2}i\cdot\frac{f_z}{z}$ übergeht, wenn man

$z = p+q\cdot i+\varepsilon$ setzt, statt $p+q\cdot i$ aber alle Werthe von z substituirt, welche aus der Gleichung $\frac{1}{F_{(\psi_z)}} = 0$, d. h. aus der Gleichung $\frac{z}{(1+z)^2\cdot f_z} = 0$ d. h. aus $\frac{z}{f_z} = 0$ hervorgehen, und deren zugehörigen Werthe $a+b\cdot i$ von ψ_z so sind, daß $b = 0$ oder **positiv** wird. Weil jedoch die Gleichung $x = \psi_z$ zu der Gleichung

$$a+b\cdot i = i\cdot\frac{1-p-q\cdot i}{1+p+q\cdot i} = \frac{4q}{(1+p)^2+q^2} + \frac{1-p^2-q^2}{(1+p)^2+q^2}\cdot i$$

führt, so ist erstlich b nur dann 0 oder positiv, wenn $p^2+q^2 \overline{\overline{<}} 1$ ist, also wenn der **Modul** (S. VIII. Th. Einleitg. §§. 2.—4.) von $p+q\cdot i$, $\overline{\overline{<}} 1$ ist, während p und q beliebig positiv oder negativ seyn können, so daß der **Bogen** von $p+q\cdot i$ zwischen $-\pi$ und $+\pi$ liegen oder eine dieser Grenzen selbst seyn kann. So oft aber der Modul von $p+q\cdot i$, $= 1$ ist, darf von dem entsprechenden Gliede der Summe Σ nur die Hälfte genommen werden, weil dieser Werth des Moduls dem Werthe $b = 0$ entspricht. In diesem letztern Falle muß zugleich der zugehörige Faktor $z-p-q\cdot i$ im Nenner von $\frac{1}{z}\cdot f_z$ nur in der Form $(z-p-q\cdot i)^\mu$ erscheinen, während $\mu \overline{\overline{<}} 1$ ist.

IV. Faßt man dieses alles zusammen, so findet sich also:

(C. 2.)... $\frac{1}{2}\cdot\int_{-\pi}^{\pi} f_{e^{y\cdot i}}\cdot dy$ oder $\frac{1}{2}\int_0^{\pi}(f_{e^{yi}}+f_{e^{-yi}})\cdot dy$ oder

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi}(f_{e^{2z\cdot i}}+f_{e^{-2z\cdot i}})\cdot dz = \pi\cdot\Sigma\left[dz\cdot\left(\frac{f_z}{z}\right)_{z+dz}\right],$$

wenn man in der Summe Σ zur Rechten, statt z nach und nach alle Werthe $p+q\cdot i$ setzt, welche der Gleichung $\frac{z}{f_z}=0$ genügen und noch der Bedingung, daß ihr (stets positiver) Modul $\overline{\overline{<}}1$ ist, — wenn, im Falle dieser Modul $=1$ ist, von dem entsprechenden Gliede der Summe Σ nur die Hälfte genommen wird, — wenn ferner für jeden dieser Werthe $p+q\cdot i$ von z, der zugehörige Faktor $z-p-q\cdot i$ im Nenner von $\frac{1}{z}\cdot f_z$ nur einmal vorkommt; — und wenn endlich, so oft derselbe Faktor in demselben Nenner zwei oder mehreremale erscheinen sollte, in C. 2. zur Rechten unter $dz\cdot\left(\frac{f_z}{z}\right)_{z+dz}$ der Koeffizient von ε^{-1} verstanden wird in der nach steigenden Potenzen von ε fortlaufenden Entwickelung von $\left(\frac{f_z}{z}\right)_{p+q\cdot i+\varepsilon}$, während jedoch in diesem letzteren Fall der Modul $+\sqrt{p^2+q^2}$ von $p+q\cdot i$, nicht $=1$ seyn darf, so daß, wenn in diesem letzteren Falle $p^2+q^2=1$ seyn sollte, die Anwendung der Formel C. 2. trügerisch seyn könnte. — Es muß ferner jedesmal f_z so vorausgesetzt werden, daß $(z+1)\cdot f_z=0$ wird für $z=-1$.

Wir wollen jetzt einige besondere Fälle betrachten.

§. 36.

Setzen wir in den nun folgenden vier Beispielen voraus, daß f_z eindeutig ist und überdieß für keinen (reellen oder imaginären) Werth von z, die Form $\frac{1}{0}$ annimmt, so hat, wenn man erstlich in C. 2. f_{s+z} statt f_z substituirt, die Summe

Σ nur ein einziges Glied, nämlich das für $z=0$, und dieses wird $= dz \cdot \frac{f_{s+z+dz}}{z+dz}$ für $z=0$, d. h. $= f_s$; also erhält man (aus C. 2.)

1) $\int_{-\pi}^{\pi} f_{s+e^{y \cdot i}} \cdot dy = \int_0^{\pi} (f_{s+e^{y \cdot i}} + f_{s+e^{-y \cdot i}}) \cdot dy = 2\pi \cdot f_s,$

und (für $s=0$)

2) $\int_{-\pi}^{\pi} f_{e^{y \cdot i}} \cdot dy = \int_0^{\pi} (f_{e^{y \cdot i}} + f_{e^{-y \cdot i}}) \cdot dy = 2\pi \cdot f_0,$

wenn nur die gemachten Bedingungen erfüllt sind. — Dieselben Resultate sind bereits in der Anmerkung zum 10ten Beispiel des §. 18. NN. III. u. IV. gefunden; dort etwas vollständiger.

Als zweites Beispiel nehme man (in C. 2.) $\frac{f_z}{1-sz}$ statt f_z, indem man für diese neue Funktion f_z dieselben Bedingungen stellt, wie kurz vorher. Die Gleichung $\frac{z}{f_z}=0$ des §. 35. geht dadurch über in

$$\frac{z(1-sz)}{f_z}=0$$

und giebt $z=0$, auch $z=\frac{1}{s}$. — Das zu $z=0$ gehörige Glied der Summe Σ ist nun $= \frac{dz}{z+dz} \cdot \frac{f_{z+dz}}{1-s(z+dz)}$ für $z=0$, d. h. $= f_0$. — Was das zu $z=\frac{1}{s}$ gehörige Glied von Σ betrifft, während s eben so gut reell als imaginär ist, so muß man unterscheiden, ob der Modul r von s*), $\overset{<}{\underset{>}{=}} 1$ ist, weil dann der Modul $r' \left(=\frac{1}{r}\right)$ von $\frac{1}{s}$, umgekehrt $\overset{>}{\underset{<}{=}} 1$ ist, so daß im erstern

*) Unter dem Modul r von s versteht man den positiven Werth der Quadratwurzel $\sqrt{\alpha^2+\beta^2}$, wenn $s=\alpha+\beta \cdot i$ ist.

Fall gar kein weiteres Glied von Σ vorhanden ist, im anderen Falle von dem zu $r' = 1$ gehörigen Gliede von Σ, nur die Hälfte genommen werden darf, während nur im dritten Falle (wo $r' < 1$) das volle Glied der Summe Σ genommen werden muß.

So oft also der Modul von $s, < 1$ ist, so oft ist der Modul von $\frac{1}{s}, > 1$, und die Summe Σ (in C. 2. zur Rechten) hat daher jetzt kein weiteres Glied. Ist aber der Modul von $s, \geqq 1$, so ist der von $\frac{1}{s}, \leqq 1$ und die Summe Σ (in C. 2.) hat daher jetzt noch ein zweites Glied und dieses ist

$$= \frac{dz}{z+dz} \cdot \frac{f_{z+dz}}{1-s(z+dz)} \quad \text{für} \quad z = \frac{1}{s},$$

d. h. $= -f_{\frac{1}{s}}$, wovon jedoch nur die Hälfte genommen werden darf, so oft der Modul von $s, = 1$ seyn sollte. Man findet daher (aus C. 2.) jetzt sogleich:

$$3) \int_{-\pi}^{\pi} \frac{f_{e^{y\cdot i}}}{1-s\cdot e^{y\cdot i}} \cdot dy = \begin{Bmatrix} 2\pi\cdot f_0 \\ 2\pi\cdot\left(f_0 - \frac{1}{2} f_{\frac{1}{s}}\right) \\ 2\pi\cdot\left(f_0 - f_{\frac{1}{s}}\right) \end{Bmatrix} \begin{matrix} \text{je nachdem} \\ \text{der Modul} \\ \text{von } s \end{matrix} \begin{Bmatrix} < \\ = \\ > \end{Bmatrix} \text{ ist},$$

wenn nur die Funktion f_z den, Eingangs des Paragraphen gemachten Bedingungen genügt. — Für den Fall, wo der Modul von $s, = 1$ ist, ist jedoch das Integral ein unterbrochenes wenn wir den Begriff des Cauchy ausschließen; das mittlere Resultat gilt also nur, wenn links unter dem Integralzeichen der Hauptwerth des Cauchy verstanden wird.

Wird als drittes Beispiel (in C. 2.) $\frac{f_z}{1-s\cdot z^{-1}}$ d. h. $\frac{z\cdot f_z}{z-s}$ statt f_z gesetzt, so geht die Gleichung $\frac{z}{f_z} = 0$ des §. 35. jetzt über in

$$\frac{z-s}{f_z} = 0$$

und giebt bloß $z = s$. Ist nun der Modul von s, >1, so hat die Summe Σ (zur Rechten in C. 2.) gar kein Glied; ist aber der Modul von s, $\overline{\overline{<}}1$, so hat dieselbe Summe Σ ein einziges Glied und dieses ist

$$= \frac{dz}{z+dz-s} \cdot f_{z+dz} \quad \text{für} \quad z = s, \quad \text{d. h.} \quad = f_s,$$

wovon jedoch nur die Hälfte genommen werden darf, so oft der Modul von s, $= 1$ ist.

Man findet daher nun (aus C. 2.)

$$4) \quad \int_{-\pi}^{\pi} \frac{f_{e^{y \cdot i}}}{1-s \cdot e^{-y \cdot i}} \cdot dy = \left\{ \begin{array}{c} 2\pi \cdot f_s \\ \pi \cdot f_s \\ 0 \end{array} \right\} \begin{array}{c} \text{je nachdem} \\ \text{der Modul} \\ \text{von } s \end{array} \left\{ \begin{array}{c} < \\ = \\ > \end{array} \right\} 1 \text{ ist,}$$

wenn nur die Funktion f_z den, Eingangs des Paragraphen gemachten Bedingungen genügt. Das mittlere Resultat gilt nur im Sinne des Hauptwerthes des Cauchy.

Dabei übersehe man nicht, daß man in den Gleichungen 3.) und 4.) statt des Integrals zur Linken auch bezüglich diese anderen Integrale

$$\int_0^{\pi} \left(\frac{f_{e^{y \cdot i}}}{1-s \cdot e^{y \cdot i}} + \frac{f_{e^{-y \cdot i}}}{1-s \cdot e^{-y \cdot i}} \right) \cdot dy$$

und

$$\int_0^{\pi} \left(\frac{f_{e^{y \cdot i}}}{1-s \cdot e^{-y \cdot i}} + \frac{f_{e^{-y \cdot i}}}{1-s \cdot e^{y \cdot i}} \right) \cdot dy$$

setzen kann.

Wird noch als viertes Beispiel (in C. 2.) $\frac{f_{s+z}}{z^n}$ statt f_z gesetzt, so geht die Gleichung $\frac{z}{f_z} = 0$ des §. 35. jetzt in $\frac{z^{n+1}}{f_{s+z}} = 0$ über und giebt für z einen einzigen Werth, nämlich $z = 0$. — Die Summe Σ (zur Rechten in C. 2.) hat daher dasmal nur ein einziges Glied. Weil aber der zu $z = 0$

gehörige Faktor $z-0$ oder z im Nenner von $\frac{f_z}{z}$ des §. 35., also jetzt im Nenner von $\frac{f_{s+z}}{z^{n+1}}$ mehr als einmal, nämlich $n+1$ mal vorkommt, so muß man dasmal rechts in dem Gliede Σ statt $dz\cdot\left(\frac{f_z}{z}\right)_{z+dz}$ des §. 35., also hier statt $dz\cdot\left(\frac{f_{s+z}}{z^{n+1}}\right)_{z+dz}$ setzen den Koeffizienten von ε^{-1} in der Entwickelung von $\frac{f_{s+\varepsilon}}{\varepsilon^{n+1}}$ nach steigenden Potenzen von ε; d. h. $\frac{1}{n!}\cdot\partial^n f_s$. — Man erhält also jetzt (aus C. 2.)

$$5)\quad \int_{-\pi}^{\pi} e^{-ny\cdot i}\cdot f_{s+e^{y\cdot i}}\cdot dy \text{ d. h. } \int_0^{\pi}\left(e^{-ny\cdot i}\cdot f_{s+e^{y\cdot i}}+e^{ny\cdot i}\cdot f_{s+e^{-y\cdot i}}\right)\cdot dy = \frac{2\pi}{n!}\cdot\partial^n f_s,$$

wenn nur f_z den, Eingangs des Paragraphen gemachten Bedingungen entspricht.

Auch dieses Resultat ist mit unbedeutender Modifikation bereits zu Ende des §. 18. gefunden.

§. 37.

Addirt und subtrahirt man die Gleichungen 3.) und 4.) zu und von einander, nachdem man vorher links die zwischen 0 und π genommenen Integrale gesetzt hat, und wendet man zuletzt noch die 2.) an, so erhält man, je nachdem der Modul von s, $\lesseqgtr 1$ ist:

$$6)\int_0^{\pi}\left(f_{e^{y\cdot i}}+f_{e^{-yi}}\right)\cdot\frac{1}{1-2s\cdot Cos\, y+s^2}\cdot dy\,^{*)}=\begin{cases}2\pi\cdot\frac{f_s}{1-s^2}\\ \frac{\pi}{1-s^2}\cdot\left(f_s-f_{\frac{1}{s}}\right)\\ 2\pi\cdot\frac{f_{\frac{1}{s}}}{s^2-1}\end{cases}$$

*) Dieses Resultat erhält man, wenn die Gleichungen 3.) und 4.) zusammen addirt werden, von der Summe aber die 2.) subtrahirt wird.

7) $$\int_0^\pi (f_{e^{y \cdot i}} + f_{e^{-y \cdot i}}) \cdot \frac{Cos\, y}{1-2s \cdot Cos\, y + s^2} \cdot dy \text{ *)}$$

$$= \begin{cases} \frac{\pi}{s} \cdot \left(\frac{1+s^2}{1-s^2} \cdot f_s - f_0 \right) \\ \frac{\pi}{2s} \cdot \frac{1+s^2}{1-s^2} \left(f_s - f_{\frac{1}{s}} \right) - \frac{\pi}{s} \cdot f_0 \\ \frac{\pi}{s} \cdot \left(\frac{s^2+1}{s^2-1} \cdot f_{\frac{1}{s}} - f_0 \right) \end{cases}$$

8) $$\int_0^\pi \frac{f_{e^{y \cdot i}} - f_{e^{-yi}}}{2i} \cdot \frac{Sin\, y}{1-2s \cdot Cos\, y + s^2} \cdot dy \text{ **)}$$

$$= \begin{cases} \frac{\pi}{2s} \cdot (f_s - f_0) \\ \frac{\pi}{4s} \cdot \left(f_s + f_{\frac{1}{s}} - 2f_0 \right) \\ \frac{\pi}{2s} \cdot \left(f_{\frac{1}{s}} - f_0 \right), \end{cases}$$

je nachdem der Modul von s, $\begin{matrix} < \\ = \\ > \end{matrix} 1$ ist.

Für $s = 1$ (in welchem Falle auch der Modul von $s (= 1 + 0 \cdot i)$ der Einheit gleich ist) wird jedoch das Integral zur Linken in 6.)—8.) in der Regel ein unterbrochenes seyn, und in diesem Falle drückt also der (mittlere) Werth zur Rechten nichts als den Hauptwerth des Cauchy aus, dessen praktischer Nutzen sich erst noch entwickeln muß ***).

Man darf aber diese Formeln NN. 6.—8. nur dann anwenden (nach §. 36.), wenn

---

*) Diese Gleichung erhält man, indem die halbe Summe der Gleichungen 3.) und 4.) von der Gleichung 6.) subtrahirt und dies noch durch s dividirt wird.

**) Diese Gleichung wird erhalten durch einfache Subtraktion der Gleichung 3.) von der Gleichung 4.), indem man noch durch $4s$ dividirt.

***) Das erste und dritte Resultat in den Nummern 6.—8. gehen in einander über, so oft man (links und rechts) $\frac{1}{s}$ statt s schreibt, während das mittlere Resultat durch dasselbe Verfahren sich selbst reproducirt.

A.) f_z für keinen Werth von z die Form $\frac{1}{0}$ annimmt, und

B.) f_z auch nur eindeutig ist.

Wird übrigens noch in den Gleichungen 7.) und 8.) $s = 0$ gesetzt und rechts der $\frac{0}{0}$ Werth auf die gewöhnliche Weise bestimmt, so hat man ferner:

$$\left.\begin{array}{ll} 9) & \int_0^\pi Cos\, y \cdot (f_{e^{y \cdot i}} + f_{e^{-y \cdot i}}) \cdot dy = \pi \cdot \partial f_s \\ 10) & \int_0^\pi Sin\, y \cdot (f_{e^{y \cdot i}} - f_{e^{-y \cdot i}}) \cdot dy = \pi \cdot i \cdot \partial f_s \end{array}\right\} \text{für } s = 0,$$

wenn nur die Funktion f_z den Bedingungen A.) und B.) genügt*). — Dabei kann man natürlich ∂f_z für $z = 0$, statt ∂f_s für $s = 0$ schreiben.

Die meisten dieser Gleichungen lassen sich auch aus dem Parseval'schen Lehrsatze (VIII. Th. §. 21.) ableiten. Mehrere dieser Resultate sind vor Cauchy auch von G. Libri (im XXVIII. Bd. der Mém. de l'Acad. de Turin) und von Poisson (im Cah. XIX. des Journal de l'École polytech.) aufgestellt worden.

---

*) Es kann die Frage entstehen, ob die Gleichungen NN. 7. und 8. auch noch für $s = 0$ gelten; und deshalb ist es nicht überflüssig, sich von der Richtigkeit der Gleichungen 9.) und 10.) auch noch direkt zu überzeugen.

Setzt man aber in der Gleichung §. 36. N. 2. $z \cdot f_z$ statt f_z, so erhält man

$$\int_0^\pi (e^{y \cdot i} \cdot f_{e^{y \cdot i}} + e^{-y \cdot i} \cdot f_{e^{-y \cdot i}}) \cdot dy = 0.$$

Die Formel §. 36. N. 5. giebt (für $n = 1$ und $s = 0$)

$$\int_0^\pi (e^{-y \cdot i} \cdot f_{e^{y \cdot i}} + e^{y \cdot i} \cdot f_{e^{-y \cdot i}}) \cdot dy = 2\pi \cdot f_s \quad \text{für } s = 0.$$

Addirt und subtrahirt man aber diese letztern beiden Gleichungen zu und von einander, so ergeben sich die vorliegenden Gleichungen 9. und 10. abermals.

Anmerkg. Man kann natürlich die Resultate des §. 37. auch direkt aus der Formel C. 2. des §. 35. ableiten, wenn man daselbst F_z zweckgemäß nimmt, nämlich

$$=\frac{f_z}{\left(1-sz\right)\left(1-\frac{s}{z}\right)},\quad \text{oder}\quad =\frac{\left(z\pm\frac{1}{z}\right)\cdot f_z}{\left(1-sz\right)\left(1-\frac{s}{z}\right)},$$

$$\text{oder}\quad =\frac{\left(z\pm\frac{1}{z}\right)\cdot f_z}{2\pm\left(z-\frac{1}{z}\right)}.$$

Setzt man namentlich noch ebendaselbst $\left(z+\frac{1}{z}\right)\cdot f_z$ oder $\left(z-\frac{1}{z}\right)\cdot f_z$ statt F_z, indem man noch $f_0=0$ voraussetzt, und denkt man daran, daß der Werth von $\frac{1}{z}\cdot f_z$ für $z=0$ der Ableitung ∂f_z gleich ist für $z=0$ genommen, so ergeben sich nochmals die Nummern 9.) und 10.).

§. 38.

Wir wollen nun dem Anfänger in einer Reihe von Beispielen noch zeigen, wie man von diesen allgemeinen Formeln auf methodischem Wege Anwendungen machen kann.

Erstes Beispiel. Es sey zunächst $\int_0^{\frac{1}{2}\pi}(Cos\,z)^a\cdot Cos\,az\cdot dz$ auszuwerthen.

Um von der Formel C. 2. Gebrauch machen zu können, muß man vor allen Dingen die zu integrirende Funktion $(Cos\,z)^a\cdot Cos\,az$ auf die Form $f_{e^{y\cdot i}}$, oder auf die Form $f_{e^{y\cdot i}}+f_{e^{-y\cdot i}}$, oder auf die Form $f_{e^{2z\cdot i}}+f_{e^{-2z\cdot i}}$ bringen. — Setzt man aber statt $Cos\,z$, $Cos\,az$ die Exponential-Ausdrücke, so verwandelt sich die hier zu integrirende Funktion (nach Weglassung aller constanten Faktoren)

in $(e^{z \cdot i} + e^{-z \cdot i})^a \cdot (e^{az \cdot i} + e^{-az \cdot i})$

d. h. in $(e^{2z \cdot i} + 1)^a \cdot (1 + e^{-2az\,i})$

d. h. in $(e^{2z \cdot i} + 1)^a + (e^{-2z \cdot i} + 1)^a$.

Dies veranlaßt uns nun, in die Formel C. 2. statt f_z zu setzen $(z+1)^a$.

Ist nun a positiv und $f_z = (z+1)^a$, so giebt es nur einen Werth von z, welcher $\frac{f_z}{z}$, d. h. $\frac{(z+1)^a}{z}$ auf die Form $\frac{1}{0}$ bringt, nämlich $z = 0$; und das zugehörige Glied der Summe Σ zur Rechten in C. 2. ist daher

$$= dz \cdot \frac{(z+dz+1)^a}{z+dz} \quad \text{für } z = 0, \text{ d. h. } = 1,$$

und weil dann auch

$$f_{e^{2z \cdot i}} + f_{e^{-2z \cdot i}} = (e^{2z \cdot i} + 1)^a + (e^{-2z \cdot i} + 1)^a$$
$$= (2\, Cos\, z)^a \cdot 2\, Cos\, az = 2^{a+1} \cdot (Cos\, z)^a \cdot Cos\, az$$

wird, so giebt die C. 2. jetzt sogleich:

$$95) \quad \int_0^{\frac{1}{2}\pi} (Cos\, z)^a \cdot Cos\, az \cdot dz = \frac{\pi}{2^{a+1}},$$

wenn von allen vorkommenden a^{ten} Potenzen stets die einfachsten Werthe derselben (VIII. Th. Einleitg. §. 6.) genommen werden, und so auch der Bedingung, daß f_z eindeutig, genügt ist.

Diese vorliegende Gleichung giebt übrigens noch, sobald $z = \frac{1}{2}\pi - x$ gesetzt wird,

$$96) \quad \int_0^{\frac{1}{2}\pi} (Sin\, z)^a \cdot Cos\, a(\tfrac{1}{2}\pi - z) \cdot dz = \frac{\pi}{2^{a+1}},$$

wenn nur (in 95. und 96.) a positiv ist.

Das Resultat 95.) stimmt aber genau überein mit den Resultaten §. 13. XIII. und XIV., sobald man hier $a = 2n$ oder $a = 2n+1$, dort aber $m = 2n$ oder $m = 2n+1$ setzt und den $\frac{0}{0}$ Werth, der sich in XIII. für $m = 2n$ und in

XIV. für $m = 2n+1$ ergiebt, auf die geeignete Weise bestimmt.

Zweites Beispiel. Es sey $\int_0^{\frac{1}{4}\pi}(Tg\,z)^a \cdot dz$ auszuwerthen, unter der Voraussetzung, daß a positiv ist.

Da $Tg\,z = \frac{Sin\,z}{Cos\,z} = \frac{1}{i} \cdot \frac{e^{z \cdot i} - e^{-z \cdot i}}{e^{z \cdot i} + e^{-z \cdot i}}$ und der letztere Faktor wiederum

$$= \frac{e^{2z \cdot i} - 1}{e^{2z \cdot i} + 1} = \frac{1 - e^{-2z \cdot i}}{1 + e^{-2z \cdot i}},$$

ist, so wird man veranlaßt in der Formel C. 2. entweder

$$f_z = \left(\frac{z-1}{z+1}\right)^a \quad \text{oder} \quad f_z = \left(\frac{1-z}{1+z}\right)^a$$

zu setzen. Wir wählen das letztere. Damit aber die Bedingung, daß für $z = -1$, $(1+z) \cdot f_z = 0$ werde, erfüllt ist, muß a, wenn positiv, kleiner als 1 gedacht werden. Dabei muß man sich unter den a^{ten} Potenzen stets ihre einfachsten Werthe denken (VIII. Th. Einleitg. §. 6.), so daß f_z, wie die Voraussetzung es verlangt, eindeutig ist.

Es ist dann

$$f_{e^{2z \cdot i}} + f_{e^{-2z \cdot i}} = (-i)^a \cdot (Tg\,z)^a + (+i)^a \cdot (Tg\,z)^a,$$

oder, weil $(-i)^a + (+i)^a = 2 \cdot Cos\,\frac{1}{2}a\pi$ ist,

$$f_{e^{2z \cdot i}} + f_{e^{-2z \cdot i}} = 2\,Cos\,\tfrac{1}{2}a\pi \cdot (Tg\,z)^a.$$

Ist nun a positiv und < 1, so kann man die Formel C. 2. anwenden und es genügen der Gleichung $\frac{z}{f_z} = 0$ des §. 35., d. h. der Gleichung

$$\frac{z(1+z)^a}{(1-z)^a} = 0, \quad \text{sowohl} \quad z = 0, \quad \text{als auch} \quad z = -1.$$

Die Summe Σ der Formel C. 2. zur Rechten, hat daher zwei Glieder, welche aus

$$\frac{dz}{z+dz}\cdot\frac{(1-z+dz)^a}{(1+z+dz)^a} \quad \text{für} \quad z=0 \quad \text{und für} \quad z=-1$$

hervorgehen und welche daher (für $z=0$) 1 und (für $z=-1$) 0 sind, weil $a<1$ ist. Von diesem letzteren Gliede darf aber nur die Hälfte genommen werden, weil der Modul von $z=-1$, gerade $+1$ ist. — Man erhält daher (aus C. 2.)

$$97) \quad \int_0^{\frac{1}{2}\pi}(Tgz)^a\cdot dz = \frac{\pi}{2\,Cos\,\frac{1}{2}a\pi},$$

wenn nur a positiv und <1 ist*).

Drittes Beispiel. Es seyen auszuwerthen die Integrale

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} L\,Cos\,z\cdot dz \quad \text{und} \quad \int_0^{\frac{1}{2}\pi} L\,Sin\,z\cdot dz.$$

So wie man hier statt $Cos\,z$ oder $Sin\,z$ ihre Exponential-Ausdrücke setzt, so ziehen sich die zu integrirenden Funktionen auf

$$log(e^{z\cdot i}+e^{-z\cdot i}) \quad \text{und} \quad log(e^{z\cdot i}-e^{-z\cdot i})$$

d. h. auf

$$log(e^{2z\cdot i}\pm 1)-log(e^{z\cdot i}) \quad \text{d. h. auf} \quad log(e^{2z\cdot i}\pm 1)$$

zurück, in so ferne $log(e^{z\cdot i})=z\cdot i$ kein Hinderniß gewährt, während $z\cdot i$ (da z zwischen 0 und $\frac{1}{2}\pi$ liegt) der einfachste Werth des Logarithmen ist (S. VIII. Th. Einleitg. §. 5.).

Man wird danach versuchen in C. 2. des §. 35. $f_z = log(z+1)$ zu nehmen, indem man unter dem Logarithmen den einfachsten Werth $L(z+1)$ desselben sich denkt, damit f_z eindeutig sey**). — Weil aber jetzt die Gleichung $\frac{z}{f_z}=0$

---

*) Diese Formel geht auch unmittelbar aus dem von Euler gefundenen Integral $\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\frac{x^{a-1}}{1+x^2}\cdot dx = \frac{\pi}{2\,Sin\,\frac{1}{2}a\pi}$ (§. 9. N. 18.) hervor, sobald $x = Tg\,z$ gesetzt wird.

**) Der Bedingung des §. 35., daß $(z+1)\cdot f_z = 0$ werde für $z=-1$, ist (nach VIII. Th. Einleitg. §. 16.) genügt.

nur einen einzigen Werth ($z = 0$) von z liefert, so ist (rechts in C. 2.) statt der Summe Σ nur ein einziges Glied zu nehmen, nämlich

$$\frac{dz}{z+dz} \cdot log(z+1+dz) \quad \text{für} \quad z = 0,$$

und dieser ist $= 0$. — Ferner ist

$$f_{e^{2z \cdot i}} + f_{e^{-2z \cdot i}} = log(e^{2z \cdot i}+1) + log(e^{-2z \cdot i}+1)$$
$$= log(2+2\,Cos\,2z) = 2\,L\,2 + L\,Cos\,z;$$

und die Gleichung C. 2. giebt daher sogleich:

4) $$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} L(Cos\,z) \cdot dz = -\tfrac{1}{2}\pi \cdot L\,2.$$

Setzt man aber hier $\frac{1}{2}\pi - z$ statt z, so ergiebt sich sogleich noch:

5) $$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} L(Sin\,z) \cdot dz = -\tfrac{1}{2}\pi \cdot L\,2.$$

Diese Resultate 4.) und 5.) hat übrigens schon Euler gefunden *).

Zieht man beide letzteren Gleichungen von einander ab, so erhält man noch

6) $$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} L(Tg\,z) \cdot dz = 0,$$

was jedoch auch direkt in die Augen fällt, weil $L\,Tg\,z$ von $z = 0$ bis $z = \frac{1}{4}\pi$ negativ, aber genau gleich den Werthen von $L\,Tg\,z$, von $z = \frac{1}{2}\pi$ bis $z = \frac{1}{4}\pi$ ist.

---

*) Der vorausgegangenen Zergliederung zu Folge konnte man es auch versuchen $f_z = log(z-1)$ oder bequemer $= log(1-z)$ zu nehmen. Man hatte dann

$$f_{e^{2z \cdot i}} + f_{e^{-2z \cdot i}} = log(1-e^{2z \cdot i}) + log(1-e^{-2z \cdot i})$$
$$= log(2-2\,Cos\,2z) = 2 \cdot L\,2 + L(Sin\,z);$$

und man erhielt dann die Gleichung 5.) zuerst, aus welcher dann auch sogleich wieder die Gleichung 4.) hervorgeht, sobald man $\frac{1}{2}\pi - z$ statt z setzt.

Viertes Beispiel. Gesetzt aber man wolle das Integral

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{L\,Cos\,z}{z^2+(L\,Cos\,z)^2} \cdot dz$$

auswerthen, so wird man, um diese Differenzial-Funktion auf die Form $f_{e^{2zi}}+f_{e^{-2zi}}$ zu bringen, den Nenner $z^2+(L\,Cos\,z)^2$ in zwei Faktoren $z\cdot i+L\,Cos\,z$ und $-z\cdot i+L\,Cos\,z$, dann den ganzen Bruch in die beiden Theil-Brüche

$$\tfrac{1}{2}\left(\frac{1}{z\cdot i+L\,Cos\,z}+\frac{1}{-z\cdot i+L\,Cos\,z}\right)$$

zerlegen, hierauf statt $Cos\,z$ den Exponential-Ausdruck, so wie $log\,e^{\pm z\cdot i}$ statt $\pm z\cdot i$ schreiben. Dadurch wird man auf

$$\frac{1}{log\,\frac{1+e^{2z\cdot i}}{2}}+\frac{1}{log\,\frac{1+e^{-2z\cdot i}}{2}}$$

geführt, und dies veranlaßt uns, in der Formel C. 2. des §. 35.

$$f_z = \frac{1}{log\,\frac{1+z}{2}}$$

zu nehmen, indem man unter dem Zeichen (log) des Logarithmen, sich durchgehends seinen einfachsten Werth vorstellt, damit f_z eindeutig sey. Der Gleichung $\frac{z}{f_z}=0$ genügt man nun durch $z=0$ und $z=1$; in letzterem Werthe ist der Modul 1 so, daß er mit der Grenze 1 desselben zusammenfällt. Die den Werthen $z=0$ und $z=1$ zugehörigen Glieder der Summe Σ sind nun:

$$=\frac{dz}{z+dz}\cdot\frac{1}{log\,\frac{1+z+dz}{2}} \quad \text{für } z=0 \text{ und für } z=1,$$

d. h. bezüglich

$$-\frac{1}{L2} \quad (\text{für } z=0)$$

und (für $z=1$)

$$\frac{dz}{log(1+\frac{1}{2}dz)}$$ d. h. 2 (weil $log(1+\frac{1}{2}dz)=\frac{1}{2}dz$ ist),

von welchem letzteren Werthe jedoch, da der Modul von $z=1$ mit seiner Grenze 1 zusammenfällt, nur die Hälfte genommen werden darf. — Ferner wird jetzt

$$f_{e^{2z.i}}+f_{e^{-2z.i}}=\frac{1}{log\frac{1+e^{2z.i}}{2}}+\frac{1}{log\frac{1+e^{-2z.i}}{2}}$$

$$=\frac{2\cdot L\,Cos\,z}{z^2+(L\,Cos\,z)^2}$$

und die Gleichung C. 2. giebt daher sogleich

$$98)\quad \int_0^{\frac{1}{2}\pi}\frac{L\,Cos\,z}{z^2+(L\,Cos\,z)^2}\cdot dz=\frac{\pi}{2}\cdot\left(1-\frac{1}{L2}\right).$$

Fünftes Beispiel. Ganz auf dieselbe Weise findet man

$$99)\quad \int_0^{\frac{1}{2}\pi}\frac{z\cdot Tg\,z}{z^2+(L\,Cos\,z)^2}\cdot dz=\frac{\pi}{2\cdot L2},$$

indem man durch ganz analoge Zergliederung, wie im vorhergehenden Beispiele, sich überzeugt, daß man (in C. 2.)

$$f_z=\frac{1-z}{(1+z)\cdot log\frac{1+z}{2}}$$ nehmen und bei $log\frac{1+z}{2}$ seinen einfachsten Werth sich denken müsse. Dasmal giebt aber die Gleichung $\frac{z}{f_z}=0$, drei Werthe für z, nämlich $z=0$ und noch $z=-1$ und $z=1$, während der Modul der beiden letzteren $+1$ ist. Die zu diesen drei Werthen von z zugehörigen Glieder der Summe Σ (zur Rechten in C. 2.) sind

$$\frac{dz}{z+dz}\cdot\frac{1-z-dz}{(1+z+dz)\cdot log\frac{1+z+dz}{2}}$$ für $z=0$ und für $z=\mp1$,

und dieser Ausdruck verschwindet sowohl für $z=-1$ (weil dann im Nenner $log\frac{1}{2}dz=-\infty$ stehen bleibt), als auch für

$z = +1$ (weil dann im Zähler $(dz)^2$ vorkommt, während der Nenner bloß $= dz$ wird). Für $z = 0$ wird derselbe Ausdruck aber $= -\frac{1}{L2}$.

Sechstes Beispiel. Es soll noch $\int_0^{\frac{1}{2}\pi} z \cdot Cotg\, z \cdot dz$ ausgewerthet werden.

Da $Cotg\, z = i \cdot \frac{e^{z \cdot i} + e^{-z \cdot i}}{e^{z \cdot i} - e^{-z \cdot i}}$ ist, so kann man statt $Cotg\, z$ setzen, bald $i \cdot \frac{e^{2z \cdot i} + 1}{e^{2z \cdot i} - 1}$, bald $-i \cdot \frac{e^{-2z \cdot i} + 1}{e^{-2z \cdot i} - 1}$.
Setzte man nun

$$\frac{1}{i} \cdot log\, e^{z \cdot i} \quad \text{oder} \quad \frac{1}{2i} \cdot log\, e^{2z \cdot i} \quad \text{statt} \quad z,$$

so würde man $z \cdot Cotg\, z$ zwar in der Form $f_{e^{2z \cdot i}} - f_{e^{-2z \cdot i}}$, aber nicht in der Form $f_{e^{2z \cdot i}} + f_{e^{-2z \cdot i}}$ ausgedrückt haben. Weil aber

$$e^{2z \cdot i} = \frac{1 + e^{2z \cdot i}}{1 + e^{-2z \cdot i}}$$

ist, so kann man auch $\frac{1}{2i} \cdot log \frac{1 + e^{2z \cdot i}}{1 + e^{-2z \cdot i}}$

d. h. $\frac{1}{2i} \cdot log(1 + e^{2z \cdot i}) - \frac{1}{2i} \cdot log(1 + e^{-2z \cdot i})$ statt z setzen. Geschieht dies nun, und multiplicirt man, um $z \cdot Cotg\, z$ umzuformen, den erstern Theil der vorliegenden Differenz mit der obigen erstern Form von $Cotg\, z$, den andern Theil derselben Differenz aber mit der andern Form von $Cotg\, z$, so hat man $z \cdot Cotg\, z$ in der gewünschten Form hergestellt, und man überzeugt sich nun, daß man in C. 2. des §. 35. nur $f_z = \frac{z+1}{z-1} \cdot log(z+1)$ nehmen darf, um seinen Zweck zu erreichen. Dann hat die Gleichung $\frac{z}{f_z} = 0$ die beiden Werthe

$z=0$ und $z=1$, und die zugehörigen Werthe der Summe Σ sind nun

$$\frac{dz}{z+dz}\cdot\frac{z+dz+1}{z+dz-1}\cdot log(z+dz+1) \text{ für } z=0 \text{ und für } z=1,$$

d. h. bezüglich 0 und $2\cdot L2$, von welchem letzteren Gliede nur die Hälfte genommen werden darf, weil der Modul von $z=1$, selbst $=1$ ist; und so bekommt man:

$$100) \quad \int_0^{\frac{1}{2}\pi} z\cdot Cotg\, z\cdot dz = \frac{\pi}{2}\cdot L2 \text{ *)}.$$

Siebentes Beispiel. Suchen wir noch das Integral

$\int_0^\pi (Cos\, y)^m \cdot dy$ auszuwerthen.

Da $Cos\, y = \frac{1}{2}e^{yi}+\frac{1}{2}e^{-yi}$, so hat $(Cos\, y)^m$

d. h. $\frac{1}{2^m}\cdot(e^{yi}+e^{-yi})^m$ allemal die Form $f_{e^{yi}}+f_{e^{-yi}}$, so oft m positiv ganz ist. Unter dieser letzteren Voraussetzung darf man also nur in C. 2. des §. 35.

$f_z = \left(z+\frac{1}{z}\right)^m = \frac{(z^2+1)^m}{z^m}$ nehmen. Dann geht die Glei-

---

*) Weil auch $z=\frac{1}{2i}\cdot log\, n(1+e^{2z\cdot i})-\frac{1}{2i}\cdot log\, n(1-e^{-2z\cdot i})$ genommen werden kann, so kann man auch in C. 2.

$$f_z = \frac{z+1}{z-1}\cdot log(n+nz)$$

nehmen; dann hat man ebenfalls $z=0$ und $z=1$, aber die zugehörigen Werthe von Σ sind nun ausgedrückt durch

$$\frac{dz}{z+dz}\cdot\frac{z+dz+1}{z+dz-1}\cdot log(n+nz+n\cdot dz) \text{ für } z=0 \text{ und } z=1,$$

und werden nun bezüglich $-Ln$ und $2L(2n)$, von welchem letzteren Werthe aber nur die Hälfte genommen werden darf. Man findet daher nun das gedachte Integral

$$= -\frac{\pi}{2}\cdot Ln+\frac{\pi}{2}\cdot L(2n) \text{ d. h. } = \frac{\pi}{2}\cdot L2,$$

also gerade so wie oben auch.

chung $\frac{z}{f_z} = 0$ in $\frac{z^{m+1}}{(z^2+1)^m} = 0$ über und giebt $z = 0$. Die Summe Σ in C. 2. zur Rechten hat daher dasmal nur ein einziges Glied, und dieses wird aus $\frac{f_z}{z}$ d. h. aus $\frac{(z^2+1)^m}{z^{m+1}}$ gefunden, wenn man $0+\varepsilon$ d. h. ε statt z setzt, dann diesen Ausdruck nach steigenden Potenzen von ε entwickelt und zuletzt den Koeffizienten von ε^{-1} nimmt. Führt man aber diese Entwickelung aus, so erhält man nach dem binomischen Lehrsatze

$$\frac{(\varepsilon^2+1)^m}{\varepsilon^{m+1}} = \frac{(1+\varepsilon^2)^m}{\varepsilon^{m+1}} = S\left[m_b \cdot \varepsilon^{2b-m-1}\right]_{a+b=m},$$

wo m_b den b^{ten} Binomial-Koeffizienten bedeutet der m^{ten} Potenz eines Binomiums; und hier ist der Koeffizient von ε^{-1} offenbar $= 0$, so oft m ungerade, dagegen

$$= m_{(\frac{1}{2}m)} = \frac{m^{\frac{1}{2}m|-1}}{(\frac{1}{2}m)!} = \frac{m!}{(\frac{1}{2}m)!\,(\frac{1}{2}m)!},$$ wenn m gerade ist.

Man findet also (aus C. 2.)

$$101)\quad \left\{\begin{aligned} &\int_0^\pi (Cos\,y)^{2n+1} \cdot dy = 0 \\ &\int_0^\pi (Cos\,y)^{2n} \cdot dy = \frac{1^{n|2}}{2^{n|2}} \cdot \pi \end{aligned}\right\}$$ wenn n Null oder positiv ganz,

weil $2^{2n} \cdot n!\, n! = 2^n \cdot 1^{n|1} \times 2^n \cdot 1^{n|1} = 2^{n|2} \cdot 2^{n|2}$,

dagegen $(m)! = 1^{2n|1} = 1^{n|2} \cdot 2^{n|2}$ ist.

Die erstere dieser Formeln versteht sich von selbst; die andere schließt sich an die XIII. des §. 13. (für $m = 0$) an (S. VIII. Th. §. 88. NN. 3. 4.).

Anmerkg. 1. Diese Beispiele mögen ausreichen, den Geist der methodischen Anwendung dieses Verfahrens des Cauchy hervorzuheben. Will man aber bloß neue specielle Resultate, so darf man (in C. 2. des §. 35.) statt f_z nur ganz beliebige specielle Funktionen setzen, z. B. $\left(\frac{1-z}{1+z}\right)^a$, $log\,n(1\pm z)$,

$log\,\frac{1\pm z}{n}$, $log\left(\frac{1-z}{1+z}\right)$, u. s. w. oder irgend eine zusammengesetztere Funktion von z.

Cauchy setzt z. B. statt f_z noch $\frac{\varphi_x}{\psi_x}$, während

$x = \frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)$ gedacht wird und φ_x und ψ_x beliebige rationale ganze Funktionen von x vorstellen; dann empfiehlt er auch noch statt f_z zu setzen das Produkt aus der eben unter $\frac{\varphi_x}{\psi_x}$ gedachten Funktion, noch multiplicirt mit einem der Ausdrücke

$$\left(\frac{1+z}{2}\right)^a,\quad \left(\frac{1-z}{2}\right)^a,\quad \left(\frac{1-z}{1+z}\right)^a,\quad log\,\frac{1+z}{2},\quad log\,\frac{1-z}{2},\quad log\,\frac{1-z}{1+z},$$

$$\frac{1}{z-\frac{1}{z}}\cdot\left(\frac{1+z}{2}\right)^a,\quad \frac{1}{z-\frac{1}{z}}\cdot log\,\frac{1+z}{2},\quad \frac{1}{log\,\frac{1+z}{2}},\quad \frac{1-z}{(1+z)\cdot log\,\frac{1+z}{2}},$$

u. s. w. f.

Anmerkg. 2. Man kann endlich aus ⊙. 1. des §. 32. noch allgemeinere Formeln ableiten, welche zu demselben Resultate ☾. 2. des §. 35. führen, aber auch neue Ansichten gewähren. Wir wollen dies in den nachstehenden Paragraphen noch kurz berühren.

§. 39.

Setzen wir nämlich in ⊙. 1. des §. 32. $e^u \cdot f_u$ statt F_u, so erhalten wir:

$$\int_y^{\mathfrak{Y}} (e^{\mathfrak{X}} \cdot f_{e^{\mathfrak{X}+y\cdot i}} - e^{r} \cdot f_{e^{r+y\cdot i}}) \cdot e^{y\cdot i} \cdot dy$$
$$+ i \cdot \int_r^{\mathfrak{X}} (e^{\mathfrak{Y}\cdot i} \cdot f_{e^{x+\mathfrak{Y}\cdot i}} - e^{y\cdot i} \cdot f_{e^{x+y\cdot i}}) \cdot e^x \cdot dx = 2\pi \cdot \Sigma(\alpha),$$

wo α den Koeffizienten von ε^{-1} bedeutet in der Entwickelung von $e^{a+b\cdot i+\varepsilon} \cdot f_{a+b\cdot i+\varepsilon}$ nach steigenden Potenzen von ε, während $a+b\cdot i$ nach und nach alle Werthe von x vorstellt,

welche der Gleichung $\frac{1}{e^x \cdot f_{e^x}} = 0$ und den Grenzbedingungen (daß nämlich a nicht außerhalb des Raumes von $\mathfrak{x}$ bis zu $\mathfrak{X}$, und b nicht außerhalb des Raumes von $\mathfrak{y}$ bis zu $\mathfrak{Y}$ liegt) genügen, während von α nur die Hälfte oder gar nur der vierte Theil genommen werden darf, so oft a oder b mit einer ihrer Grenzen zusammenfallen, oder diese beiden Ereignisse zugleich eintreffen. — Nur darf, so oft b mit einer seiner Grenzen zusammenfällt, der Faktor $x-a-b\cdot i$ im Nenner von $e^x \cdot f_{e^x}$, nur in der Form $(x-a-b\cdot i)^\mu$ vorkommen, wo $\mu \overline{\overline{<}} 1$ ist.

Führt man nun links statt x einen neuen Veränderlichen z ein mittelst der Gleichung $e^x = z$, und wird $e^{\mathfrak{X}} = \mathfrak{Z}$ und $e^{\mathfrak{x}} = \mathfrak{z}$ gesetzt, so geht die vorliegende Gleichung über in

$$(\odot.\ 2.)\ldots \int_{\mathfrak{y}}^{\mathfrak{Y}} (\mathfrak{Z} \cdot f_{\mathfrak{Z}\cdot e^{y\cdot i}} - \mathfrak{z} \cdot f_{\mathfrak{z}\cdot e^{y\cdot i}}) \cdot e^{y\cdot i} \cdot dy$$
$$+ i \cdot \int_{\mathfrak{z}}^{\mathfrak{Z}} (e^{\mathfrak{Y}\cdot i} \cdot f_{z\cdot e^{\mathfrak{Y}\cdot i}} - e^{\mathfrak{y}\cdot i} \cdot f_{z\cdot e^{\mathfrak{y}\cdot i}}) \cdot dz = 2\pi \cdot \Sigma(\alpha),$$

wo α auf die obige Weise gefunden wird.

Nach II. des §. 35. ist aber (wenn man auch rechts $e^x = z$ setzt, also daß statt des dortigen ψ_z jetzt $log\, z$, und statt des dortigen $\partial\psi'_z$ jetzt $\frac{1}{z}$ gesetzt werden muß) α auch als der Koeffizient von ε^{-1} anzusehen in der Entwickelung von $f_{p+q\cdot i+\varepsilon}$ nach steigenden Potenzen von ε, wenn $p+q\cdot i$ nach und nach alle die Werthe von z vorstellt, welche der Gleichung $\frac{1}{z \cdot f_z} = 0$ und den Grenzbedingungen genügen, d. h. welche zugleich so sind, daß, wenn aus der Gleichung $e^{a+b\cdot i} = p+q\cdot i$ die Werthe a und b gefunden werden, letztere den Grenzbedingungen des §. 32. genügen. Daraus folgt aber:

α) daß nur solche Werthe $p+q\cdot i$ in Betracht kommen,

deren Modul $e^a (= +\sqrt{p^2+q^2})$ zwischen $\mathfrak{z}$ und $\mathfrak{Z}$ liegt oder eine dieser Grenzen selbst ist; und deren Bogen b zwischen $\mathfrak{y}$ und $\mathfrak{Y}$ liegt oder mit einer dieser Grenzen zusammenfällt;

β) daß von dem so berechneten Werthe von α nur die Hälfte genommen werden darf, wenn entweder der Modul allein oder der Bogen allein einer ihrer Grenzen gleich ist, und daß nur der vierte Theil von α genommen werden darf, so oft diese letztgenannten Ereignisse gleichzeitig eintreffen; — endlich

γ) daß das zu einem Werthe $p+q \cdot i$ von z berechnete Glied α der Summe Σ, so vielmal berücksichtigt werden muß, als verschiedene Bogen von $p+q \cdot i$ existiren, welche noch zwischen den Grenzen $\mathfrak{y}$ und $\mathfrak{Y}$ liegen, oder einer dieser Grenzen gleich sind.

§. 40.

Nun muß man wiederum die Grenzen $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{y}$ und $\mathfrak{Y}$ so wählen, daß in der Gleichung $\odot$. 2. drei von den vier Integralen der Null gleich werden.

Setzt man also voraus:

daß $z \cdot f_z$ für $z = 0$ verschwindet und

daß f_z nur eindeutig ist,

so darf man nur $\mathfrak{z} = 0$ und $\mathfrak{Y} = 2\pi + \mathfrak{y}$ nehmen (damit $e^{\mathfrak{Y} \cdot i} = e^{\mathfrak{y} \cdot i}$ werde) und man erreicht diesen Zweck*). — Setzt man namentlich dann (in $\odot$. 2.) $\mathfrak{y} = -\pi$, also $\mathfrak{Y} = +\pi$, ferner $\mathfrak{z} = 0$ und $\mathfrak{Z} = 1$, so erhält man:

I. $\int_{-\pi}^{\pi} e^{y \cdot i} \cdot f_{e^{y \cdot i}} \cdot dy$

d. h. $\int_0^{\pi} (e^{y \cdot i} \cdot f_{e^{y \cdot i}} + e^{-y \cdot i} \cdot f_{e^{-y \cdot i}}) \cdot dy = 2\pi \cdot \Sigma(\alpha)$,

wenn (nach §. 39.) α für alle Werthe $p+q \cdot i$ von z berech-

---

*) Es muß f deshalb als eindeutig vorausgesetzt werden, damit $f - f$ der Null gleich ist.

net wird, welche $\frac{1}{z \cdot f_z} = 0$ machen und deren Modul zwischen 0 und 1, so wie deren Bogen zwischen $-\pi$ und $+\pi$ liegen oder mit einer dieser Grenzen zusammenfallen.

Wird aber jetzt in I. noch F_z statt $z \cdot f_z$ gesetzt, so ergiebt sich noch

II. $\int_{-\pi}^{\pi} F_{e^{y \cdot i}} \cdot dy$ d. h. $\int_0^{\pi} (F_{e^{y \cdot i}} + F_{e^{-y \cdot i}}) \cdot dy = 2\pi \cdot \Sigma(\alpha)$ *),

wo die Werthe von α nach den Regeln des §. 39. für alle Werthe $p+q \cdot i$ von z berechnet werden, welche $\frac{1}{F_z} = 0$ machen, wenn nur

A) F_z verschwindet für $z = 0$ und

B) F_z nur eindeutig gedacht wird.

Und wenn F_z für $z = 0$ nicht verschwindet, so kann man $F_z - F_0$ statt F_z schreiben und die Bedingung A.) ist dann erfüllt.

Macht man endlich in ⊙. 2. über die Grenzen $\mathfrak{y}$ und $\mathfrak{Y}$ noch andere Annahmen, so daß nicht drei von den vier Integralen verschwinden, so kann man doch Formeln erhalten, in denen ein bestimmtes Integral auf ein anderes zurückgeführt sich sieht.

Anmerkung. Wir beschließen dieses Kapitel, dessen Inhalt wir unseren Lesern nur deshalb mitgetheilt haben, weil die dem ganzen Verfahren zu Grunde liegende Idee aufbewahrt zu werden verdient, in so ferne sie später vielleicht einer weiteren Verfolgung werth befunden werden dürfte, und weil uns diese

---

*) Diese Gleichung II. stimmt mit der ☾. 2. des §. 35. nahehin überein, leidet aber an überflüssigen Beschränkungen, welche aus der Natur ihrer jetzigen Herleitung hervorgegangen sind und denen die ☾. 2. nicht unterworfen ist.

Arbeit des Cauchy zugleich mancher Erläuterungen und Berichtigungen bedürftig erschienen ist.

Und da wir in unserem Werke vorlegen wollen, was uns geeignet scheint, den Anfänger in ein gründliches, selbstbewußtes Studium der mathematischen Analysis einzuleiten und darin zu erkräftigen, so mag nun das nächste Kapitel sich noch insbesondere mit den Euler'schen Integralen beschäftigen.

Arbeit des Wauchope zugleich manchen Erläuterungen und Berichtigungen bereitwillig eingeräumt ist.

Und da wir in unserem Werke zeigen wollen, was uns geeignet schiene, den Anfänger in ein gründliches, selbstbewußtes Studium der mathematischen Analysis einzuführen und darin zu erhalten, so mag uns das nächste Kapitel sich noch insbesondere mit den Euler'schen Integralen beschäftigen.

Zweite Abhandlung.

Die Eigenschaften

der Gamma-, der Psi- und der Phi-Funktionen

und

der Euler'schen Integrale überhaupt.

Fünftes Kapitel.

Zusammenstellung der Eigenschaften der Phi- und der Gamma-Funktionen und somit der Euler'schen Integrale erster und zweiter Klasse; endlich auch der Psi-Funktionen.

§. 41.

Wir bezeichnen hier das Euler'sche Integral erster Klasse, nämlich

I. $\int_0^1 x^{a-1} \cdot (1-x^n)^{\frac{b}{n}-1} \cdot dx$ durch $[a, b]$,

wo wir a, n, b positiv voraussetzen; — ferner bezeichnen wir den besonderen Fall davon, nämlich (für $n = 1$)

II. $\int_0^1 x^{a-1} \cdot (1-x)^{b-1} \cdot dx$ oder $\int_0^\infty \frac{x^{a-1}}{(1+x)^{a+b}} \cdot dx$ *) durch $\Phi_{a,b}$,

wo a und b beliebig positiv gedacht sind. — Wir bezeichnen endlich das Euler'sche Integral zweiter Klasse, nämlich

III. $\int_0^1 \left(L\frac{1}{x}\right)^{c-1} \cdot dx$ oder $\int_0^\infty e^{-x} \cdot x^{c-1} \cdot dx$ **) durch Γ_c,

indem wir c positiv voraussetzen.

---

*) Dieses Integral geht aus dem ersteren hervor, wenn man $x = \frac{z}{1+z}$ setzt.

**) Dieses Integral geht aus dem ersteren hervor, wenn man $L\frac{1}{x} = z$ oder $x = e^{-z}$ setzt.

Wir haben im VIII. Th. §. 117.

IV. $\Gamma_c = (c-1)!$

gefunden, und im letzten Kapitel des VIII. Th. diese Fakultäten, also auch die Gamma-Funktionen numerisch (näherungsweise) zu berechnen gelehrt. Wir haben im VIII. Th. §. 117. noch gefunden

V. $$\Phi_{a,b} = \frac{\Gamma_a \cdot \Gamma_b}{\Gamma_{a+b}} = \frac{(a-1)!\,(b-1)!}{(a+b-1)!}.$$

Ferner (indem man in der I. $x^n = z$ setzt) erhält man noch

VI. $$[a, b] = \frac{1}{n} \cdot \Phi_{\frac{a}{n}, \frac{b}{n}},$$

woraus auch, wenn man an, bn bezüglich statt a, b schreibt,

VII. $$\Phi_{a,b} = n \cdot [an, bn]$$

hervorgeht.

Diese 7 Formeln und Gleichungen lassen nun zunächst nachstehende Folgerungen zu:

1) Da das Zeichen $[a, b]$ allemal einen von n abhängigen Werth vorstellt, so muß, wenn man solche Zeichen $[p, q]$ rc. rc. unter sich vergleicht, allemal bei allen ein und derselbe Werth von n vorausgesetzt werden.

2) Da $\Gamma_c = (c-1)! = 1^{c-1|1} = (c-1)^{c-1|-1}$ ist, so folgt, daß das Euler'sche Integral zweiter Klasse (nämlich Γ_c), eben weil solches nichts weiter als eine Fakultät, folglich Faktorielle ist, genau alle Eigenschaften der reellen Faktoriellen haben, während letztere (in den Zeichen der Faktoriellen ausgedrückt) unmittelbar und von jedem Anfänger aus der Betrachtung der Produkte äquidifferenter Faktoren abstrahirt werden können.

3) Da $\Phi_{a,b} = \frac{\Gamma_a \cdot \Gamma_b}{\Gamma_{a+b}}$ ist, so folgt, daß auch die Eigenschaften der Phi-Funktionen unmittelbar von denen der Gamma-Funktionen, also unmittelbar von den Eigenschaften der

reellen Fakultäten und Faktoriellen abhängen, während die Phi-Funktion nur der einfachste Fall des Euler'schen Integrals erster Klasse ist.

4) Und weil endlich für das Euler'sche Integral erster Klasse

$$[a, b] = \frac{1}{n} \cdot \Phi_{\frac{a}{n}, \frac{b}{n}} = \frac{1}{n} \cdot \frac{\Gamma_{\frac{a}{n}} \cdot \Gamma_{\frac{b}{n}}}{\Gamma_{\frac{a+b}{n}}}$$

gefunden worden ist, so folgt, daß auch die Eigenschaften dieser letztgenannten Integrale einzig und allein in den Eigenschaften der reellen Faktoriellen und Fakultäten ihren unmittelbaren Grund haben.

5) Vermöge dieser Betrachtungen erscheinen uns also diese Euler'schen Integrale erster und zweiter Klasse als diejenigen transcendenten Funktionen, welche sich an die Produkte äquidifferenter Faktoren eben so anschließen, wie die gebrochenen und die allgemeinen Potenzen (d. h. die Exponential-Funktionen) an die Produkte gleicher Faktoren sich anschließen; und so wie die letzteren Produkte als besondere Fälle der allgemeinen Potenzen angesehen werden müssen, eben so erscheinen jene Produkte als besondere Fälle des Euler'schen Integrals zweiter Klasse.

Wenn wir nun in den folgenden Paragraphen eine größere Anzahl der Eigenschaften der Gamma- und der Phi-Funktionen, so wie der Euler'schen Integrale erster Klasse überhaupt, aufzählen, so geschieht dies nur in der Absicht, um bei den einzelnen Resultaten noch nebenbei nachweisen zu können, welches Verfahren Euler und Legendre, die auf den naturgemäßen Zusammenhang dieser Euler'schen Integrale mit den allerersten Elementen des Kalkuls nicht achteten, eingeschlagen haben, um zu denselben Resultaten auf dem Wege der Integral-Rechnung zu gelangen.

Es geschieht dies aber hauptsächlich deshalb, weil wir dem

Anfänger nicht die Gelegenheit entziehen wollen, auch mit diesen letztgenannten Arbeiten bekannt werden und, was an ihnen für andere Gelegenheiten zu beherzigen seyn dürfte, beobachten zu können, ohne dabei, wie dies bei Nichtachtung der oben gedachten elementaren Grundlage der Fall ist, sich (als Anfänger) in einer weg- und trostlosen Wüste zu befinden.

Um aber unseren Zweck möglichst bequem zu erreichen, möge der Leser zunächst das Inhalts-Verzeichniß zum VIII. Theile, in welchem eine tabellarische Uebersicht der im VIII. Th. gefundenen Gesetze der reellen Faktoriellen und Fakultäten sich vorfindet, zur Hand nehmen, in so ferne wir uns hier an selbige zunächst anschließen wollen.

§. 42.

Es folgt aber zunächst (wenn man festhält, daß $\Gamma_c = (c-1)!$ ist) aus §. 101. III. *)

1) $\Gamma_c = \frac{\nu!}{c^{\nu|1}} \cdot \nu^{c-1}$ für $\nu = +\infty$ und ganz;

dann aus §. 102. V. 10.

2) $\Gamma_{c+1} = c \cdot \Gamma_c$,

3) $\Gamma_{c+n} = c^{n|1} \cdot \Gamma_c$,

wenn nur c und $c+n$ ganz oder gebrochen aber positiv sind (so daß n auch negativ ganz oder gebrochen, eben so wie beliebig positiv ganz oder gebrochen seyn kann); — ferner aus §. 102. V. 9. oder aus der hiesigen N. 3.

4) $a^{c|1} = \frac{\Gamma_{a+c}}{\Gamma_a}$,

wenn nur a und $a+c$ positiv (ganz oder gebrochen) sind; — auch (nach §. 102. VI. 2.)

---

*) Die Citate dieses §. 42. beziehen sich alle auf den VIII. Th., wo man die Formeln im Inhalts-Verzeichniß zusammengestellt findet.

5) $$a^{c|r} = r^c \cdot \frac{\Gamma_{(a:r)+c}}{\Gamma_{a:r}},$$

wenn nur a und r und $\frac{a}{r}+c$ beliebig positiv sind und die Potenz r^c ihren positiven Werth vorstellt; — hierauf (aus §. 103. VII.)

6) $$\frac{a^{c|r}}{b^{c|r}} = \frac{\Gamma_{(a:r)+c} \cdot \Gamma_{b:r}}{\Gamma_{(b:r)+c} \cdot \Gamma_{a:r}},$$

wenn nur a, b, r, $\frac{a}{r}+c$ und $\frac{b}{r}+c$ beliebig positiv sind.

Ferner folgt aus §. 105. X. (und §. 41. V. des IX. Th.)

7) $$\frac{Sin\, a\pi}{Sin\, b\pi} = \frac{\Gamma_b \cdot \Gamma_{1-b}}{\Gamma_a \cdot \Gamma_{1-a}} = \frac{\Phi_{b,\,1-b}}{\Phi_{a,\,1-a}},$$

wenn nur a und b positiv und kleiner als 1 sind; — aus §. 105. XI.

8) $$\frac{\pi}{Sin\, a\pi} = \Gamma_a \cdot \Gamma_{1-a},$$

wenn nur a positiv und <1 ist; hieraus für $a = \frac{1}{2}$

9) $$\Gamma_{\frac{1}{2}} = \sqrt{\pi},$$

und (aus N. 3.)

10) $$\Gamma_{n+\frac{1}{2}} = \frac{1^{n|2}}{2^n} \cdot \sqrt{\pi},$$

wenn nur $n+\frac{1}{2}$ positiv ist, während n selbst noch negativ oder beliebig positiv (ganz oder gebrochen) seyn kann. Endlich folgt aus den übrigen Nummern des §. 105.

11) $$\frac{a\pi}{Sin\, a\pi} = \Gamma_{1+a} \cdot \Gamma_{1-a},$$

wenn a zwischen -1 und $+1$ liegt;

12) $$\frac{\pi}{Cos\, a\pi} = \Gamma_{\frac{1}{2}+a} \cdot \Gamma_{\frac{1}{2}-a},$$

wenn a zwischen $-\frac{1}{2}$ und $+\frac{1}{2}$ liegt;

$$13) \qquad Tg\, a\pi = \frac{\Gamma_{\frac{1}{2}+a} \cdot \Gamma_{\frac{1}{2}-a}}{\Gamma_a \cdot \Gamma_{1-a}},$$

wenn nur a zwischen 0 und $\frac{1}{2}$ liegt;

$$14) \qquad \Gamma_{\frac{1}{n}} \cdot \Gamma_{\frac{2}{n}} \cdot \Gamma_{\frac{3}{n}} \cdots \Gamma_{\frac{n-1}{n}} = \frac{(2\pi)^{\frac{1}{2}(n-1)}}{\sqrt{n}},$$

wenn nur n positiv ganz ist.

Aus den §§. 106. und 107. geht hervor

$$15) \qquad \Gamma_a \cdot \Gamma_{a+\frac{1}{2}} = \Gamma_{2a} \cdot 2^{-2a+1} \cdot \sqrt{\pi};$$

$$16) \qquad \Gamma_a \cdot \Gamma_{a+\frac{1}{n}} \cdot \Gamma_{a+\frac{2}{n}} \cdots \Gamma_{a+\frac{n-1}{n}} \text{*)} = \Gamma_{na} \cdot n^{-na+\frac{1}{2}} \cdot (2\pi)^{\frac{1}{2}(n-1)};$$

während aus §. 114. XXIV^{bis}

$$17) \qquad \frac{\Gamma_{\nu+c}}{\nu^c \cdot \Gamma_\nu} = 1 \quad \text{für} \quad \nu = +\infty$$

sich ergiebt. — Aus §. 115. XXXV. dagegen und aus der hiesigen N. 5. folgt noch

$$18) \qquad r^c \cdot \frac{\Gamma_{(a:r)+c}}{\Gamma_{a:r}} = a^c \quad \text{für} \quad r = +\frac{1}{\infty},$$

wenn nur a beliebig positiv ist, während c beliebig reell gedacht werden kann.

Ferner ist aus §. 113. XXVII. der Werth der unendlichen Reihe

$$19) \qquad S\left[\frac{\alpha^{b|1} \cdot \beta^{b|1}}{b!\ \gamma^{b|1}}\right], = \frac{\Gamma_\gamma \cdot \Gamma_{\gamma-\alpha-\beta}}{\Gamma_{\gamma-\alpha} \cdot \Gamma_{\gamma-\beta}},$$

wenn nur alle Zeiger γ, $\gamma-\alpha-\beta$, $\gamma-\alpha$ und $\gamma-\beta$ positiv

---

*) Dieser Satz 16.) für den besonderen Fall, wo $a = 1$, (oder, was dasselbe ist, der Satz 14. in einer sehr wenig und zwar durch die Gleichung $\Gamma_{1+\frac{r}{n}} = \frac{r}{n} \cdot \Gamma_{\frac{r}{n}}$ veränderten Form), den Legendre zuerst mitgetheilt hat, findet sich in Lacroix's Traité de Calcul diff. et intégral. T. III. 2de Edit. pag. 480. mit dem merkwürdigen Beisatze: Ce beau théoreme se trouve mais sans démonstration dans un Mémoire inédit d'Euler, que Mr. Prony m'a communiqué.

sind. Endlich ist (nach §. 113. XXVI.) der Werth der Faktoriellen-Binomialreihe

20) $S[n_{\mathfrak{b}} \cdot a^{n-\mathfrak{b}|1} \cdot b^{\mathfrak{b}|1}]_{,} = \frac{\Gamma_{a+b+n}}{\Gamma_{a+b}} \cdot \frac{Sin\, a\pi \cdot Sin\,(a+b+n)\pi}{Sin\,(a+n)\pi \cdot Sin\,(a+b)\pi}$,

wenn nur $a+b+n$ mit $a+b$ zugleich positiv und $a+b<1$ ist;

21) $S[n_{\mathfrak{b}} \cdot a^{n-\mathfrak{b}|-1} \cdot b^{\mathfrak{b}|-1}] = \frac{\Gamma_{a+b+1}}{\Gamma_{a+b+1-n}}$ *),

so lange die Zeiger $a+b+1$ und $a+b+1-n$ positiv sind **).

---

*) Es ist nämlich dieselbe Binomial-Reihe $= (a+b)^{n|-1}$, also auch $= (a+b+1-n)^{n|1}$, folglich noch (nach N. 4.) dem Quotienten der beiden Gamma-Funktionen, d. h. der beiden bestimmten Integrale gleich.

**) Ist n positiv ganz, so giebt der binomische Lehrsatz für Faktoriellen, nämlich der Satz

$$(a+b)^{n|1} = S\left[\frac{n^{\mathfrak{b}|-1}}{\mathfrak{b}!} \cdot a^{n-\mathfrak{b}|1} \cdot b^{\mathfrak{b}|1}\right],$$

wenn man (nach N. 4.) statt $(a+b)^{n|1}$, $a^{n-\mathfrak{b}|1}$ und $b^{\mathfrak{b}|1}$ lieber die Quotienten $\frac{\Gamma_{a+b+n}}{\Gamma_{a+b}}$, $\frac{\Gamma_{a+n-\mathfrak{b}}}{\Gamma_a}$ und $\frac{\Gamma_{b+\mathfrak{b}}}{\Gamma_b}$ schreibt, augenblicklich (wenn man noch mit $\Gamma_a \cdot \Gamma_b$ multiplicirt, dagegen durch Γ_{a+b+n} dividirt)

$$\frac{\Gamma_a \cdot \Gamma_b}{\Gamma_{a+b}} = S\left[\frac{n^{\mathfrak{b}|-1}}{\mathfrak{b}!} \cdot \frac{\Gamma_{a+n-\mathfrak{b}} \cdot \Gamma_{b+\mathfrak{b}}}{\Gamma_{a+n+b}}\right]$$

und diese Gleichung geht nach §. 41. V. noch über in

$$\Phi_{a,b} = S\left[\frac{n^{\mathfrak{b}|-1}}{\mathfrak{b}!} \cdot \Phi_{a+n-\mathfrak{b},\, b+\mathfrak{b}}\right],$$

d. h. für $n = 1$, $n = 2$ und $n = 3$, in

$$\Phi_{a,b} = \Phi_{a+1,\,b} + \Phi_{a,\,b+1};$$

$$\Phi_{a,b} = \Phi_{a+2,\,b} + 2\Phi_{a+1,\,b+1} + \Phi_{a,\,b+2};$$

$$\Phi_{a,b} = \Phi_{a+3,\,b} + 3\Phi_{a+2,\,b+1} + 3\Phi_{a+1,\,b+2} + \Phi_{a,\,b+3};$$

welches eine Eigenschaft des einfachsten Euler'schen Integrals erster Klasse ist.

Die hier überall zugefügten Bedingungen der Giltigkeit rühren aber davon her, daß Γ_p nur dann einen Werth hat, wenn der Zeiger (das Argument) p positiv ist.

Anmerkg. Dieselben Formeln, welche wir so eben aus der elementaren Kenntniß der Faktoriellen und Fakultäten durch Uebersetzung, als Gleichungen zwischen den Euler'schen Integralen zweiter Klasse erhalten haben, sind auf dem Wege der Integralrechnung, wie folgt, gefunden worden.

Die Formeln NN. 2. und 3. ergeben sich, wenn man $\int e^{-z} \cdot z^c \cdot dz$ theilweise integrirt, die Integrale aber zwischen den Grenzen 0 und ∞ nimmt. Man erhält dann sogleich $\Gamma_{c+1} = c \cdot \Gamma_c$, also N. 2. — Man setzt dann hier herein statt c nach und nach $c+1$, $c+2$, ... $c+n-1$ und multiplicirt alle erhaltenen Gleichungen mit einander und man hat dann N. 3. aber nur für eine positive ganze Zahl n, also nicht so allgemein als im §. 42.

Man kann aber auch in der Gleichung

$$\Gamma_c = \int_0^\infty e^{-z} \cdot z^{c-1} \cdot dz$$

zunächst $z = ax$ setzen und man erhält, wenn a positiv vorausgesetzt wird,

$$a^{-c} \cdot \Gamma_c = \int_0^\infty e^{-ax} \cdot x^{c-1} \cdot dx.$$

Nun differenziirt man diese letztere Gleichung n mal hinter einander nach a und man erhält am Schlusse für $a = 1$ die

---

Dieselbe Eigenschaft wird aber auch gefunden, wenn man den Ausdruck $x^{a-1}(1-x)^{b-1}$ mit der Gleichung

$$1 = [x+(1-x)]^n$$

d. h. (nach dem binomischen Lehrsatze für Potenzen) mit

$$1 = S\left[\frac{n^{\mathfrak{b}|-1}}{\mathfrak{b}!} x^{n-\mathfrak{b}}(1-x)^{\mathfrak{b}}\right]$$

multiplicirt, und dann links und rechts zwischen den Grenzen 0 und 1 integrirt.

N. 3., aber auch nur, wenn n positiv ganz. Allerdings läßt sich aus der gewonnenen Gleichung leicht folgern, daß dieselbe auch gilt, wenn n negativ ganz ist. Daß sie aber auch gilt, wenn n gebrochen ist, kann auf diesem Wege nicht gefolgert werden. Unsere N. 3. ist also allgemeiner als sie auf dem Wege der Integral-Rechnung hergestellt werden kann.

Die N. 8. ist im §. 20. ε auf dem Wege der Integral-Rechnung gefunden, auch in der Anmerkg. 2. zu §. 20.

Die NN. 9. 10. ergeben sich von selbst aus N. 8. — Die N. 11. ergiebt sich, wenn man die N. 8. mit a multiplicirt; — die N. 12., wenn man in N. 8. $a+\frac{1}{2}$ statt a setzt; — die N. 13., wenn man die N. 12. durch die N. 8. dividirt.

Um die N. 1. auf dem Wege der Integral-Rechnung zu erhalten, hat man $x^a(1-x)^b$ nach x differenziirt; und dies giebt

$$\partial[x^a(1-x)^b]_x = a\cdot x^{a-1}(1-x)^b - b\cdot x^a(1-x)^{b-1}.$$

Setzt man nun hier statt $(1-x)^b$ lieber $(1-x)^{b-1}(1-x)$ d. h. lieber $(1-x)^{b-1}-x(1-x)^{b-1}$, so geht diese Gleichung über in

$$\partial[x^a(1-x)^b]_x = a\cdot x^{a-1}(1-x)^{b-1} - (a+b)\cdot x^a(1-x)^{b-1}.$$

Integrirt man nun diese Gleichung von $x=0$ bis $x=1$, so findet sich, so lange a und b positiv sind,

$$0 = a\cdot \Phi_{a,b} - (a+b)\cdot \Phi_{a+1,b}$$

oder

1) $$\Phi_{a,b} = \frac{a+b}{a}\cdot \Phi_{a+1,b}.$$

Wird nun hier herein nach und nach $a+1$, $a+2$, $a+3$, ... $a+n-1$ statt a gesetzt und werden dann alle Gleichungen mit einander multiplicirt, so findet man weiter:

2) $$\Phi_{a,b} = \frac{(a+b)^{n|1}}{a^{n|1}}\cdot \Phi_{a+n,b}.$$

Setzt man nun der Kürze wegen $a+n-1 = k$ und außerdem $1-x = y = \frac{z}{k}$, so wird

$$3)\quad \varPhi_{a+n,b} = \int_0^1 y^{b-1}\cdot(1-y)^k\cdot dy = k^{-b}\cdot\int_0^k z^{b-1}\cdot\left(1-\frac{z}{k}\right)^k\cdot dz.$$

So wie nun $n = \nu = \infty$ genommen wird, so daß auch $k = \infty$ ist, so ist das letztere Integral (nach VIII. Th. §. 117. N. 3., in so ferne $e^{-z} = \left(1-\frac{z}{k}\right)^k$ für $k = \infty$ ist) nichts anders als Γ_b, so daß aus 3.) hervorgeht:

$$4)\quad \varPhi_{a+n,b} = (a+n-1)^{-b}\cdot\Gamma_b \quad \text{für} \quad n = \nu = \infty.$$

Dies in die 2.) substituirt giebt für $n = \nu = \infty$

$$5)\quad \varPhi_{a,b} = \frac{(a+b)^{\nu|1}}{a^{\nu|1}}\cdot(a+\nu-1)^{-b}\cdot\Gamma_b.$$

Für $a = 1$ ist aber

$$\varPhi_{a,b} = \varphi_{1,b} = \int_0^1 (1-x)^{b-1}\cdot dx = \frac{1}{b};$$

also geht die 5.) über (für $a = 1$) in

$$\Gamma_b = \frac{1}{b}\cdot\frac{1^{\nu|1}}{(1+b)^{\nu|1}}\cdot\nu^b = \frac{\nu!}{b^{\nu|1}}\cdot\frac{\nu^b}{b+\nu} \quad \text{für} \quad \nu = \infty,$$

so lange nur b positiv ist; und dies ist die obige N. 1., wenn man bedenkt, daß $\frac{b+\nu}{\nu} = 1$ ist für $\nu = \infty$, weil b als eine endliche Zahl vorausgesetzt wird.

Die N. 14. wird gewöhnlich aus der N. 8. gerade so abgeleitet, wie im VIII. Th. §. 105. die XVII. (welche mit der hiesigen N. 14. gleichbedeutend ist) aus der dortigen XI. (welche die hiesige N. 8. ist) abgeleitet sich findet.

Die N. 16. kann auch wie folgt erwiesen werden: Denkt man sich nämlich solche durch Γ_{na} dividirt, dann links und

rechts die Logarithmen genommen, zuletzt aber nach a differenziirt, so ergiebt sich

$$(\odot)\cdots \quad \partial\left(Log\frac{\Gamma_a\cdot\Gamma_{a+\frac{1}{n}}\cdots\Gamma_{a+\frac{n-1}{n}}}{\Gamma_{na}}\right)_a = -n\cdot Log\,n.$$

Stellt man daher letztere Gleichung zuerst her, so wird man von ihr aus wiederum sogleich zur Nr. 16. gelangen (S. Dirichlet: Sur les intégrales Euleriennes, in Crelle's Journal f. r. u. a. Mathem. Bd. XV.). — Dieses Verfahren, jedoch abgeändert, ist folgendes: Man stellt zuerst, wie wir bereits im §. 121. des VIII. Th. gethan haben, die Gleichung auf:

$$1)\qquad \partial(Log\,\Gamma_a)_a = -A+\int_{+0}^{1}\frac{1-v^{a-1}}{1-v}\cdot dv,$$

wo A die Konstante des Integral-Logarithmens ist. Setzt man dann hier herein links und rechts $a+\frac{1}{n}$, $a+\frac{2}{n}$, $a+\frac{3}{n}$, $\cdots a+\frac{n-1}{n}$ statt a (und bedenkt man, daß, wenn $a+\frac{r}{n}=b$ wird, dann $\partial(f_b)_a = \partial f_b\cdot\partial b_a$ und $\partial b_a = 1$ ist), so ergiebt sich, sobald man alle entstehenden Gleichungen zu der 1.) addirt, und rechts noch die geometrische Reihe

$$v^{a-1}+v^{a+\frac{1}{n}-1}+v^{a+\frac{2}{n}-1}+\cdots+v^{a+\frac{n-1}{n}-1}\quad \text{summirt,}$$

$$2)\qquad \partial\left(Log\,\Gamma_a\cdot\Gamma_{a+\frac{1}{n}}\cdot\Gamma_{a+\frac{2}{n}}\cdots\Gamma_{a+\frac{n-1}{n}}\right)_a =$$

$$-nA+\int_{+0}^{1}\left(\frac{n}{1-v}-\frac{v^{a-1}}{1-v^{\frac{1}{n}}}\right)\cdot dv =$$

$$-nA+n\int_{+0}^{1}\left(\frac{nz^{n-1}}{1-z^n}-\frac{z^{na-1}}{1-z}\right)\cdot dz,$$

sobald man $v=z^n$ setzt. Wird nun ferner in der 1.) na statt a gesetzt (und bedenkt man, daß für $na=b$, allemal $\partial b_a = n$ ist —), so hat man noch

3) $$\partial(Log\,\Gamma_{na})_a = -nA + n\int_{+0}^{1}\frac{1-z^{na-1}}{1-z}\cdot dz.$$

Wird nun die 3.) von der 2.) subtrahirt, so erhält man

4) $$\partial\left(Log\frac{\Gamma_a\cdot\Gamma_{a+\frac{1}{n}}\cdots\Gamma_{a+\frac{n-1}{n}}}{\Gamma_{na}}\right)_a$$
$$= n\int_{+0}^{1}\left(\frac{nz^{n-1}}{1-z^n}-\frac{1}{1-z}\right)\cdot dz.$$

Nun sind aber bekannt die unbestimmten Integrale

$$\int\frac{nz^{n-1}}{1-z^n}\cdot dz = -log(1-z^n) \quad \text{und} \quad \int\frac{1}{1-z}\cdot dz = -log(1-z),$$

folglich auch

$$\int\left(\frac{nz^{n-1}}{1-z^n}-\frac{1}{1-z}\right)\cdot dz = log\frac{1-z}{1-z^n},$$

und dieser Logarithme geht für $z = 1$, weil der $\frac{0}{0}$ Werth, nach seiner gehörigen Bestimmung, $= \frac{1}{n}$ wird, in $-Ln$ über. Also erhält man aus 4.) unmittelbar die obige Gleichung ⊙, aus welcher, wenn man nach a integrirt,

5) $$Log\frac{\Gamma_a\cdot\Gamma_{a+\frac{1}{n}}\cdots\Gamma_{a+\frac{n-1}{n}}}{\Gamma_{na}} = -na\cdot Ln + c$$

hervorgeht; oder, wenn man vom Logarithmen zur Zahl schreitet und $e^c = C$ setzt:

6) $$\frac{\Gamma_a\cdot\Gamma_{a+\frac{1}{n}}\cdots\Gamma_{a+\frac{n-1}{n}}}{\Gamma_{na}} = C\cdot e^{-na\cdot Ln} = C\cdot n^{-na}\,{}^{*}),$$

---

*) Wir können uns nicht versagen, auch Dirichlet's Gang, um zu dieser Gleichung 6. zu gelangen, noch mitzutheilen, weil er geeignet ist, zur Anregung der minder Geübten beizutragen. Nachdem nämlich Dirichlet zu einer Gleichung gelangt ist, welche unserer Gleichung 4. entspricht, die aber zur Rechten ein anderes Integral hat, dessen Integrabilität nicht sogleich in die Augen fällt, macht er darauf aufmerksam, daß dieses Integral kein a

wo C die noch zu bestimmende Konstante (nach a) ist. Diese Konstante C wird nun vollends dadurch bestimmt, daß man in dieser Gleichung 6.) $\frac{1}{n}$ statt a schreibt, wodurch sie übergeht (weil $\Gamma_1 = 1$ ist) in

7) $$\Gamma_{\frac{1}{n}} \cdot \Gamma_{\frac{2}{n}} \cdots \Gamma_{\frac{n-1}{n}} = C \cdot n^{-1} = C \cdot \frac{1}{n},$$

während das Produkt zur Linken aus Nr. 14. bereits bekannt und $= \frac{(2\pi)^{\frac{1}{2}(n-1)}}{\sqrt{n}}$ ist, so daß man hat

8) $$\frac{(2\pi)^{\frac{1}{2}(n-1)}}{\sqrt{n}} = \frac{C}{n}, \quad \text{woraus} \quad C = (2\pi)^{\frac{1}{2}(n-1)} \cdot n^{\frac{1}{2}}$$

hervorgeht. Der Werth von C aber giebt, wenn solcher in 6.) statt C substituirt wird, sogleich die zu erweisende Gleichung. — In der Nr. 16. steckt aber die Nr. 15. (für n = 2).

Die in Nr. 18. ausgesprochene Eigenschaft ist, soviel wir

---

enthalte, also (nach a) konstant sey, und setzt diese Konstante = p. — Er erhält dann, durch Integration nach a, zur Rechten zunächst pa+q, dann aber, von den Logarithmen zu den Zahlen übergehend,

$$\frac{\Gamma_a \cdot \Gamma_{a+\frac{1}{n}} \cdots \Gamma_{a+\frac{n-1}{n}}}{\Gamma_{na}} = e^{pa+q} = C \cdot b^a,$$

wo p und q, oder $e^p = b$ und $e^q = C$ noch zu bestimmende Konstanten sind. — Um nun die Konstante b zu bestimmen, setzt er in diese Gleichung, $a + \frac{1}{n}$ statt a, so wie $na \cdot \Gamma_{na}$ und $a \cdot \Gamma_a$ statt bezüglich Γ_{na+1} und Γ_{a+1} (nach Nr. 2.) und aus der Division der neuen Gleichung durch die alte ergiebt sich dann

$$\frac{1}{n} = b^{\frac{1}{n}}, \quad \text{also} \quad b = n^{-n},$$

wodurch die vorstehende Gleichung in unsere obige Gleichung 6. übergeht.

uns erinnern, noch nirgends bemerkt worden. Sie läßt sehen, daß, wenn man den Quotienten

$$\int_0^\infty e^{-z} \cdot z^{\frac{a}{r}+c-1} \cdot dz : \int_0^\infty e^{-z} \cdot z^{\frac{a}{r}-1} \cdot dz$$

der beiden Integrale nach steigenden Potenzen von r entwickeln wollte, diese Entwickelung mit dem Gliede $a^c \cdot r^{-c}$ beginnen würde, so lange nur a wie r positiv vorausgesetzt werden. — In der N. 18. steckt aber die N. 17. (für $r = 1$).

Die N. 19. hat Gauß in der schon öfter angeführten Abhandlung im II. Bande der neuen Gött. Comment. entwickelt.

Die N. 20. ist vor uns von Niemanden noch mitgetheilt worden. — Die N. 21. ist von uns zuerst außer Zweifel gestellt worden.

---

§. 43.

Gauß beschäftigt sich noch mit den Eigenschaften des Differenzial-Koeffizienten von $L(x!)$ oder von $L(\Gamma_{1+x})$, den er durch ψ_x bezeichnet, also daß angenommen ist:

1) $\psi_x = \partial[L(x!)] = \partial(L\Gamma_{1+x})$.

Er spricht sich in N. 31. seiner Abhandlung: **Disquisitiones generales circa seriem etc.** im II. Bande der neuen Götting. Comment. dahin aus, daß diese Psi-Funktion (ψ_x) eben so merkwürdig sey, als $x!$ selbst. Jedermann muß dies sogleich zugeben, da die meisten Gleichungen, welche Eigenschaften der Fakultäten, also auch der Gamma-Funktionen ausdrücken und Produkte oder Quotienten solcher Funktionen enthalten, wenn man sie nach den unbestimmten Zeigern differenziirt, nachdem man vorher links und rechts ihre Logarithmen genommen hat, in andere Gleichungen übergehen, welche Psi-Funktionen enthalten.

Behandelt man z. B. auf diese Weise im VIII. Th. d. W. die Gleichungen §. 101. III. u. §. 102. V. 10., — ferner §. 105.

XI., ferner §. 106. XVIII. und §. 107. XIX. u. s. w. *), so erhält man sogleich und ohne Weiteres zunächst (aus §. 101. III. oder aus dem hies. §. 42. N. 1.)

2) $\psi_x = L\nu - \frac{1}{1+x} - \frac{1}{2+x} - \frac{1}{3+x} - \cdots - \frac{1}{\nu+x}$ für $\nu = \infty$;

dann (aus §. 102. V. 10. oder aus dem hies. §. 42. N. 2.)

3) $\psi_b = \psi_{b-1} + \frac{1}{b}$, oder $\psi_{1+z} = \psi_z + \frac{1}{1+z}$ **);

daraus folgt aber noch, wenn n positiv ganz ist,

4) $\psi_{z+n} = \psi_z + \frac{1}{1+z} + \frac{1}{2+z} + \frac{1}{3+z} + \cdots + \frac{1}{n+z}$.

Ferner findet sich auf dem beschriebenen Wege (aus §. 105. XI. für $a = z$, oder aus dem hies. §. 42. N. 8.)

5) $\psi_{-z} - \psi_{z-1} = \pi \cdot Cotg\, z\pi$ ***);

(aus §. 106. XVIII. für $a = z + \frac{1}{2}$, oder aus §. 42. N. 15.)

6) $\psi_z + \psi_{z-\frac{1}{2}} = 2\psi_{2z} - 2 \cdot L2$

und (aus §. 107. XIX. für $a = z + \frac{1}{n}$, oder aus §. 42. N. 16.)

7) $\psi_z + \psi_{z-\frac{1}{n}} + \psi_{z-\frac{2}{n}} + \cdots + \psi_{z-\frac{n-1}{n}} = n \cdot \psi_{nz} - n \cdot Ln$.

Aus NN. 6. 7. folgt dann noch für $z = 0$

8) $\psi_0 - \psi_{-\frac{1}{2}} = 2 \cdot L2$

9) $\psi_{-\frac{1}{n}} + \psi_{-\frac{2}{n}} + \psi_{-\frac{3}{n}} + \cdots + \psi_{-\frac{n-1}{n}} = (n-1) \cdot \psi_0 - n \cdot Ln$.

Ferner geben die Gleichungen §. 125. III. u. VII. und §. 126.

---

*) Diese Citate beziehen sich ebenfalls alle auf den VIII. Th. — Man kann aber statt der angeführten Gleichungen die entsprechenden Nummern des §. 42. setzen, namentlich die NN. 1. 2. 8. 13. 15. 16, und solche Gleichungen logarithmisch differenziiren.

**) Setzt man in 2.) $1+x$ statt x und zieht man von der neuen Gleichung die 2.) selbst wieder ab, so erhält man die 3.) noch einmal.

***) Diese Gleichung 5.) giebt wieder für $Cotg\, z\pi$ bekannte Ausdrücke.

N. 3. (wenn man in ersterer $1+z$ statt z setzt), wenn $\mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_3, \mathfrak{B}_5$, 2c. die Bernoulli'schen Zahlen vorstellen,

$$10)\quad \psi_z = L(1+z) - \frac{1}{2(1+z)} - \tfrac{1}{2}\mathfrak{B}_1 \cdot \frac{1}{(1+z)^2} + \tfrac{1}{4}\mathfrak{B}_3 \cdot \frac{1}{(1+z)^4} - \tfrac{1}{6}\mathfrak{B}_5 \cdot \frac{1}{(1+z)^6} + \cdots,$$

wo z positiv seyn muß; — ferner (indem man die Gleichung §. 125. VII. nach z differenziirt)

$$11)\quad \psi_z = Lz + \frac{1}{2z} - \frac{\mathfrak{B}_1}{2z^2} + \frac{\mathfrak{B}_3}{4z^4} - \frac{\mathfrak{B}_5}{6z^6} + \cdots,$$

wo z positiv und >1 seyn muß; und (aus §. 126. N. 3.)

$$12)\quad \psi_z = -A + S_2 \cdot z - S_3 \cdot z^2 + S_4 \cdot z^3 - S_5 \cdot z^4 + \cdots,$$

wo A die sogenannte Konstante des Integral-Logarithmen und

$$S_\mu = 1 + \frac{1}{2^\mu} + \frac{1}{3^\mu} + \frac{1}{4^\mu} + \cdots$$

angenommen worden ist, während z zwischen -1 und $+1$ liegen muß.

Setzt man in die 11.) zuerst $2z$ statt z, dann aber statt ψ_z und ψ_{2z} diese erhaltenen Werthe in die Gleichung 6.), so ergiebt sich noch:

$$13)\quad \psi_{z-\frac{1}{2}} = Lz + \frac{\mathfrak{B}_1}{2 \cdot 2z^2} - \frac{7 \cdot \mathfrak{B}_3}{4 \cdot 8z^4} + \frac{31 \cdot \mathfrak{B}_5}{6 \cdot 32z^6} - \cdots,$$

wo z positiv gedacht werden muß.

Endlich folgt aus 12.) für $z = 0$

$$14)\quad \psi_0 = -A, \qquad \text{oder} \qquad A = -\psi_0,$$

wo A die sogenannte Konstante des Integral-Logarithmen ist *),

---

*) Zu den Mitteln, die Konstante A des Integral-Logarithmen zu berechnen (S. VIII. Th. §. 119. seqq.) kommt also hier noch ein neues hinzu. Man berechnet z. B. wie Gauß gethan hat, zuerst ψ_{10} direkt aus N. 10.; dann kann man (etwa mittelst der N. 3.) daraus sogleich nach und nach $\psi_9, \psi_8, \psi_7, \cdots \psi_2, \psi_1, \psi_0$ berechnen, ohne besondere Mühe, so daß dann auch A bekannt ist.

so daß man

14bis) $\psi_0 = -0,\ 577215\ 664901\ 532860\ 6 \cdots$ hat.

Die Gleichung 4.) giebt weiter für $z=0$ und wenn n positiv ganz ist,

15) $$\psi_n = \psi_0 + 1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}.$$

Wir haben aber auch noch im §. 126. N. 7. Th. VIII. gefunden:

16) $$\psi_x = -A + \int_0^1 \frac{1-y^x}{1-y}\cdot dy = \psi_0 + \int_0^1 \frac{1-y^x}{1-y}\cdot dy\ *),$$

aus welcher Gleichung die N. 15. ebenfalls sogleich wieder hervorgeht, welche Gleichung endlich x zwischen -1 und $+\infty$ liegend voraussetzt. Daraus folgt aber auch noch

17) $$\begin{cases} \partial\psi_x = -\int_0^1 \frac{y^x\cdot Ly}{1-y}\cdot dy; \\ \partial^2\psi_x = -\int_0^1 \frac{y^x\cdot(Ly)^2}{1-y}\cdot dy; \\ \partial^3\psi_x = -\int_0^1 \frac{y^x\cdot(Ly)^3}{1-y}\cdot dy; \\ \partial^4\psi_x = -\int_0^1 \frac{y^x\cdot(Ly)^4}{1-y}\cdot dy; \end{cases}$$

u. s. w. f., während

$$\partial^{n-1}\psi_x = \partial^n[L(x!)] = \partial^n(L\Gamma_{1+x})_x \quad \text{ist.}$$

In so ferne nun $\partial^n\psi_x$ aus den Gleichungen NN. 10.–12. ausgedrückt werden kann in Reihen die nach Potenzen von x,

---

Hat man aber ψ_0 gefunden, so giebt die Gleichung 8.) auch $\psi_{-\frac{1}{2}}$ und die Gleichung 3.) noch $\psi_{\frac{1}{2}}$.

*) Aus dieser Gleichung folgt ohne Weiteres noch

$$\psi_z - \psi_x = \int_0^1 \frac{y^x - y^z}{1-y}\cdot dy = \int_0^1 y^x\cdot\frac{1-y^{z-x}}{1-y}\cdot dy,$$

wenn nur x und z zwischen -1 und ∞ liegen.

oder von $\frac{1}{x}$, oder von $\frac{1}{1+x}$ fortlaufen, — kann man danach auch die hier in N. 17. stehenden bestimmten Integrale für große oder kleine (positive) Werthe von x auswerthen.

Man kann auch Summen von Reihen, in ψ_z und deren Differenzial-Koeffizienten ausdrücken. — Man hat z. B. direkt aus §. 101. III. des VIII. Th.

$$\frac{(z+h)!}{z!} = \frac{(z+1)^{\nu|1}}{(z+1+h)^{\nu|1}} \cdot \nu^h \quad \text{für} \quad \nu = \infty.$$

Nimmt man also links und rechts die Logarithmen, setzt man dabei z zwischen -1 und ∞ liegend und h beliebig positiv voraus, so erhält man sogleich (weil

$$L(z+n+1) - L(z+n+1+h) = -L\frac{z+n+1+h}{z+n+1}$$
$$= -L\left(1+\frac{h}{z+n+1}\right) \quad \text{ist})$$

$$L[(z+h)!] = L(z!) + h\left(L\nu - S\left[\frac{1}{z+1+a}\right]\right)$$
$$+\tfrac{1}{2}h^2 \cdot S\left[\frac{1}{(z+1+a)^2}\right] - \tfrac{1}{3}h^3 \cdot S\left[\frac{1}{(z+1+a)^3}\right]$$
$$+\tfrac{1}{4}h^4 \cdot S\left[\frac{1}{(z+1+a)^4}\right] - \text{ꝛc. ꝛc.},$$

wo überall a alle Werthe 0, 1, 2, 3, ... bis $\nu-1$ vorstellt. Nach dem Taylor'schen Lehrsatze hat man aber (weil $\partial(Lz!) = \psi_z$ gesetzt worden),

$$L[(z+h)!] = L(z!) + h \cdot \psi_z + \tfrac{1}{2}h^2 \cdot \partial\psi_z + \tfrac{1}{3}h^3 \cdot \tfrac{1}{2}\partial^2\psi_z$$
$$+ \tfrac{1}{4}h^4 \cdot \frac{1}{3!}\partial^3\psi_z + \cdots$$

Die Vergleichung dieser beiden Reihen zur Rechten giebt nun sogleich

$$\psi_z = L\nu - S\left[\frac{1}{z+1+a}\right]_{a+b=\nu-1} \quad \text{für} \quad \nu = \infty$$

und dies ist abermals die Gleichung VIII. Th. §. 126. N. 2.; ferner

$$S\left[\frac{1}{(z+1+a)^2}\right] = \partial\psi_z,$$

$$S\left[\frac{1}{(z+1+a)^3}\right] = -\tfrac{1}{2}\cdot\partial^2\psi_z,$$

$$S\left[\frac{1}{(z+1+a)^4}\right] = +\frac{1}{3!}\cdot\partial^3\psi_z,$$

$$S\left[\frac{1}{(z+1+a)^5}\right] = -\frac{1}{4!}\cdot\partial^4\psi_z,$$

u. s. w. f.; wo rechts statt ψ_z die Werthe aus NN. 10. 11. oder 12. gesetzt werden können.

Und da die Reihen zur Linken, für $z=0$ in die Summen der reciproken Potenz-Reihen übergehen, die wir stets bezüglich durch

$$S_2, \quad S_3, \quad S_4, \quad S_5, \text{ etc. etc.}$$

bezeichnet haben, so sind die Werthe dieser letztern Summen offenbar auch gleich den Werthen, welche die Funktionen

$$\partial\psi_z, \quad -\tfrac{1}{2}\partial^2\psi_z, \quad +\frac{1}{3!}\cdot\partial^3\psi_z, \quad -\frac{1}{4!}\cdot\partial^4\psi_z, \text{ etc. etc.}$$

für $z=0$ annehmen; welches letztere aber auch sogleich unmittelbar aus N. 12. (d. h. aus VIII. Th. §. 126. N. 3.) hervorgeht.

§. 44.

Da ferner $\partial(Lx!) = \dfrac{\partial(x!)_x}{x!}$, also

1) $\quad \partial(x!) = x!\,\psi_x \quad$ oder $\quad \partial(L\Gamma_{1+x}) = \psi_x\cdot\Gamma_{1+x}$

ist, so folgt, wenn man weiter differenziirt und statt $\partial(x!)$ stets seinen Werth $x!\,\psi_x$ schreibt;

2) $\quad \partial^2(x!) = x!\,(\psi_x{}^2+\partial\psi_x);$

3) $\quad \partial^3(x!) = x!\,(\psi_x{}^3+3\psi_x\cdot\partial\psi_x+\partial^2\psi_x);$

u. s. w. f.

Liegt nun x zwischen -1 und $+\infty$, so ist (nach VIII. Th. §. 117.)

4) $$x! = \Gamma_{1+x} = \int_0^\infty e^{-y} \cdot y^x \cdot dy;$$

also auch

5) $$\partial(x!) = \int_0^\infty e^{-y} \cdot y^x \cdot Ly \cdot dy;$$

6) $$\partial^2(x!) = \int_0^\infty e^{-y} \cdot y^x \cdot (Ly)^2 \cdot dy;$$

7) $$\partial^3(x!) = \int_0^\infty e^{-y} \cdot y^x \cdot (Ly)^3 \cdot dy;$$

u. s. w. f.

Aus der Vergleichung dieser letztern Gleichungen mit den erstern, hat man also auch diese letzteren bestimmten Integrale in $x!$ oder Γ_{1+x} und in ψ_x, $\partial\psi_x$, $\partial^2\psi_x$, 2c. d. h. in $\partial(L\Gamma_{1+x})$, $\partial^2(L\Gamma_{1+x})$, $\partial^3(L\Gamma_{1+x})$, u. s. w. ausgedrückt, während letztere (nach §. 43. NN. 10.—12.) wieder in unendlichen Reihen darstellbar sind, welche nach Potenzen von x, oder nach Potenzen von $\frac{1}{x}$, oder nach Potenzen von $\frac{1}{1+x}$ fortlaufen, so daß (nach der einen oder nach der anderen) die Werthe dieser Funktionen für größere und kleinere Werthe von x berechnet werden können.

§. 45.

Wir wollen jetzt noch den Gang der (stets reellen) Werthe von $x!$ betrachten, für alle stetig auf einander folgenden Werthe von x, die von $-\infty$ anfangend, stetig wachsend, nach und nach durch -3, -2, -1, 0, $+1$, $+2$, u. s. f. bis zu $+\infty$ hin gehen.

Es folgt aber aus §. 43. N. 11., daß für $z \overline{\geq} 1$ der Werth von ψ_z d. h. von $\partial L(z!)$ allemal

$$< Lz + \frac{1}{2z}, \quad \text{aber} \quad > Lz + \frac{1}{2z} - \frac{1}{12z^2}$$

ist; folglich ist $\partial L(x!)$ für alle Werthe von x, die >1 sind, allemal positiv; folglich

wachsen $L(x!)$ und $x!$ von $x = +1$ an bis zu $x = +\infty$ hin, ununterbrochen.

Nach §. 43. Nr. 12. ist ferner ψ_z negativ für $z = 0$ und (nach §. 43. Nr. 3.) $\psi_1 = \psi_0 + 1$ d. h. (wegen §. 43. Nr. 14[bis]) ψ_z ist positiv für $z = 1$; also liegt zwischen 0 und 1 ein Werth von z, welcher $\psi_z = 0$, d. h. $\partial L(z!) = 0$, d. h. $L(z!)$ und $z!$ selbst zu einem Minimo macht. Sucht man diesen Werth von z, der $\psi_z = 0$ macht, so findet man $z = 0,4616321 \cdots$, und dazu findet sich dann der relativ kleinste Werth von $z!$, $= 0,8856024 \cdots$.

Die Werthe von $x!$ nehmen also von $x = 0$ an (wo $x! = 1$ ist) bis zu $x = 0,4616321 \cdots$ hin, stets ab, um von diesem kleinsten Werthe $x! = 0,8856024 \cdots$ an bis zu $x! = 1! = 1$ hin wieder zu wachsen.

Da ferner, wenn $z-1 = x$ gesetzt wird, $x! = \frac{z!}{z}$ ist, so folgt noch, wenn man statt z nach und nach alle Werthe von $z = +0$ an bis zu $z = 1$ hin gesetzt sich denkt,

daß die Werthe von $x!$ von $x = -1$ an bis zu $x = 0$ hin stets positiv sind und von $+\infty$ an bis zu $+1$ hin stets abnehmen, weil (nach VIII. Th. §. 131. Nr. 12.) $\partial L(x!)$, nämlich ψ_x, von $x = -1$ an bis zu $x = 0$ hin stets negativ ist.

Also hat $(x-1)!$ d. h. Γ_x für $x = +0$ den Werth $+\infty$, nimmt dann stetig ab bis zu $\Gamma_1 = 0! = 1$ hin, während x von 0 an bis zu 1 hin stetig wächst; der Werth von Γ_x nimmt noch weiter ab bis zu $+0,8856024 \cdots$ hin, während x noch wächst bis zu $1,4616321 \cdots$ hin; von diesem kleinsten Werthe von Γ_x ab dagegen, wachsen die Werthe von Γ_x mit denen von x bis ins Unendliche fort, während sie stets positiv bleiben. Dabei hat man $\Gamma_{+0} = +\infty$; $\Gamma_1 = 1$; $\Gamma_2 = 1$; $\Gamma_3 = 1 \cdot 2$; $\Gamma_4 = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$; $\Gamma_5 = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$; u. s. w. f.; immer unter der Voraus-

setzung, daß Γ_x das Euler'sche Integral zweiter Klasse $\int_0^\infty e^{-z} . z^{x-1} . dz$ oder $\int_0^1 \left(L\frac{1}{z}\right)^{x-1} . dz$ vorstellt.

Und weil, wenn $z-2 = x$ gesetzt wird,

$$x! = (z-2)! = \frac{(z-1)!}{z-1} = \frac{z!}{(z-1)(z-2)}$$

ist, so folgt, wenn man statt z nach und nach alle Werthe von $z = +0$ an bis zu $z = 1$ hin setzt, so daß $z-1$ stets negativ und $(z-1)!$ stets positiv bleibt,

daß $x!$ stets negativ ist, von $x = -2+\frac{1}{\infty}$ an bis zu $x = -1-\frac{1}{\infty}$ hin; und daß in diesem Zwischenraume die Werthe von $x!$ von $-\infty$ an stetig wachsen bis zu einem negativen Maximo hin, um dann wieder bis zu $-\infty$ hin stets abzunehmen.

Und weil $(z-3)! = \frac{(z-2)!}{z-2}$ ist, so folgt wieder;

daß $x!$ stets positiv ist von $x = -3+\frac{1}{\infty}$ an bis zu $x = -2-\frac{1}{\infty}$ hin, und daß in diesem Zwischenraume die Werthe von $x!$ von $+\infty$ an abnehmen bis zu einem positiven Minimo hin, um dann wieder bis zu $+\infty$ hin stets zu wachsen.

Allgemein folgt, wenn $n = 0$ oder positiv ganz gedacht wird:

1) Die Werthe von $x!$ sind für alle negativen Werthe von x, welche zwischen $x = -2n-1$ und $x = -2n$ liegen, stets positiv, — sie fangen mit $+\infty$ an, hören mit $+\infty$ auf, und haben dazwischen ein (positives) Minimum.

2) Die Werthe von $x!$ sind für alle negativen Werthe von x, die zwischen $x = -2n-2$ und $x = -2n-1$ liegen, alle negativ; sie fangen mit $-\infty$ an, hören mit

$-\infty$ auf, und dazwischen liegt einer der Werthe, der ein Maximum (d. h. negativ und an sich ein Minimum) ist.

3) An den Grenzen, wo $x = -2n-2$ oder $x = -2n-1$ ist, hat die Funktion $x!$ gar keinen Werth; ihr Ausdruck nimmt die Form $\frac{1}{0}$ an; und dies macht allemal darauf aufmerksam, daß in diesen Fällen von einem im Kalkul zulässigen Werthe (von $x!$) nicht mehr die Rede seyn kann, — mit andern Worten — daß hier die Grenzen sind, an denen sich das Daseyn (und hier auch die Stetigkeit) der Werthe von $x!$ jedesmal unterbrochen sieht. — Unmittelbar auf beiden Seiten dieser Grenze, dicht an dieser Grenze, sind die Werthe von $x!$ auf der einen Seite $+\infty$, auf der andern $-\infty$ *).

Um die Minima und Maxima zu finden, kann man so verfahren: Liegt x zwischen $-\nu$ und $-\nu+1$, so kann man $x = -\nu+z$ setzen und z liegt dann zwischen 0 und 1. Man hat dann

$$x! = (-\nu+z)! = (z-1)!\, z^{1-\nu|1} = \frac{(z-1)!}{(z-1)^{\nu-1|-1}}$$

$$= (-1)^{\nu-1} \cdot \frac{(z-1)!}{(1-z)^{\nu-1|1}};$$

also ist auch

$$(-1)^{\nu-1} \cdot x! = \frac{(z-1)!}{(1-z)(2-z)(3-z) \cdots (\nu-1-z)},$$

wo wir uns $\nu \geqq 2$ denken wollen, damit zur Rechten Zähler

---

*) Das Gleiche ist bei

$$Tg\,x \left(= \frac{Sin\,x}{Cos\,x}\right)$$

der Fall, für $x = \pm\frac{1}{2}\pi$, $\pm\frac{3}{2}\pi$, $\pm\frac{5}{2}\pi$, ꝛc. ꝛc. — Für diese Werthe von x hat $Tg\,x$ gar keinen Werth; sie zeigen die Stellen an, wo die Funktion $Tg\,x$ ihr Daseyn (und dasmal auch ihre Stetigkeit) unterbricht. Dicht an einer jeden solcher Stelle ist $Tg\,x$ auf der einen Seite $+\infty$, auf der andern $-\infty$. — Der Ausdruck $Tg(\pm\frac{1}{2}\pi)$, oder $Tg(\pm\frac{3}{2}\pi)$, oder ꝛc. ꝛc. darf in keiner Rechnung zugelassen werden.

und Nenner zugleich positiv sind. *). Nimmt man nun links und rechts die Logarithmen, und dann die Differenzial-Koeffizienten nach z, so erhält man, weil

$\partial[L(x!)]_z = \partial[L(x!)]_x \cdot \partial x_z = \partial[L(x!)] = \psi_x$ ist,

$$\psi_{-\nu+z} = \psi_{z-1} + \frac{1}{1-z} + \frac{1}{2-z} + \frac{1}{3-z} + \cdots + \frac{1}{\nu-1-z},$$

wo wir uns $\nu \overline{\overline{>}} 2$ gedacht haben.

Sucht man also den Werth von $x = -\nu + z$, der zwischen $-\nu$ und $-\nu+1$ liegt, und für welchen $x!$ das $\begin{pmatrix}\text{negative}\\ \text{positive}\end{pmatrix} \begin{Bmatrix}\text{Maximum}\\ \text{Minimum}\end{Bmatrix}$ erreicht $\left(\text{je nachdem } \nu = \begin{matrix}2n+2\\ 2n+3\end{matrix}\right)$, so muß man den Werth von x suchen, welcher ψ_x d. h. $\psi_{-\nu+z}$ der Null gleich macht, also den Werth von z, welcher der Gleichung

$$\psi_{z-1} + \frac{1}{1-z} + \frac{1}{2-z} + \frac{1}{3-z} + \cdots + \frac{1}{\nu-1-z} = 0$$

genügt, wobei man statt ψ_{z-1} seinen Ausdruck aus §. 43. N. 12. substituiren kann, während $\nu \overline{\overline{>}} 2$ vorausgesetzt ist; man nimmt dann $x = -\nu + z$ als den gesuchten Werth von x.

Schlußanmerkung.

Die Euler'schen Integrale zweiter und erster Klasse, also die Gamma-Funktionen und die Phi-Funktionen, oder, weil $\Phi_{a,b} = \frac{\Gamma_a \cdot \Gamma_b}{\Gamma_{a+b}}$ ist, die Gamma-Funktionen allein, d. h. die gebrochenen Fakultäten, sind in den Anwendungen auch deshalb noch von besonderer Wichtigkeit, weil (wie wir gesehen haben) eine größere Anzahl bestimmter Integrale noch auf sie zurückgeführt werden kann **).

---

*) Aus dieser Gleichung geht abermals hervor, daß $x!$ positiv ist für ν ungerade, und negativ für ν gerade. Dies stimmt genau mit den vorstehenden NN. 1. u. 2. überein.

**) Für Anfänger bemerken wir aber noch ausdrücklich, daß Kramp's

Endlich müssen wir noch bemerken, daß nichts leichter wäre, als den Begriff Γ_x, bei welchem wir hier x stets positiv voraussetzen, auch für den Fall zu erweitern, daß x negativ ist, weil man dazu nichts weiteres bedarf, als festzusetzen, daß man unter Γ_x kein bestimmtes Integral, sondern eben die reelle Fakultät $(x-1)!$ verstehen und dabei x beliebig positiv oder negativ voraussetzen wolle*). — Weil aber $(x-1)!$ dem bestimmten Integrale $\int_0^\infty e^{-z} \cdot z^{x-1} \cdot dz$ gleich ist, so oft x positiv gedacht wird, so würde dann auch Γ_x, so oft x positiv ist, demselben bestimmten Integrale gleich seyn; u. s. w. f. — Wir aber, die wir den allgemeineren Begriff $(x-1)!$ schon haben (für jeden reellen Werth von x) — wir würden durch diese Verallgemeinerung der Bedeutung des Zeichens Γ_x nichts gewinnen und nur verlieren, eben weil wir, wenn wir unter Γ_x, bei der Voraussetzung, daß x nur positiv ist, nie etwas anderes als das bestimmte Integral

$$\int_0^\infty e^{-z} \cdot z^{x-1} \cdot dz \quad \text{oder} \quad \int_0^1 \left(L\frac{1}{z}\right)^{x-1} \cdot dz$$

verstehen, dann gerade den schönen Lehrsatz hinschreiben können, nach welchem dasselbe bestimmte Integral Γ_x,

$$= (x-1)! = \frac{1^{\nu|1}}{x^{\nu|1}} \cdot \nu^{x-1} \quad \text{für } \nu = +\infty \text{ und ganz}, —$$

ist und danach berechnet werden kann.

§. 46.

(Eigenschaften der Phi-Funktionen).

Die wichtigsten Eigenschaften der Phi-Funktionen ergeben

Auswerthungen bestimmter Integrale einer genauen Sichtung bedürfen, in so ferne er theils unrichtige Werthe angegeben, theils für eine Anzahl bestimmter Integrale, welche entweder zu den divergenten oder zu den unterbrochenen gehören, demnach gar keine Werthe haben, dennoch Werthe angegeben hat.

*) Cauchy giebt auch ein bestimmtes Integral an (in seinen Exercises), welches er unter Γ_x versteht, wenn x negativ ist.

sich unmittelbar aus den beiden Gleichungen (VIII. Th. §. 116. und §. 117.)

$$\text{I.}\qquad \Phi_{a,b} = \int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1}\cdot dx = \int_0^\infty \frac{x^{a-1}}{(1+x)^{a+b}}\cdot dx$$

und

$$\text{II.}\qquad \Phi_{a,b} = \frac{(a-1)!\,(b-1)!}{(a+b-1)!} = \frac{\Gamma_a\cdot\Gamma_b}{\Gamma_{a+b}},$$

welche beide Gleichungen a und b positiv voraussetzen und von denen die erstere die Bezeichnung feststellt, die andere aber dieses bestimmte Integral in Fakultäten ausdrückt.

Erstlich folgt offenbar aus II. unmittelbar

$$1)\qquad \Phi_{a,b} = \Phi_{b,a}$$

und, in Verbindung mit VIII. Th. §. 102. V. 11.,

$$2)\qquad \Phi_{a,b} = \frac{(b-1)!}{a^{b|1}} = \frac{1}{b}\cdot\frac{1^{b|1}}{a^{b|1}} = (a-1)!\,(a+b)^{-a|1},$$

während noch zur Rechten a und b beliebig mit einander vertauscht werden können.

Die Anwendung der Gesetze der Faktoriellen, wie solche im VIII. Th. §. 102. IV. V. und VI. zu finden sind, giebt nun ohne Weiteres alle übrigen merkwürdigen Eigenschaften der Phi-Funktionen.

Zunächst folgt noch aus 1.) und 2.), daß, so oft a oder b positiv ganz vorausgesetzt wird, das Integral $\Phi_{a,b}$ allemal in Produkte äquidifferenter Faktoren ausgedrückt ist. — Für $b = 1$ ist namentlich:

$$3)\qquad \Phi_{a,1} = \Phi_{1,a} = \frac{1}{a}.$$

Auch fällt in die Augen, daß, so oft $a+b$, $= 1$ oder irgend eine andere ganze positive Zahl ist, der Nenner zur Rechten in II. in ein Produkt äquidifferenter Faktoren oder in 1 (weil $0! = 1$, $1! = 1$) übergeht. Der Werth von $\Phi_{a,b}$ läßt sich also dann in ein Produkt zweier (gebrochenen) Fakultäten (oder Gamma-Funktionen) ausdrücken, und daher in allen

den Fällen auf bekannte Ausdrücke zurückführen, in welchen das letztgenannte Produkt bekannten Ausdrücken gleich ist.

Setzt man namentlich $a+b=1$, also $1-a$ statt b, so erhält man sogleich (nach VIII. Th. §. 105. XI. oder §. 42. N. 8.)

4) $$\Phi_{a,1-a}=\Phi_{1-a,a}=\frac{\pi}{Sin\, a\pi},$$

d. h. $$\int_0^1 \frac{x^{a-1}}{(1-x)^a}\cdot dx=\frac{\pi}{Sin\, a\pi},$$

wenn nur a positiv ist und <1; woraus (für $a=\frac{1}{2}$) noch

5) $$\Phi_{\frac{1}{2},\frac{1}{2}}=\pi \quad \text{d. h.} \quad \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x(1-x)}}\cdot dx=\pi$$

hervorgeht.

Ist $a+b=p$, setzt man also $p-b$ statt a (in die II.), so hat man

$$\Phi_{a,p-a}=\frac{(a-1)!\,(p-a-1)!}{(p-1)!}=\frac{\Gamma_a\cdot\Gamma_{p-a}}{\Gamma_p}.$$

Weil aber (nach VIII. Th. §. 105. XIII.)

$(p-\frac{1}{2}-1)!=\Gamma_{p-\frac{1}{2}}=\frac{1^{p-1|2}}{2^{p-1}}\cdot\sqrt{\pi}$ und (nach ebendas. XII.)

$(-\frac{1}{2})!=\Gamma_{\frac{1}{2}}=\sqrt{\pi}$ ist, so folgt hieraus für $a=\frac{1}{2}$ und wenn man noch $p+1$ statt p setzt:

6) $$\Phi_{\frac{1}{2},p+\frac{1}{2}}=\frac{1^{p|2}}{2^{p|2}}\cdot\pi,$$

wodurch das Integral $\int_0^1 \frac{(1-x)^p}{\sqrt{x(1-x)}}\cdot dx$, so oft p positiv ganz (oder Null) ist, in Produkte äquidifferenter Faktoren und in die Zahl π ausgedrückt sich sieht.

Setzt man in 2.) $m+\frac{1}{2}$ statt a und $p+\frac{1}{2}$ statt b, so erhält man sogleich (mittelst der XIII. des §. 105. des VIII. Th.)

7) $$\Phi_{m+\frac{1}{2},p+\frac{1}{2}}=\frac{1^{m|2}\cdot 1^{p|2}}{2^{m+p|2}}\cdot\pi,$$

wodurch das Integral $\int_0^1 \frac{x^m \cdot (1-x)^p}{\sqrt{x(1-x)}} \cdot dx$, so oft m und p positiv ganz sind oder Null, allemal in Produkte äquidifferenter Faktoren und in die Zahl π ausgedrückt sich sieht, während jedoch die Gleichungen 6. und 7. auch für jeden gebrochenen Werth von p und m gelten, ja selbst für negative Werthe von p und m, wenn sie nur im letztern Falle an sich $<\frac{1}{2}$ sind.

Die Gleichungen XV. und XVI. des §. 105. des VIII. Th. führen gerade so (mittelst der obenstehenden II.) noch zu den Resultaten:

8) $\Phi_{1+a,1-a} = \frac{a\pi}{Sin\, a\pi}$, d. h. $\int_0^1 \left(\frac{x}{1-x}\right)^a \cdot dx = \frac{a\pi}{Sin\, a\pi}$,

wenn a zwischen -1 und $+1$ liegt;

9) $\Phi_{\frac{1}{2}+a,\frac{1}{2}-a} = \frac{\pi}{Cos\, a\pi}$,

d. h. $\int_0^1 \left(\frac{x}{1-x}\right)^a \cdot \frac{1}{\sqrt{x(1-x)}} \cdot dx = \frac{\pi}{Cos\, a\pi}$,

wenn a zwischen $-\frac{1}{2}$ und $+\frac{1}{2}$ liegt.

Diese hinzuzufügenden Bedingungen der Gültigkeit rühren aber daher, weil $\Phi_{p,q}$ überhaupt gar keinen Werth hat, wenn nicht beide Argumente (Zeiger) p und q positiv sind.

Um weitere Eigenschaften der Phi-Funktionen zu entwickeln, betrachten wir das Verhältniß (den Quotienten) und das Produkt zweier derselben. — Nach II. hat man unmittelbar, wenn a, b, c, k positiv vorausgesetzt werden,

$$\text{III.} \quad \frac{\Phi_{a,b}}{\Phi_{c,k}} = \frac{(a-1)!\,(b-1)!}{(c-1)!\,(k-1)!} \cdot \frac{(c+k-1)!}{(a+b-1)!} = \frac{\Gamma_a \cdot \Gamma_b \cdot \Gamma_{c+k}}{\Gamma_c \cdot \Gamma_k \cdot \Gamma_{a+b}},$$

und

$$\text{IV.} \quad \Phi_{a,b} \cdot \Phi_{c,k} = \frac{(a-1)!\,(b-1)!\,(c-1)!\,(k-1)!}{(a+b-1)!\,(c+k-1)!} = \frac{\Gamma_a \cdot \Gamma_b \cdot \Gamma_c \cdot \Gamma_k}{\Gamma_{a+b} \cdot \Gamma_{c+k}}.$$

Ziehen wir zuerst Folgerungen aus der Reduktions-Formel III. — Haben die beiden Phi-Funktionen in III. ein gemeinschaft-

liches Argument $b = k$, so erhält man mit Zuziehung der zweiten Haupteigenschaft der Faktoriellen (VIII. Th. §. 102. V.)

$$10) \qquad \frac{\Phi_{a,b}}{\Phi_{c,b}} = \frac{(a-1)!\,(c+b-1)!}{(c-1)!\,(a+b-1)!} = \frac{c^{b|1}}{a^{b|1}},$$

wenn nur a, b, c beliebig positiv sind.

Weil aber (nach derselben Haupteigenschaft der Faktoriellen, und namentlich nach §. 103. des VIII. Th.) $\frac{c^{b|1}}{a^{b|1}} = \frac{c^{a-c|1}}{(c+b)^{a-c|1}}$ und dieser letztere Quotient (nach 10.) wiederum $= \frac{\Phi_{c+b,\,a-c}}{\Phi_{c,\,a-c}}$ ist, so geht aus der 10. sogleich noch hervor

$$11) \qquad \frac{\Phi_{a,b}}{\Phi_{c,b}} = \frac{c^{b|1}}{a^{b|1}} = \frac{c^{a-c|1}}{(c+b)^{a-c|1}} = \frac{\Phi_{c+b,\,a-c}}{\Phi_{c,\,a-c}};$$

oder, wenn man $a+c$ statt a schreibt und noch berücksichtigt, daß (nach N. 2.) die Zeiger beliebig verwechselt werden dürfen, und die Brüche wegschafft:

$$12) \qquad \Phi_{c,b} \cdot \Phi_{c+b,\,a} = \Phi_{a,c} \cdot \Phi_{a+c,\,b} = \Phi_{b,a} \cdot \Phi_{b+a,\,c},$$

wenn nur a, b, c beliebig positiv sind. — Daß aber jedes dieser 3 Produkte denselben Werth hat, folgt auch aus der IV. unmittelbar, weil jedes derselben

$$13) \qquad = \frac{(a-1)!\,(b-1)!\,(c-1)!}{(a+b+c-1)!} = \frac{\Gamma_a \cdot \Gamma_b \cdot \Gamma_c}{\Gamma_{a+b+c}}$$

ist *).

Die Formel 10. oder 11. liefert uns auch sogleich eine andere Reduktions-Formel, wenn wir etwa $a-m$ statt c setzen. Man hat dann (mit Zuziehung von §. 102. V. des VIII. Th.)

---

*) Eben so würde man sogleich finden:

$$\Phi_{a,b} \cdot \Phi_{a+b,\,c} \cdot \Phi_{a+b+c,k} = \Phi_{b,c} \cdot \Phi_{b+c,\,k} \cdot \Phi_{b+c+k,a}$$
$$= \Phi_{c,k} \cdot \Phi_{c+k,\,a} \cdot \Phi_{c+k+a,b} = \Phi_{k,a} \cdot \Phi_{k+a,\,b} \cdot \Phi_{k+a+b,c} = \text{etc. etc. etc.}$$
$$= \frac{(a-1)!\,(b-1)!\,(c-1)!\,(k-1)!}{(a+b+c+k-1)!}. \text{ —}$$

Und dies läßt sich auf Produkte von beliebig viel solcher Phi-Funktionen ausdehnen.

$$14)\quad \Phi_{b,a} = \Phi_{a,b} = \frac{(a-m)^{b|1}}{a^{b|1}} \cdot \Phi_{b,\,a-m}$$
$$= \frac{(a-m)^{m|1}}{(a+b-m)^{m|1}} \cdot \Phi_{b,a-m};$$

und daraus, wenn man $\Phi_{b,\,a-m}$ mittelst derselben Formel wieder auf $\Phi_{b-p,\,a-m}$ reducirt, noch

$$15)\quad \Phi_{a,b} = \frac{(a-m)^{m|1} \cdot (b-p)^{p|1}}{(a+b-m-p)^{m+p|1}} \cdot \Phi_{a-m,\,b-p}\ *),$$

durch welche Gleichung, wenn a und b größer als 1 sind, der Werth der Funktion $\Phi_{a,b}$ auf den Werth der andern Phi-Funktion reducirt ist, in welcher $a-m$ statt a und $b-p$ statt b steht, während $a-m$ und $b-p$ nun kleiner als 1 genommen werden können. Dies ist eine Reduktions-Formel, welche zwar, so lange nur $a-m$ und $b-p$ mit a und b zugleich positiv sind, immer gilt, auch wenn m und p beliebig (ganz oder gebrochen) gedacht werden, welche aber das Wesen einer Reduktions-Formel dann vorzüglich behält, wenn man sich m und p positiv ganz denkt, in welchem Falle die vorkommenden Faktoriellen Produkte äquidifferenter Faktoren vorstellen. — Die einfachste Reduktions-Formel erhält man aus der 14.) für $m = 1$, nämlich

$$16)\quad \Phi_{b,a} = \frac{a-1}{a+b-1} \cdot \Phi_{b,\,a-1}\ **).$$

---

*) In dieser Gleichung 15. steckt wieder die Gleichung 7., sobald man die 5. zuzieht, so wie in der obigen 14. noch die Gleichung 6. enthalten ist, wenn man noch die 5. zu Hilfe nimmt.

**) In der Anmerkung zu §. 42. haben wir dieselbe Reduktionsformel (in N. 1. daselbst, nur $a+1$ statt a gesetzt) auf dem Wege der Integralrechnung bereits gefunden, so wie in N. 2. daselbst auch die obige N. 14. enthalten ist.

Wird aber in dieser N. 16. nach und nach $a-1$, $a-2$, $a-3$, ... $a-(m-1)$ statt a gesetzt, und werden dann alle Gleichungen mit einander multiplicirt, so erhält man sogleich wieder die Reduktionsformel 14., jedoch nur für den besonderen Fall, daß m positiv ganz ist, während nach der Ableitung im Texte oben, dieselbe N. 14. nothwendig in allen Fällen gilt,

Da (nach VIII. Th. §. 105.) der Quotient zur Rechten in N. 10. $= \frac{Sin\, c\pi}{Sin\, a\pi}$ wird, so oft $a+c+b = 1$, also so oft $b = 1-a-c$ gesetzt wird, so giebt die 10. für diesen Fall:

$$17)\quad \frac{\Phi_{a,1-a-c}}{\Phi_{c,1-a-c}} = \frac{Sin\, c\pi}{Sin\, a\pi},$$

so lange nur a und c und $1-a-c$ positiv sind. — Und da sich $Sin\, c\pi$ nicht ändert, wenn $1-c$ statt c gesetzt wird, und das ganz Analoge für $Sin\, a\pi$ gilt, so behält dieser Quotient der beiden Phi-Funktionen stets einen und denselben Werth, wenn man entweder $1-c$ statt c, oder $1-a$ statt a setzt, oder wenn beides zugleich geschieht; nur müssen alle Zeiger (Argumente) d. h. die jedesmaligen Werthe von x und z in der Funktion $\Phi_{x,z}$, stets positiv seyn, weil sonst das Integral Φ selbst gar keinen Werth hat.

Und da der Bedingung $a+b+c = 1$ auf die mannigfaltigste Weise genügt werden kann, so erhält man aus dieser letzt erwähnten Gleichung noch viele besondere Resultate. So ergiebt sich z. B. für $b = a$ und $c = 1-2a$, d. h. wenn man in der 17.) $c = 1-2a$ setzt:

$$18)\quad \frac{\Phi_{a,a}}{\Phi_{1-2a,a}} = \frac{Sin\, 2a\pi}{Sin\, a\pi} = 2\, Cos\, a\pi;$$

und für $c = \frac{1}{2}$ (aus der 17.)

$$19)\quad \frac{\Phi_{a,\frac{1}{2}-a}}{\Phi_{\frac{1}{2},\frac{1}{2}-a}} = \frac{1}{Sin\, a\pi}.$$

U. s. w. f.

Nimmt man in der III. noch $c+k = a+b$, so geht sie über in

$$20)\quad \frac{\Phi_{a,b}}{\Phi_{c,a+b-c}} = \frac{(a-1)!\,(b-1)!}{(c-1)!\,(a+b-c-1)!} = \frac{\Gamma_a\cdot\Gamma_b}{\Gamma_c\cdot\Gamma_{a+b-c}}.$$

---

in denen m beliebig positiv oder negativ ganz oder gebrochen ist, so lange nur $a-m$ noch positiv bleibt.

Dadurch kann man die Eigenschaft (VIII. Th. §. 106. XVIII.) der Faktoriellen, — nach welcher (weil noch $\sqrt{\pi} = (-\frac{1}{2})!$ ist)

$$\frac{(a-1)!\,(a+\frac{1}{2}-1)!}{(2a-1)!\,(\frac{1}{2}-1)!} = 2^{1-2a} \quad \text{d. h.} \quad \frac{\Gamma_a \cdot \Gamma_{a+\frac{1}{2}}}{\Gamma_{2a} \cdot \Gamma_{\frac{1}{2}}} = 2^{1-2a}$$

ist, — sogleich in eine Eigenschaft der Phi-Funktionen umformen, indem man in N. 20. $b = a+\frac{1}{2}$ und $c = 2a$ setzt; dies giebt, wenn man zugleich noch die N. 12. zuzieht,

$$21) \qquad \frac{\Phi_{a,\,a+\frac{1}{2}}}{\Phi_{2a,\frac{1}{2}}} = \frac{\Phi_{a,a}}{\Phi_{a,\frac{1}{2}}} = 2^{1-2a}.$$

Weil aber (nach N. 12. und nach NN. 5. u. 9.) auch noch

$$\frac{\Phi_{a,\frac{1}{2}}}{\Phi_{a,\,\frac{1}{2}-a}} = \frac{\Phi_{\frac{1}{2},\frac{1}{2}}}{\Phi_{\frac{1}{2}+a,\frac{1}{2}-a}} \quad \text{und} \quad \Phi_{\frac{1}{2},\frac{1}{2}} = \pi,$$

$$\text{so wie} \quad \Phi_{\frac{1}{2}+a,\,\frac{1}{2}-a} = \frac{\pi}{Cos\, a\pi} \quad \text{ist,}$$

so folgt, wenn man die 21. mit dieser Gleichung multiplicirt, dabei aber statt $\Phi_{\frac{1}{2},\frac{1}{2}}$ und $\Phi_{\frac{1}{2}+a,\,\frac{1}{2}-a}$ ihre Werthe setzt,

$$22) \qquad \frac{\Phi_{a,a}}{\Phi_{a,\,\frac{1}{2}-a}} = 2^{1-2a} \cdot Cos\, a\pi.$$

Setzt man hier $\frac{1}{2}-a$ an die Stelle von a, und dividirt man die Gleichung 22. durch diese neue Gleichung, so giebt dies noch

$$23) \qquad \frac{\Phi_{a,a}}{\Phi_{\frac{1}{2}-a,\frac{1}{2}-a}} = 2^{-1-4a} \cdot Cotg\, a\pi.$$

u. s. w. f.

Ziehen wir nun noch einige Folgerungen aus der Gleichung IV., indem wir die besonderen Fälle betrachten, in denen der Fakultäten-Ausdruck zur Rechten besondere Werthe annimmt. — Nach VIII. Th. §. 105. XI. ist z. B.

$$(a-1)!\,(-a)! = \frac{\pi}{Sin\, a\pi}.$$

Setzt man daher in der II. 1—a statt c und 1—b statt k,

so giebt sie sogleich, wenn man statt $(1-a-b)!$ lieber $(1-a-b)\cdot(-a-b)!$ schreibt *),

$$24)\quad \Phi_{a,b}\cdot\Phi_{1-a,1-b} = \frac{\pi\cdot Sin(a+b)\pi}{(1-a-b)\cdot Sin\,a\pi\cdot Sin\,b\pi};$$

also ist (für $b = a$) auch noch

$$25)\quad \Phi_{a,a}\cdot\Phi_{1-a,1-a} = \frac{\pi\cdot Cotg\,a\pi}{\frac{1}{2}-a}.$$

Wird in 24.) $1-2b$ statt a gesetzt, so erhält man, wenn noch (nach N. 2.) die Zeiger vertauscht werden:

$$26)\quad \Phi_{1-2b,b}\cdot\Phi_{1-b,2b} = \frac{\pi}{b\cdot Sin\,2b\pi}.$$

Die Gleichung IV. giebt ferner mit Zuziehung des VIII. Th. §. 105. XI. unmittelbar noch (weil $b! = b\cdot(b-1)!$ ist)

$$27)\quad \Phi_{a,b}\cdot\Phi_{a+b,1-a} = \frac{\pi}{b\cdot Sin\,a\pi},$$

welche Gleichung auch unmittelbar aus der N. 12. hervorgeht, weil nach dieser

$$\Phi_{a,b}\cdot\Phi_{a+b,1-a} = \Phi_{a,1-a}\cdot\Phi_{1,b}$$

und nach NN. 3. und 4.

$$\Phi_{1,b} = \frac{1}{b} \quad \text{und} \quad \Phi_{a,1-a} = \frac{\pi}{Sin\,a\pi} \quad \text{ist.}$$

Diese Gleichung 27. geht aber für $b = a$ noch über in

---

*) Anfänger wollen sich, so lange sie mit Faktoriellen oder Fakultäten rechnen, überall nur ganze Zahlen denken und unter den Faktoriellen stets Produkte äquidifferenter Faktoren, und die Rechnungsgesetze stets aus diesem Standpunkte abstrahiren. — Ist also $1-a-b$ positiv ganz gedacht, dann ist $(-a-b)$ die nächst kleinere ganze positive Zahl, und daß das Produkt $(1-a-b)!$ der $1-a-b$ Faktoren 1, 2, 3, 4, ꝛc. allemal gleich ist dem letzten Faktor $1-a-b$ mit dem Produkte $(-a-b)!$ aller vorangegangenen Faktoren multiplicirt, fällt dann jedem von selbst in die Augen.

28) $\Phi_{a,a} \cdot \Phi_{2a,1-a} = \frac{\pi}{a \cdot Sin\, a\pi}$,

wobei natürlich dieselbe Bemerkung gemacht werden kann, wie bei der N. 27.

Findet man aus der 21) $\Phi_{a,a}$ und setzt man in ihr noch $1-a$ statt a, um $\Phi_{1-a,1-a}$ in $\Phi_{1-a,\frac{1}{2}}$ auszudrücken, und substituirt man diese Werthe in die 25.), so findet sich noch

29) $\Phi_{a,\frac{1}{2}} \cdot \Phi_{1-a,\frac{1}{2}} = \frac{\pi \cdot Cotg\, a\pi}{\frac{1}{2}-a} = \Phi_{a,a} \cdot \Phi_{1-a,1-a}$.

u. s. w. f.

Anmerkg. Wir unterlassen es, diese Eigenschaften der Phi-Funktionen noch weiter zu entwickeln, da unser Zweck erreicht ist, sobald der Anfänger sich überzeugt hat, daß alle diese Eigenschaften ganz einfache Folgerungen aus dem gefundenen Werthe

$$\Phi_{a,b} = \frac{(a-1)!\,(b-1)!}{(a+b-1)!}$$

der Funktion $\Phi_{a,b}$ sind, mit Zuziehung der Eigenschaften der Faktoriellen, welche letzteren aus den Produkten äquidifferenter Faktoren ohne Weiteres abstrahirt werden. Nirgend braucht dabei Integralrechnung in Anwendung gebracht zu werden.

§. 47.

(Von den Euler'schen Integralen erster Klasse).

Legendre hat dem Integral

$$\int_0^1 z^{a-1}(1-z^n)^{\frac{b}{n}-1} \cdot dz,$$

welches wir hier durch [a, b] bezeichnet haben und mit welchem sich Euler (und später auch Legendre selbst) auf dem Wege der Integralrechnung so viel beschäftigt hat, den Namen des Euler'schen Integrals erster Klasse gegeben. — Euler dachte sich n positiv ganz; man kann sich aber in nachstehendem n überall ganz oder gebrochen denken, nur positiv. — In dem besonderen Fall, in welchem $n = 1$ ge-

dacht wird, geht solches Integral in die Phi-Funktion $\Phi_{a,b}$ über, so daß also die Phi-Funktion der einfachste besondere Fall des Euler'schen Integrals erster Klasse ist.

Es kann aber das (allgemeinere) Euler'sche Integral erster Klasse, nämlich

I. $\quad [a, b] \quad$ oder $\quad \int_0^1 z^{a-1}(1-z^n)^{\frac{b}{n}-1} \cdot dz$

dadurch, daß man $z^n = x$ setzt, sogleich auf die Phi-Funktion (d. h. auf das einfachste derselben) zurückgebracht werden; man erhält nämlich sogleich, weil n positiv ist,

(☉)... $\quad [a, b] = \frac{1}{n} \cdot \Phi_{\frac{a}{n}, \frac{b}{n}},$

während auch im Integral $[a, b]$ die Zeiger a und b, eben so wie n positiv vorausgesetzt werden müssen, wenn das Integral nicht zu den unterbrochenen gehören soll, welche gar keinen Werth mehr haben.

Multiplicirt man die Gleichung (☉) mit n, und setzt man dann bezüglich an, bn statt a, b, so erhält man umgekehrt

(☾)... $\quad \Phi_{a,b} = n \cdot [an, bn].$

Vermöge dieser Gleichung (☾) geht nun jede Eigenschaft der Phi-Funktion, d. h. des einfachsten der Euler'schen Integrale in eine Eigenschaft der allgemeinsten Euler'schen Integrale erster Klasse über, und es entwickeln sich also diese letzteren Eigenschaften ohne alle Zuziehung von Integralrechnung. Wir schreiben nur die NN. I.—IV. und 1.—29. des §. 46. mittelst der Gleichung (☾) über, und würden dies dem Leser überlassen, wenn wir nicht die Absicht hätten bei den einzelnen Resultaten in Noten die Verfahrungsart mitzutheilen, durch welche man auf dem Wege der Integralrechnung dieselben Resultate zu finden pflegt. Man findet aber bei diesem Ueberschreiben aus §. 46. die gleichnamigen Nummern so:

II. $$[a, b] = \frac{1}{n} \cdot \frac{\left(\frac{a}{n}-1\right)!\left(\frac{b}{n}-1\right)!}{\left(\frac{a+b}{n}-1\right)!} = \frac{1}{n} \cdot \frac{\Gamma_{a:n} \cdot \Gamma_{b:n}}{\Gamma_{(a+b):n}} \text{ *)}.$$

Dann

1) $[a, b] = [b, a]$ **);

2) $$[a, b] = \frac{1}{n} \cdot \frac{\left(\frac{b}{n}-1\right)!}{\left(\frac{a}{n}\right)^{b:n|1}} = \frac{1}{n} \cdot \left(\frac{a}{n}-1\right)! \left(\frac{a+b}{n}\right)^{-a:n|1}$$

$$= \frac{1}{b} \cdot \frac{1^{b:n|1}}{\left(\frac{a}{n}\right)^{b:n|1}} = \frac{1}{b} \cdot \frac{n^{b:n|n}}{a^{b:n|n}} \text{ ***)};$$

---

*) Setzt man in der II. $n = 2$ und $b = 1$, so erhält man den besonderen Fall

$$\int_0^1 \frac{x^{a-1}}{\sqrt{1-x^2}} \cdot dx = \tfrac{1}{2} \cdot \frac{\Gamma_{\frac{1}{2}a} \cdot \Gamma_{\frac{1}{2}}}{\Gamma_{\frac{1}{2}(a+1)}};$$

und diese letztere Gleichung enthält die beiden Resultate NN. 25. und 26. des §. 11. in sich, je nachdem man $2n+1$ oder $2n+2$ statt a, und statt der Gamma-Funktionen (aus §. 42.) ihre Werthe setzt.

Dieselbe Gleichung II. liefert ferner, wenn $n = 2$ und $b = 2r+1$ gesetzt wird

$$\int_0^1 x^{a-1} \cdot (1-x^2)^{r-\frac{1}{2}} \cdot dx = \tfrac{1}{2} \cdot \frac{\Gamma_{\frac{1}{2}a} \cdot \Gamma_{r+\frac{1}{2}}}{\Gamma_{\frac{1}{2}a+r+\frac{1}{2}}}.$$

Setzt man aber hier herein abwechselnd $2n+1$ und $2n+2$ statt a, und statt der Gamma-Funktionen ihre Werthe, so zeigen sich die NN. 27. 28. des §. 11. als neue besondere Fälle der hiesigen Gleichung II.

**) Dieses Resultat 1.) fand Euler dadurch, daß er in dem Integral $[a, b]$, d. h. $\int_0^1 z^{a-1}(1-z^n)^{\frac{b}{n}-1} \cdot dz$ sogleich $1-z^n = x^n$ setzte.

***) Aus 2.) in Verbindung mit 1.) folgt, daß das allgemeinere Euler'sche Integral sich allemal durch Produkte äquidifferenter Faktoren ausdrücken läßt, so oft $\frac{b}{n}$ oder $\frac{a}{n}$ eine ganze Zahl, d. h. so oft b oder a ein Vielfaches von n ist. — Auf dem Wege der Integralrechnung wird dasselbe

3) $[a, n] = [n, a] = \frac{1}{a};$

4) $[a, n-a] = [n-a, a] = \frac{\pi}{n \cdot Sin\, a \frac{\pi}{n}};$

5) $[\tfrac{1}{2}n, \tfrac{1}{2}n] = \frac{\pi}{n}$ *);

6) $[\tfrac{1}{2}n, \tfrac{1}{2}n+a] = \frac{1^{a:n|2}}{2^{a:n|2}} \cdot \frac{\pi}{n},$

so daß dieses Integral allemal in Produkte äquidifferenter Faktoren ausgedrückt ist, so oft a ein positives Vielfaches von n, oder n selber ist;

7) $[\tfrac{1}{2}n+a, \tfrac{1}{2}n+b] = \frac{1^{a:n|2} \cdot 1^{b:n|2}}{2^{(a+b):n|2}} \cdot \frac{\pi}{n};$

8) $[n+a, n-a] = \frac{a\pi}{n^2 \cdot Sin\, a \frac{\pi}{n}};$

9) $[\tfrac{1}{2}n+a, \tfrac{1}{2}n-a] = \frac{\pi}{n \cdot Cos\, a \frac{\pi}{n}}.$

---

nachgewiesen, indem man neue Veränderliche einführt und dadurch das gegebene Integral [a, b] in andere verwandelt, die in den angegebenen Fällen allgemein, und daher auch zwischen den fraglichen Grenzen, integrirt werden können.

*) Die N. 3. findet sich auch durch unmittelbare Integration.

Die N. 4. findet Euler, indem er das Integral [a, n—a] d. h.

$\int_0^1 \frac{x^{a-1}}{(1-x^n)^{a:n}} \cdot dx$ dadurch rational macht, daß er $\frac{x^n}{1-x^n} = z^n$ setzt.

Dies giebt sogleich

$$[a, n-a] = \int_0^\infty \frac{z^{a-1}}{1+z^n} \cdot dz;$$

und dieses Integral hat (nach §. 9. N. 18.) den obigen Werth, weil hier wirklich $a<n$ vorausgesetzt ist.

Die N. 5. endlich geht aus der N. 4. für $a = \tfrac{1}{2}n$ hervor.

Uebrigens gelten alle diese Gleichungen, wenn a, b, n beliebig ganz oder gebrochen sind, wenn nur alle Zeiger (Argumente), d. h. alle Werthe von x und z in den vorkommenden, durch $[x, z]$ bezeichneten Integralen, eben so wie n positiv vorausgesetzt werden, weil sonst diese Integrale selbst gar keinen Werth mehr haben, während a und b auch negativ seyn können, und jedesmal, eben so wie n, ganz oder gebrochen.

Weiter ergiebt sich aus §. 46. durch Ueberschreiben:

$$\text{III.}\quad \frac{[a,\, b]}{[c,\, k]} = \frac{\left(\frac{a}{n}-1\right)!\left(\frac{b}{n}-1\right)!}{\left(\frac{c}{n}-1\right)!\left(\frac{k}{n}-1\right)!}\cdot\frac{\left(\frac{c+k}{n}-1\right)!}{\left(\frac{a+b}{n}-1\right)!}$$

$$= \frac{\Gamma_{a:n}\cdot\Gamma_{b:n}}{\Gamma_{c:n}\cdot\Gamma_{k:n}}\cdot\frac{\Gamma_{(c+k):n}}{\Gamma_{(a+b):n}},$$

$$\text{IV.}\quad [a,\, b]\cdot[c,\, k] = \frac{\left(\frac{a}{n}-1\right)!\left(\frac{b}{n}-1\right)!\left(\frac{c}{n}-1\right)!\left(\frac{k}{n}-1\right)!}{\left(\frac{a+b}{n}-1\right)!\left(\frac{c+k}{n}-1\right)!}$$

$$= \frac{\Gamma_{a:n}\cdot\Gamma_{b:n}\cdot\Gamma_{c:n}\cdot\Gamma_{k:n}}{\Gamma_{(a+b):n}\cdot\Gamma_{(c+k):n}}.$$

Und daraus:

$$10)\quad \frac{[a,\, b]}{[c,\, b]} = \frac{\left(\frac{a}{n}-1\right)!\left(\frac{c+b}{n}-1\right)!}{\left(\frac{c}{n}-1\right)!\left(\frac{a+b}{n}-1\right)!} = \frac{(c:n)^{b:n|1}}{(a:n)^{b:n|1}} = \frac{c^{b:n|n}}{a^{b:n|n}}$$

nach VIII. Th. §. 102. VI., welche Formel hier angewandt werden darf, weil n stets positiv gedacht wird;

$$11)\quad \frac{[a,\, b]}{[c,\, b]} = \frac{c^{b:n|n}}{a^{b:n|n}} = \frac{c^{(a-c):n|n}}{(c+b)^{(a-c):n|n}} = \frac{[c+b,\, a-c]}{[c,\, a-c]},$$

$$12)\quad [a,\, b]\cdot[a+b,\, c] = [b,\, c]\cdot[b+c,\, a] = [c,\, a]\cdot[c+a,\, b]$$

$$13)\quad = \frac{1}{n^2}\cdot\frac{\left(\frac{a}{n}-1\right)!\left(\frac{b}{n}-1\right)!\left(\frac{c}{n}-1\right)!}{\left(\frac{a+b+c}{n}-1\right)!},$$

wo überall a, b, c wie n positiv vorausgesetzt werden;

$$14)\quad [a, b] = \frac{\left(\frac{a}{n} - m\right)^{m|1}}{\left(\frac{a+b}{n} - m\right)^{m|1}} \cdot [a-nm, b]$$

$$= \frac{(a-nm)^{m|n}}{(a+b-nm)^{m|n}} \cdot [a-nm, b]$$

(nach VIII. Th. §. 102. VI.);

$$15)\quad [a, b] = \frac{\left(\frac{a}{n} - m\right)^{m|1} \cdot \left(\frac{b}{n} - p\right)^{p|1}}{\left(\frac{a+b}{n} - m - p\right)^{m+p|1}} \cdot [a-nm, b-np] \text{ *)}$$

$$= \frac{(a-nm)^{m|n} \cdot (b-np)^{p|n}}{[a+b-n(m+p)]^{m+p|n}} \cdot [a-nm, b-np];$$

$$16)\quad [a, b] = \frac{a-n}{a+b-n} \cdot [a-n, b] \text{ **)};$$

---

*) Setzt man in 14.) $\frac{1}{2}n$ statt b, ferner $a+\frac{1}{2}n$ statt a, so wie $\frac{a}{n}$ statt m, so ergiebt sich augenblicklich wieder die N. 6. — Setzt man aber in N. 15. statt a, b, m bezüglich $a+\frac{1}{2}n$, $b+\frac{1}{2}n$, $\frac{a}{n}$, so erhält man sogleich wieder die N. 7., wenn man nur jedesmal noch die N. 5. zu Hilfe nimmt.

**) Diese Reduktions-Formel findet sich durch theilweise Integration auf einem Wege, der ganz analog dem ist, der in der Note zu N. 16. des §. 46. beschrieben steht. — Aus ihr ergiebt sich aber, wenn man statt a nach und nach a—n, a—2n, ꝛc. ꝛc. a—(m—1)n setzt, und alle Gleichungen mit einander multiplicirt, die Formel 14.), so wie daraus wieder, durch das ganz analoge Verfahren die 15.). — Diese Herleitung führt jedoch zu dem Glauben, daß die Formeln 15. u. 16. nur für ganze Werthe von m und p gelten, während sie in der That auch für jeden gebrochenen Werth von m und p wahr sind.

Euler kehrt die Reduktions-Formel 16.) um, indem er zugleich a+n statt a setzt. Dadurch erhält er

$$\alpha)\quad [a, b] = \frac{a+b}{a} \cdot [a+n, b];$$

$$17) \qquad \frac{[a, n-a-c]}{[c, n-a-c]} = \frac{Sin\, c\, \frac{\pi}{n}}{Sin\, a\, \frac{\pi}{n}};$$

---

hierauf setzt er nach und nach $a+n$, $a+2n$, $a+3n$, ⋯ $a+(m-1)n$ statt a, multiplicirt alle Gleichungen mit einander und erhält dadurch die umgekehrte Formel 14.), nämlich:

$$\beta) \qquad [a, b] = \frac{(a+b)^{m|n}}{a^{m|n}} \cdot [a+nm, b].$$

Er setzt nun c statt a und hat

$$\gamma) \qquad [c, b] = \frac{(c+b)^{m|n}}{c^{m|n}} \cdot [c+nm, b].$$

Er dividirt jetzt diese beiden Gleichungen durch einander und findet:

$$\delta) \qquad \frac{[a, b]}{[c, b]} = \frac{(a+b)^{m|n} \cdot c^{m|n}}{(c+b)^{m|n} \cdot a^{m|n}} \cdot \frac{[a+nm, b]}{[c+nm, b]}.$$

Hierauf zeigt er, daß $\frac{[a+nm, b]}{[c+nm, b]} = 1$ wird für $m = \infty$; er setzt zu dem Ende $nm = w$, $x^{a+w} = t$, wodurch $(1-x^n)^{\frac{b}{n}-1} = T_t$ d. h. eine Funktion von t wird, und findet

$$[a+nm, b] = \frac{1}{a+w} \cdot \int_0^1 T \cdot dt$$

und

$$[c+nm, b] = \frac{1}{a+w} \cdot \int_0^1 T \cdot t^{\frac{c-a}{a+w}} \cdot dt;$$

und hieraus folgt die letztere Behauptung, weil für $m = \infty$, also $w = \infty$, $t^{\frac{c-a}{a+w}}$ in t^0 d. h. in 1 übergeht. — Die Formel δ. giebt daher, wenn man noch ν statt m schreibt

$$\varepsilon) \qquad \frac{[a, b]}{[c, b]} = \frac{(a+b)^{\nu|n} \cdot c^{\nu|n}}{(c+b)^{\nu|n} \cdot a^{\nu|n}} \quad \text{für} \quad \nu = \infty.$$

Man hat aber von hier aus nur noch einen Schritt zu thun, um die obige N. 10. zu erhalten, — man darf nämlich diese letztere Gleichung nur so schreiben:

18) $\frac{[a,\ a]}{[n-2a,\ a]} = 2 \cdot Cos\, a \frac{\pi}{n}$ (auch aus N. 17. für $c = n-2a$),

19) $\frac{[a,\ \frac{1}{2}n-a]}{[\frac{1}{2}n,\ \frac{1}{2}n-a]} = \frac{1}{Sin\, a\frac{\pi}{n}}$ (auch aus N. 17. für $c = \frac{1}{2}n$);

20) $$\frac{[a,\ b]}{[c,\ a+b-c]} = \frac{\left(\frac{a}{n}-1\right)!\left(\frac{b}{n}-1\right)!}{\left(\frac{c}{n}-1\right)!\left(\frac{a+b-c}{n}-1\right)!};$$

21) $$\frac{[a,\ \frac{1}{2}n+a]}{[2a,\ \frac{1}{2}n]} = \frac{[a,\ a]}{[a,\ \frac{1}{2}n]} = 2^{1-2\frac{a}{n}}\ ^{*)};$$

ζ) $$\frac{[a,\ b]}{[c,\ b]} = \frac{c^{\nu|n}}{(c+b)^{\nu|n}} : \frac{a^{\nu|n}}{(a+b)^{\nu|n}} \quad \text{für } \nu = \infty$$

und dann die Formel VIII. Th. §. 101. II. 1. (für $r = n$) zweimal anwenden.

In dieser Formel ε.) (oder ζ.) setzt Euler dann $a+c$ statt c und erhält:

$$\frac{[a,\ b]}{[a+c,\ b]} = \frac{(a+b)^{\nu|n} \cdot (a+c)^{\nu|n}}{(a+b+c)^{\nu|n} \cdot a^{\nu|n}} \quad \text{für } \nu = \infty;$$

und da dieser Ausdruck rechts sich nicht ändert, wenn man b und c mit einander vertauscht, so findet Euler dadurch die N. 12.

Uebrigens benutzt Euler später noch das Resultat ε.), indem er $c = n$ setzt und $[n,\ b] = \frac{1}{b}$ hat, um noch

η) $$[a,\ b] = \frac{(a+b)^{\nu|n} \cdot n^{\nu|n}}{(n+b)^{\nu|n} \cdot a^{\nu|n}} \cdot \frac{1}{b} \quad \text{für } \nu = \infty$$

zu erhalten, ein Resultat, welches auch aus $[a,\ b] = \frac{1}{n} \cdot \Phi_{\frac{a}{n},\frac{b}{n}}$ und $\varphi_{a,b} = \frac{1}{b} \cdot \frac{1^{b|1}}{a^{b|1}}$ (§. 46. N. 2.) hervorgeht, indem man (nach VIII. Th. §. 101. I.) statt der Faktoriellen die Werthe setzt, welche sie vorstellen. — Darauf hat aber Euler wieder die im §. 14. F. beschriebene Zerlegung von $Sin\,v$ und $Cos\,v$ in Produkte aus unendlich vielen Faktoren gebaut.

*) Diese Gleichung 21.), von welcher wir im §. 42. gezeigt haben, daß sie nichts anders als eine Transposition der Eigenschaft der Gamma-Funktion

22) $$\frac{[a,\ a]}{[a,\ \frac{1}{2}n-a]} = 2^{1-2\frac{a}{n}} \cdot Cos\, a\frac{\pi}{n}\ ^{*)};$$

---

ist, nach welcher man $\Gamma_a \cdot \Gamma_{a+\frac{1}{2}} = \Gamma_{2a} \cdot 2^{1-2a} \cdot \sqrt{\pi}$ hat, d. h. daß sie nichts weiter ist als eine Transposition der Eigenschaft $1^{2a|1} = 1^{a|2} \cdot 2^{a|2} = (\frac{1}{2})^{a|1} \cdot 1^{a|1} \cdot 2^{2a}$ (welche für Produkte äquidifferenter Faktoren von selbst in die Augen fällt), — diese Gleichung 21.) also hat man auf dem Wege der Integralrechnung wie folgt, gefunden:

Um nämlich $[a,\ a]$ d. h. $\int_0^1 x^{a-1}(1-x^n)^{\frac{a}{n}-1} \cdot dx$ umzuformen, setzt man $1-x^n = \frac{z^n}{4x^n}$, also $x = (\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{1-z^n})^{\frac{1}{n}}$. — Weil aber nun, während x von 0 an bis zu $\sqrt[n]{\frac{1}{2}}$ und weiter bis zu 1 hin stetig wächst, der neue Veränderliche z, von $z=0$ an bis zu $z=1$ hin wächst und dann von $z=1$ an bis zu $z=0$ hin wieder abnimmt, so muß (nach VIII. Th. §. 97.) das neue Integral nach z, in zwei Theile zerlegt und bei dem erstern Theil in dem Ausdrucke für x das $(-)$ Zeichen, bei dem anderen Theile aber in demselben Ausdruck für x, das $(+)$ Zeichen genommen werden, und man erhält daher

$$\int_0^1 x^{a-1}(1-x^n)^{\frac{a}{n}-1} \cdot dx$$
$$= 2^{-2\frac{a}{n}} \cdot \int_0^1 z^{a-1}(1-z^n)^{-\frac{1}{2}} \cdot dz - 2^{-2\frac{a}{n}} \cdot \int_1^0 z^a \cdot (1-z^n)^{-\frac{1}{2}} \cdot dz$$
$$= 2^{1-2\frac{a}{n}} \cdot \int_0^1 z^{a-1}(1-z^n)^{-\frac{1}{2}} \cdot dz = 2^{1-2\frac{a}{n}} \cdot [a,\ \tfrac{1}{2}n].$$

Das Uebrige geht hervor, wenn man bedenkt, daß (nach N. 12.)

$$[a,\ a] \cdot [2a,\ \tfrac{1}{2}n] = [a,\ \tfrac{1}{2}n] \cdot [a+\tfrac{1}{2}n,\ a]$$

ist.

*) Diese Gleichung hat man früher so gefunden:

Man setzt $1-x^n = x^n z^n$ und findet:

α) $$[\tfrac{1}{2}n-a, a] = \int_0^\infty \frac{z^{a-1}}{\sqrt{1+z^n}} \cdot dz.$$

Ferner setzt man

$$1-x^n = \tfrac{1}{4}z^n x^{2n}$$

$$23)\quad \frac{[a,\ a]}{[\frac{1}{2}n-a,\ \frac{1}{2}n-a]} = 2^{1-4\frac{a}{n}} \cdot Cotg\, a\frac{\pi}{n}\ ^{*)};$$

$$24)\quad [a,\ b]\cdot[n-a,\ n-b] = \frac{\frac{\pi}{n}\cdot Sin(a+b)\frac{\pi}{n}}{(n-a-b)\cdot Sin\, a\frac{\pi}{n}\cdot Sin\, b\frac{\pi}{n}}\ ^{**)};$$

woraus sich ergiebt für $b = a$:

$$25)\quad [a,\ a]\cdot[n-a,\ n-a] = \frac{2\pi\cdot Cotg\, a\frac{\pi}{n}}{n(n-2a)};$$

---

und erhält:

$$\beta)\qquad [n-2a,\ a] = 2^{-2\frac{a}{n}}\cdot\int_0^\infty \frac{z^{a-1}}{\sqrt{1+z^n}}\cdot dz.$$

Verbindet man nun diese letztere Gleichung mit der N. 18.), so erhält man:

$$\gamma)\qquad [a,\ a] = 2^{1-2\frac{a}{n}}\, Cos\, a\frac{\pi}{n}\cdot\int_0^\infty \frac{z^{a-1}}{\sqrt{1+z^n}}\cdot dz.$$

Die Gleichungen α.) und γ.) führen aber nun unmittelbar zur Gleichung 22.), wenn man noch §. 9. N. 18. zu Hilfe nimmt.

*) Man erhält diese Gleichung 23.) auch aus der 22.), indem man in letzterer $\frac{1}{2}n-a$ statt a setzt und die neue Gleichung wieder mit der 22.) verbindet.

**) Legendre sieht $[n-a,\ n-b]$ gleichsam wie das Complement von $[a,\ b]$ an. — Er findet übrigens diese Gleichung 24.) viel mühsamer als die N. 24.) im §. 46. gefunden worden, in so ferne sich die letztere dort von selbst macht. Er folgert nämlich aus der N. 12.)

$$[a,\ b]\cdot[a+b,\ n-a-b] = [a,\ n-a-b]\cdot[n-b,\ b]$$

und

$$[a,\ n-a-b]\cdot[n-b,\ n-a] = [a,\ n-a]\cdot[n,\ n-a-b];$$

daher ist, wenn man beide Gleichungen mit einander multiplicirt (nach N. 1.)

$$[a,\ b]\cdot[a+b,\ n-a-b]\cdot[n-a,\ n-b] = [n-b,\ b]\cdot[a,\ n-a]\cdot[n,\ n-a-b];$$

und hieraus ergiebt sich dann die N. 24.), wenn man hier herein statt $[n,\ n-a-b]$, $[a,\ n-a]$, $[a+b,\ n-a-b]$ und $[a,\ n-a]$ ihre Werthe aus den Nummern 3.) und 4.) substituirt.

oder, wenn man in 24.) n—2b statt a setzt:

$$26)\quad [n-2b,\ b]\cdot[n-b,\ 2b] = \frac{\pi}{nb\cdot Sin\, 2b\frac{\pi}{n}};$$

$$27)\quad [a,\ b]\cdot[a+b,\ n-a] = \frac{\pi}{nb\cdot Sin\, a\frac{\pi}{n}}\ ^{*)};$$

und (für b = a):

$$28)\quad [a,\ a]\cdot[2a,\ n-a] = \frac{\pi}{na\cdot Sin\, a\frac{\pi}{n}} = [a,\ n-a]\cdot[a,\ n]$$

$$29)\quad [a,\ \tfrac{1}{2}n]\cdot[n-a,\ \tfrac{1}{2}n] = \frac{2\pi\cdot Cotg\, a\frac{\pi}{n}}{n(n-2a)} = [a,\ a]\cdot[n-a,\ n-a].$$

U. s. w. f.

Anmerkg. 1. Daß man die Integrale alle, folglich auch die Euler'schen, auf dem Wege der Integralrechnung noch mannichfaltig umformen kann, versteht sich dabei von selbst. Namentlich hat Euler $1-x^n = x^n z^n$ gesetzt und hat dadurch ohne Weiteres erhalten

$$1)\quad [\tfrac{1}{2}n-a,\ a] = \int_0^\infty \frac{z^{a-1}}{\sqrt{1+z^n}}\cdot dz;$$

derselbe hat ferner $1-x^n = \frac{1}{4}z^n x^{2n}$ gesetzt, und erhalten

$$2)\quad [n-2a,\ a] = 2^{-2\frac{a}{n}}\cdot\int_0^\infty \frac{z^{a-1}}{\sqrt{1+z^n}}\cdot dz.$$

Und da das Integral links in N. 1. sich nicht ändert, wenn $\frac{1}{2}n-a$ statt a gesetzt wird, so giebt dies noch

$$3)\quad [\tfrac{1}{2}n-a,\ a] = \int_0^\infty \frac{z^{a-1}}{\sqrt{1+z^n}}\cdot dz = \int_0^\infty \frac{z^{\frac{1}{2}n-a-1}}{\sqrt{1+z^n}}\cdot dz.$$

---

*) Nach N. 12. ist $[a,\ b]\cdot[a+b,\ n-a] = [a,\ n-a]\cdot[n,\ b]$ und daraus, mit Zuziehung der NN. 3. 4. ergiebt sich die N. 27. ohne Weiteres.

Läßt man aber mit dieser N. 3. noch die NN. 22. u. 23. in Verbindung treten, so erhält man weiter:

$$4)\qquad [a, a] = 2^{1-2\frac{a}{n}} Cos\, a\frac{\pi}{n} \cdot \int_0^\infty \frac{z^{a-1}}{\sqrt{1+z^n}} \cdot dz$$

und

$$5)\qquad [a, \tfrac{1}{2}n] = Cos\, a\frac{\pi}{n} \cdot \int_0^\infty \frac{z^{a-1}}{\sqrt{1+z^n}} \cdot dz.$$

Anmerkg. 2. Euler hat sich dieser verschiedenen Formeln bedient, um die Integrale [a, b] für ganze positive Werthe von a und b, auf die möglich kleinste Zahl derselben zurückzuführen. Die Formel N. 14. (oder N. 15.) führt jedes solche Integral [a, b] sogleich auf die Fälle zurück, in denen a und b, $\overline{\overline{<}}$ n sind. — So oft a oder b, $=$ n ist, so oft ist [a, b] (nach N. 3.) ausgewerthet, — und so oft $a+b = n$ ist, giebt die N. 4. die Auswerthung. — Es bleiben daher nur noch die Fälle übrig, in denen a und b, $<$n und nicht $a+b = n$ ist. — Er geht zu dem Ende das Integral [a, b] einzeln durch für die Fälle, wo $n = 2$, $n = 3$, $n = 4$ ist, u. s. w., d. h. er betrachtet nach und nach die Integrale

$$\int_0^1 \frac{x^{a-1}}{\sqrt{(1-x^2)^{2-b}}} \cdot dx, \quad \int_0^1 \frac{x^{a-1}}{\sqrt[3]{(1-x^3)^{3-b}}} \cdot dx,$$

$$\int_0^1 \frac{x^{a-1}}{\sqrt[4]{(1-x^4)^{4-b}}} \cdot dx, \quad \text{u. s. w.}$$

(unter der Voraussetzung, daß a und b positiv ganz und bei'm erstern <2, bei'm zweiten <3, bei'm dritten <4, u. s. f. sind, und daß auch bei'm ersten nicht $a+b = 2$, bei'm zweiten nicht $a+b = 3$, bei'm dritten nicht $a+b = 4$ u. f. ist, weil für diese Fälle die Integrale bereits als ausgewerthet angesehen werden), wendet vorzugsweise die Formel N. 12. an, und es gelingt ihm für jeden einzelnen Werth von n, das Integral [a, b] für alle ganzen positiven Werthe

von a und b, auf eine Anzahl von $\frac{n-1}{2}$ oder $\frac{n-2}{2}$ derselben zurückzuführen, je nachdem n ungerade oder gerade ist, welche letzteren dann entweder einer weiteren Reduktion entgegensehen, mittelst der übrigen Formeln, oder als solche angesehen werden müssen, die auf anderem Wege noch ihre Auswerthung erwarten. Euler wählte zu solchen, in welche die übrigen alle ausgedrückt werden können, die Fälle

$$[n-2, 1], \quad [n-3, 2], \quad [n-4, 3] \cdots$$
$$\left[\frac{n-1}{2}, \frac{n-1}{2}\right] \text{ oder } [\tfrac{1}{2}n, \tfrac{1}{2}n-1],$$

(je nachdem n ungerade oder gerade ist), in denen die Summe der Argumente (Zeiger) $= n-1$ ist.

Aber erst Legendre brachte (in seinen Exercises de Calcul intégral) diese für einzelne Werthe von n gemachte Wahrnehmung Euler's in allgemeine Formeln, und zwar wie folgt: Bezeichnet man, der Kürze wegen, das Integral $[n-1-q, q]$, in welchem die Summe der Zeiger (Argumente) $= n-1$ ist, durch φ_q, so daß man hat

$$1) \qquad \varphi_q = [n-q-1, q] = \int_0^1 \frac{x^{n-q-2}}{\sqrt[n]{(1-x^n)^{n-q}}} \cdot dx,$$

so kommt also alles darauf an, alle übrigen Integrale $[a, b]$ auf diese durch φ bezeichneten zurückzuführen. — Die N. 12. des §. 47. giebt aber

$$2) \qquad [n-p-k, p] = \frac{[n-p-k, 1]}{[n-k, 1]} \cdot [n-p-k+1, p],$$

wodurch $[n-p-k, p]$ auf $[n-p-k+1, p]$ zurückgeführt ist, sobald man nur diejenigen der Integrale $[a, b]$, welche das Argument 1 haben, in φ ausdrückt. Dies letztere geschieht aber so: Dieselbe Gleichung 2.) giebt für $k = 1$,

$$3) \qquad [n-p-1, 1] = \frac{[n-p-1, p] \cdot [n-1, 1]}{[n-p, p]};$$

oder, wenn man statt $[n-1, 1]$ und $[n-p, p]$ ihre Werthe (aus N. 4.) und, der Kürze wegen, $\frac{\pi}{n} = w$ setzt:

$$4) \qquad [n-p-1, 1] = \varphi_p \cdot \frac{Sin\, pw}{Sin\, w},$$

wodurch das zuletzt Verlangte erreicht ist. Die Gleichung 2.) geht dadurch über in

$$5) \qquad \frac{[n-p-k, p]}{[n-p-k+1, p]} = \frac{\varphi_{p+k-1}}{\varphi_{k-1}} \cdot \frac{Sin(p+k-1)w}{Sin(k-1)w}.$$

Setzt man nun hier herein statt k nach und nach k—1, k—2, k—3, ⋯ zuletzt 3 und 2, und multiplicirt man alle entstehenden Gleichungen mit einander und mit der 5.), so findet sich

$$\text{I.} \quad \left. \begin{array}{l} [n-p-k, p] = \varphi_p \cdot \dfrac{\varphi_{p+1} \cdot \varphi_{p+2} \cdot \varphi_{p+3} \cdots \varphi_{p+k-1}}{\varphi_1 \cdot \varphi_2 \cdot \varphi_3 \cdots \varphi_{k-1}} \\ \qquad \times \dfrac{Sin(p+1)w \cdot Sin(p+2)w \cdots Sin(p+k-1)w}{Sin\, w \cdot Sin\, 2w \cdots Sin(k-1)w} \end{array} \right\}.$$

Durch diese Formel I. ist nun das Integral $[a, b]$ auf die durch φ bezeichneten Fälle zurückgebracht, so oft $a+b = n-k$ und k positiv ist. — Jetzt braucht man noch eine analoge Formel, durch welche derselbe Zweck erreicht ist, wenn $a+b = n+k$ und wiederum k positiv ist. Diese letztere wird nun auf analoge Weise gefunden. Die N. 12. des §. 47. giebt nämlich noch

$$6) \qquad \frac{[n-p+k+1, p]}{[n-p+k, p]} = \frac{[n+k, 1]}{[n-p+k, 1]} = \frac{[k, 1]}{[n-p+k, 1]} \cdot \frac{k}{k+1},$$

in so ferne (nach §. 47. N. 5.) $[n+k, 1] = \frac{k}{k+1} \cdot [k, 1]$ ist. — Wendet man nun hier (in 6.) die Gleichung 4.) an, indem man daselbst einmal $n-k-1$, nachher aber $p-k-1$ statt p setzt, und bedenkt man, daß $(n-q)w = \pi - qw$ und auch $\varphi_{n-q} = \varphi_{q-1}$ ist (nach N. 2. des §. 47.), so findet sich sogleich

$$7) \qquad \frac{[n-p+k+1, p]}{[n-p+k, p]} = \frac{k}{k+1} \cdot \frac{\varphi_k}{\varphi_{p-k-1}} \cdot \frac{Sin(k+1)w}{Sin(p-k-1)w}.$$

Wird nun hier statt k nach und nach 1, 2, 3, ... k—1 gesetzt, und werden die entstehenden Gleichungen mit einander multiplicirt, so giebt dies

$$8)\quad \frac{[n-p+k,\,p]}{[n-p+1,\,p]} = \frac{1}{k}\cdot\frac{\varphi_1\cdot\varphi_2\cdot\varphi_3\cdots\varphi_{k-1}}{\varphi_{p-2}\cdot\varphi_{p-3}\cdots\varphi_{p-k}}\cdot \times\frac{Sin\,2w\cdot Sin\,3w\cdots Sin\,kw}{Sin\,(p-2)w\cdot Sin\,(p-3)w\cdots Sin\,(p-k)w},$$

so daß nur noch $[n-p+1,\,p]$ in φ auszudrücken bleibt. Man hat aber aus 6.) für $k = 0$

$$9)\quad \frac{[n-p+1,\,p]}{[n-p,\,p]} = \frac{[n,\,1]}{[n-p,\,1]};$$

bedenkt man nun, daß nach §. 47. NN. 3. 4. $[n,\,1] = 1$ und $[n-p,\,p] = \dfrac{\pi}{n\cdot Sin\,p\frac{\pi}{n}} = \dfrac{w}{Sin\,pw}$ ist, so giebt diese Gleichung 9.) mittelst der 4.) sogleich noch:

$$\text{II.}\quad [n-p+1,\,p] = \frac{1}{\varphi_{p-1}}\cdot\frac{Sin\,w}{Sin\,(p-1)w}\cdot\frac{w}{Sin\,pw};$$

und dadurch geht die Gleichung 8.) sogleich über in

$$\text{III.}\quad [n-p+k,\,p] = \frac{1}{k}\cdot\frac{\varphi_1\cdot\varphi_2\cdot\varphi_3\cdots\varphi_{k-1}}{\varphi_{p-1}\cdot\varphi_{p-2}\cdots\varphi_{p-k+1}\cdot\varphi_{p-k}} \times\frac{w\cdot Sin\,w\cdot Sin\,2w\cdots Sin\,kw}{Sin\,pw\cdot Sin\,(p-1)w\cdots Sin\,(p-k)w}.$$

Mittelst der Gleichungen I. II. u. III. sind aber alle Integrale $[a,\,b]$, in denen a und b ganz und $<n$ sind, auf die durch φ bezeichneten Fälle derselben zurückgeführt, während $\varphi_q = [n-q-1,\,q]$ d. h. derjenige Fall des allgemeinen Euler-schen Integrals $[a,\,b]$ erster Klasse ist, in welchem die Summe beider Argumente $= n-1$ ist.

Mittelst der übrigen Reduktionsformeln kann man dann z. B., wenn n gerade ist, alle Integrale $[a,\,b]$ auf $\frac{n}{4}$ oder $\frac{n-2}{4}$ einfachste derselben zurückführen; Legendre hat

namentlich für n = 3, 6, 8 und 12, auf diesem Wege (S. Exercises de Calc. intégral) alle Integrale [a, b] auf elliptische Transcendenten zurückgeführt.

§. 48.

So wie durch die Gleichungen

$$\Phi_{a,b} = \frac{\Gamma_a \cdot \Gamma_b}{\Gamma_{a+b}} \quad \text{und} \quad [a, b] = \frac{1}{n} \cdot \Phi_{\frac{a}{n}, \frac{b}{n}} = \frac{1}{n} \cdot \frac{\Gamma_{\frac{a}{n}} \cdot \Gamma_{\frac{b}{n}}}{\Gamma_{\frac{a+b}{n}}}$$

die Euler'schen Integrale erster Klasse in die der zweiten Klasse ausgedrückt sind, so kann man auch umgekehrt, wenn $\frac{m}{n}$ irgend eine (ganze oder) gebrochene positive Zahl ist, das Euler'sche Integral zweiter Klasse $\Gamma_{\frac{m}{n}}$ wieder bloß durch Euler'sche Integrale erster Klasse ausdrücken.

Denkt man nämlich an den Satz der Faktoriellen VIII. Th. §. 108. XXI., nach welchem

$$1) \qquad b^{nc|1} = b^{c|n} \cdot (b+1)^{c|n} \cdot (b+2)^{c|n} \cdots (b+n-1)^{c|n}$$
$$= n^{nc} \cdot \left(\frac{b}{n}\right)^{c|1} \cdot \left(\frac{b+1}{n}\right)^{c|1} \cdot \left(\frac{b+2}{n}\right)^{c|1} \cdots \left(\frac{b+n-1}{n}\right)^{c|1}$$

ist, und welcher für ganze Werthe von n und c von selbst in die Augen fällt, aber auch noch für gebrochene Werthe von c gilt, und welcher nach dem Satze

$$2) \qquad a^{p|1} = \frac{(a+p-1)!}{(a-1)!} = \frac{\Gamma_{a+p}}{\Gamma_a}$$

und wenn man noch $a-\frac{b}{n}$ statt c schreibt, übergeht in

$$3) \qquad \frac{\Gamma_b}{\Gamma_{na}} \cdot n^{na-b} = \frac{\Gamma_{\frac{b}{n}} \cdot \Gamma_{\frac{b+1}{n}} \cdots \Gamma_{\frac{b+n-1}{n}}}{\Gamma_a \cdot \Gamma_{a+\frac{1}{n}} \cdots \Gamma_{a+\frac{n-1}{n}}}; \text{—}$$

denkt man also an das Daseyn dieser Gleichung, so wird man bewogen, in der obigen Gleichung

4) $$[a, b] = \frac{1}{n} \cdot \frac{\Gamma_{\frac{a}{n}} \cdot \Gamma_{\frac{b}{n}}}{\Gamma_{\frac{a+b}{n}}}$$

statt a nach und nach $1, 2, 3, \cdots n-1$, statt b aber stets m zu setzen, diese $n-1$ Gleichungen mit einander zu multipliciren, rechts aber die vorstehende Gleichung 3. anzuwenden (indem man in letzterer $\frac{m+1}{n}$ statt a, und 1 statt b setzt) und man erhält sogleich (weil noch $\Gamma_{\frac{m}{n}+1} = \frac{m}{n} \cdot \Gamma_{\frac{m}{n}}$ und $\Gamma_{m+1} = m \cdot \Gamma_m$ ist)

5) $$[1, m] \cdot [2, m] \cdot [3, m] \cdots [n-1, m] = \frac{\left(\Gamma_{\frac{m}{n}}\right)^n \cdot n^{m-n}}{\Gamma_m},$$

während $\Gamma_m = (m-1)! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (m-1)$ ist, in so ferne m wie n positiv ganz gedacht werden. Daher findet man endlich:

I. $$\Gamma_{\frac{m}{n}} = \left(n^{n-m} \cdot (m-1)!\, [1, m] \cdot [2, m] \cdot [3, m] \cdots [n-1, m]\right)^{\frac{1}{n}}$$

oder

II. $$\Gamma_{\frac{m}{n}} = \left(n^{1-m} \cdot (m-1)!\, \Phi_{\frac{1}{n}, \frac{m}{n}} \cdot \Phi_{\frac{2}{n}, \frac{m}{n}} \cdots \Phi_{\frac{n-1}{n}, \frac{m}{n}}\right)^{\frac{1}{n}}.$$

Auch dieses Resultat I. hat Euler zunächst in den einzelnen Fällen, wo $n = 2$, $n = 3$, ꝛc. ꝛc. ist, bereits gefunden und danach hat sich dann später das allgemeine Resultat herausgestellt. Nach der hiesigen Darstellung reiht sich aber diese Formel eben so ungesucht als einfach an eines der wenigen Gesetze der Faktoriellen an.

§. 49.

Setzt man in dem Integral

$$\Phi_{a,b} = \int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1} \cdot dx$$

statt x lieber $(Sin\, z)^2$ oder $(Cos\, z)^2$, so erhält man noch

$$\text{I.}\quad \Phi_{a,b} = 2\int_0^{\frac{1}{2}\pi}(Sin\,z)^{2a-1}\cdot(Cos\,z)^{2b-1}\cdot dz$$
$$= 2\int_0^{\frac{1}{2}\pi}(Cos\,z)^{2a-1}\cdot(Sin\,z)^{2b-1}\cdot dz,$$

also auch

$$\text{II.}\quad \int_0^{\frac{1}{2}\pi}(Sin\,z)^{a-1}\cdot(Cos\,z)^{b-1}\cdot dz = \tfrac{1}{2}\Phi_{\frac{1}{2}a,\frac{1}{2}b} = \tfrac{1}{2}\frac{\Gamma_{\frac{1}{2}a}\cdot\Gamma_{\frac{1}{2}b}}{\Gamma_{\frac{1}{2}(a+b)}},$$

wenn nur überall a und b positiv gedacht sind, übrigens ganz oder gebrochen.

Denkt man sich aber a und b positiv ganz, und unterscheidet man die 3 Fälle, wo a und b beide ungerade oder a und b beide gerade, oder endlich wo die eine Zahl ungerade die andere gerade ist, so gehen aus II. noch unmittelbar hervor, wenn man die Formel §. 42. N. 10. zu Hilfe nimmt:

$$101)\quad \int_0^{\frac{1}{2}\pi}(Sin\,z)^{2m}\cdot(Cos\,z)^{2n}\cdot dz = \frac{1^{m|2}\cdot 1^{n|2}}{2^{m+n|2}}\cdot\tfrac{1}{2}\pi;$$

$$102)\quad \int_0^{\frac{1}{2}\pi}(Sin\,z)^{2m+1}\cdot(Cos\,z)^{2n+1}\cdot dz = \tfrac{1}{2}\cdot\frac{m!\;n!}{(m+n+1)!}$$
$$= \frac{2^{m|2}\cdot 2^{n|2}}{4^{m+n|2}};$$

$$103)\int_0^{\frac{1}{2}\pi}(Sin\,z)^{2m+1}\cdot(Cos\,z)^{2n}\cdot dz = \int_0^{\frac{1}{2}\pi}(Cos\,z)^{2m+1}\cdot(Sin\,z)^{2n}\cdot dz$$
$$= \frac{2^{m|2}\cdot 1^{n|2}}{3^{m+n|2}};$$

wo m und n positiv ganz oder der Null gleich gedacht sind.

Setzt man in 101.) und 103.) $n = 0$, so erhält man die besonderen Formeln §. 13. NN. 34. u. 35. wieder. — Setzt man in 101.) u. 103.) $Sin\,z = x$, so gehen sie in die Formeln 27. u. 28. des §. 11. über, während die 102.) eben dadurch in

$$\int_0^1 x^{2m+1}\cdot(1-x^2)^n\cdot dx = \frac{2^{m|2}\cdot 2^{n|2}}{4^{m+n|2}}$$

übergeht, wo m und n positiv ganz oder Null sind. Diese letztere Formel giebt, wenn man links den binomischen Lehrsatz anwendet und wirklich integrirt, zu einer merkwürdigen Summation einer endlichen Reihe die Gelegenheit.

Anmerkg. Mittelst der Gleichung II. kann man auch eine größere Anzahl anderer trigonometrischer Integrale in Phi-Funktionen, also auch in Gamma-Funktionen, demnach auch in (gebrochenen) Fakultäten ausdrücken.

§. 50.

Macht man die Bemerkung, daß, wenn man $x = \frac{1}{y}$ setzt,

$$\int_{+0}^{1} \frac{1}{x^{r+2} \cdot \left(x^q + \frac{1}{x^q}\right)^p} \cdot dx = \int_{1}^{\infty} \frac{x^r}{\left(x^q + \frac{1}{x^q}\right)^p} \cdot dx$$

erhalten wird, so folgt daraus sogleich durch Zerlegung und neue Zusammensetzung

$$\text{I.} \quad \int_{+0}^{1} \frac{x^r + \frac{1}{x^{r+2}}}{\left(x^q + \frac{1}{x^q}\right)^p} \cdot dx = \int_{+0}^{\infty} \frac{x^r}{\left(x^q + \frac{1}{x^q}\right)^p} \cdot dx$$

$$= \int_{+0}^{\infty} \frac{x^{r+pq}}{(1+x^{2q})^p} \cdot dx = \frac{1}{2q} \cdot \int_{0}^{\infty} \frac{z^{\frac{r+pq+1}{2q} - 1}}{(1+z)^p} \cdot dz \text{ *)}$$

$$\text{(nach §. 41. II.)} \quad = \frac{1}{2q} \cdot \Phi_{\frac{r+pq+1}{2q}, \frac{-r+pq-1}{2q}},$$

wo, während p, q, r positiv vorausgesetzt werden, auch $pq-r-1$ positiv seyn muß.

Da ferner $\partial\left(x^q - \frac{1}{x^q}\right)_x = q\left(x^{q-1} + \frac{1}{x^{q+1}}\right)$

und $x^{2q} + \frac{1}{x^{2q}} = \left(x^q - \frac{1}{x^q}\right)^2 + 2$

ist, so folgt noch, wenn man $x^q - \frac{1}{x^q} = -z$ setzt, damit $z = \infty$ werde für $x = +0$, und $z = 0$ für $x = 1$

---

*) Indem man $x^{2q} = z$ setzt.

$$\text{II.}\quad \int_{+0}^{1} \frac{\left(x^{q-1}+\frac{1}{x^{q+1}}\right)\cdot\left(x^{q}-\frac{1}{x^{q}}\right)^{r}}{\left(x^{2q}+\frac{1}{x^{2q}}\right)^{p}}\cdot dx = \frac{1}{q}\cdot\int_{0}^{\infty}\frac{(-1)^{r}\cdot z^{r}}{(2+z^{2})^{p}}\cdot dz$$

$$= \frac{(-1)^{r}}{2^{p}\cdot q}\cdot\int_{0}^{\infty}\frac{z^{r}}{(1+\frac{1}{2}z^{2})^{p}}\cdot dz = \frac{(-1)^{r}}{2^{p-\frac{1}{2}(r-1)}\cdot q}\cdot\int_{0}^{\infty}\frac{y^{\frac{1}{2}(r-1)}}{(1+y)^{p}}\cdot dy\,^{*)}$$

$$= \frac{(-1)^{r}}{2^{p-\frac{1}{2}(r-1)}\cdot q}\cdot \Phi_{\frac{1}{2}(r+1),\; p-\frac{1}{2}(r+1)}$$

wenn $r+1$ positiv ist, und $p>\frac{1}{2}(r+1)$.

Diese Beispiele zeigen, daß viele Integrale, denen man es nicht immer bei dem ersten Blicke ansieht, doch nichts anders als Phi-Funktionen und mit diesen zugleich ausgewerthet sind. Wir haben aber gerade diese beiden Beispiele gewählt, weil sich zwischen Ausdrücken von der Form dieser (Differenzial-) Funktionen Gleichungen aufstellen lassen, und diese letzteren daher, wenn man auf beiden Seiten die Integrale zwischen den Grenzen 0 und 1 nimmt, in Gleichungen zwischen Phi-Funktionen, also auch in Gleichuugen zwischen Gamma-Funktionen d. h. in Gleichungen zwischen (gebrochenen) Fakultäten übergehen.

Gehen wir z. B. von der bekannten Gleichung aus **):

$$1)\quad Cos(2m+1)v = Cos\,v\cdot S\left[(-1)^{a}\cdot\frac{(m+a)^{2a|-1}}{(2a)!}\,(2\,Sin\,v)^{2a}\right],$$

welche Reihe zur Rechten aus $m+1$ Gliedern besteht, in so ferne die folgenden Glieder (wo $a>m$) der Null gleich werden. Setzt man nun

$$2)\quad e^{v\cdot i} = Cos\,v+i\cdot Sin\,v = x,$$

so ist

$$3)\quad e^{-v\cdot i} = Cos\,v-i\cdot Sin\,v = \frac{1}{x},$$

$$4)\quad e^{(2m+1)v\cdot i} = Cos(2m+1)v+i\cdot Sin(2m+1)v = x^{2m+1},$$

---

*) Indem man $\frac{1}{2}z^{2} = y$ setzt.

**) Diese Gleichung mit allen zusammengehörigen findet man in der Xten der Leçons sur la théorie des fonctions p. Lagrange.

$$5)\quad e^{-(2m+1)v\cdot i} = Cos(2m+1)v - i\cdot Sin(2m+1)v = \frac{1}{x^{2m+1}},$$

also

$$6)\quad Cos(2m+1)v = \tfrac{1}{2}\left(x^{2m+1} + \frac{1}{x^{2m+1}}\right),$$

$$7)\quad 2\,Cos\,v = x + \frac{1}{x},$$

$$8)\quad 2\,Sin\,v = -i\cdot\left(x - \frac{1}{x}\right).$$

Substituirt man diese Werthe in die Gleichung 1.), so geht sie über, wenn man noch durch x dividirt, in

$$9)\quad x^{2m} + \frac{1}{x^{2m+2}} = S\left[\frac{(m+a)^{2a|-1}}{(2a)!}\left(x - \frac{1}{x}\right)^{2a}\left(1 + \frac{1}{x^2}\right)\right].$$

Dividirt man nun auf beiden Seiten durch $\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right)^p$ und integrirt man dann links und rechts nach x zwischen den Grenzen 0 und 1, so ergiebt sich sogleich, wenn man links die I., rechts aber die II. zu Hilfe nimmt und noch mit $2^{p-\frac{1}{2}}$ multiplicirt:

$$\text{III.}\quad 2^{p-\frac{3}{2}}\cdot \Phi_{\frac{1}{2}m+\frac{1}{2}p+\frac{1}{4},\,-\frac{1}{2}m+\frac{1}{2}p-\frac{1}{4}} = S\left[\frac{(m+a)^{2a|-1}2^a}{(2a)!}\cdot\Phi_{a+\frac{1}{2},\,p-a-\frac{1}{2}}\right]$$

wo $p > m+\frac{1}{2}$ gedacht werden muß, damit jeder Zeiger der Phi-Funktion positiv wird. Dabei kann p beliebig gebrochen oder ganz gedacht werden, wenn nur m positiv ganz ist, so daß die Reihe rechts aus $m+1$ Gliedern besteht. — Diese Gleichung III. ist nun abermals eine Eigenschaft der Phi-Funktion.

Man gehe, um noch ein Beispiel zu geben, von einer andern der angeführten trigonometrischen Relationen aus, z. B. von (S. die angeführte Stelle des Lagrange Calcul des fonct.)

$$10)\quad \frac{2\,Cos(2m+1)v}{2m+1} = S\left[(-1)^{m+a}\cdot\frac{(m+a)^{2a|-1}}{(2a+1)!}\cdot(2\,Cos\,v)^{2a+1}\right].$$

Setzt man nun hier herein wieder die Werthe aus 2.—7.) und multiplicirt man noch mit $\frac{(-1)^m}{x}$, so ergiebt sich

$$11)\quad \frac{(-1)^m}{2m+1}\left(x^{2m}+\frac{1}{x^{2m+2}}\right)$$
$$= S\left[(-1)^a\cdot\frac{(m+a)^{2a|-1}}{(2a+1)!}\left(x+\frac{1}{x}\right)^{2a}\left(1+\frac{1}{x^2}\right)\right].$$

Wird nun diese Gleichung mit $\left(x+\frac{1}{x}\right)^p$ multiplicirt, und integrirt man dann links und rechts nach x, zwischen den Grenzen 0 und 1, so ergiebt sich (mit Anwendung der I.), wenn man noch §. 46. N. 16. benutzt, nach welcher Gleichung

$$\varPhi_{s+1,\,s} = \tfrac{1}{2}\varPhi_{s,\,s}$$

ist:

$$\text{IV.}\quad \frac{(-1)^m}{2m+1}\cdot\varPhi_{\frac{1}{2}(p-1)+m,\ \frac{1}{2}(p-1)-m}$$
$$= S\left[(-1)^a\cdot\frac{(m+a)^{2a|-1}}{(2a+1)!}\cdot\varPhi_{\frac{1}{2}(p-1)-a,\ \frac{1}{2}(p-1)-a}\right],$$

wo die Reihe rechts $m+1$ Glieder hat und wo $p>2m+1$ gedacht werden muß (übrigens ganz oder gebrochen), damit die Zeiger der Phi-Funktionen alle positiv werden.

Wendet man auf die Gleichung III. die Formel

$$\varPhi_{a,b} = \frac{\Gamma_a\cdot\Gamma_b}{\Gamma_{a+b}}$$

an, und multiplicirt man solche noch mit Γ_p, so formt sie sich so um:

$$\text{V.}\quad 2^{p-\frac{3}{2}}\cdot\Gamma_{\frac{1}{2}m+\frac{1}{2}p+\frac{1}{4}}\cdot\Gamma_{-\frac{1}{2}m+\frac{1}{2}p-\frac{1}{4}}$$
$$= S\left[\frac{(m+a)^{2a|-1}\cdot 2^a}{(2a)!}\cdot\Gamma_{p-\frac{1}{2}-a}\cdot\Gamma_{\frac{1}{2}+a}\right],$$

wo $p>m+\frac{1}{2}$ vorausgesetzt werden muß, während wir m entweder Null oder positiv ganz uns denken, und p beliebig ganz oder gebrochen gedacht werden kann. — Die Reihe rechts hat $m+1$ Glieder.

Und weil (nach §. 49. N. 10. und VIII. Th. §§. 99. 100.)

$$\Gamma_{\frac{1}{2}+a} = \frac{1^{a|2}}{2^a}\cdot\sqrt{\pi}$$

und $$(2a)! = 1^{a|2}\cdot 2^{a|2}$$

ist, so geht die Gleichung V., wenn man noch $p-\frac{1}{2}=\mu$ setzt, auch noch über in

$$\text{VI.}\qquad \frac{2^{\mu-1}}{\sqrt{\pi}}\cdot\Gamma_{\frac{1}{2}m+\frac{1}{2}\mu+\frac{1}{2}}\cdot\Gamma_{-\frac{1}{2}m+\frac{1}{2}\mu}=S\left[\frac{(m+a)^{2a|-1}}{2^{a|2}}\cdot\Gamma_{\mu-a}\right],$$

wo μ ganz oder gebrochen seyn kann, aber größer als m seyn muß, während m entweder 0 oder positiv ganz vorausgesetzt ist. — Für $m=0$ und $\frac{1}{2}\mu=a$ steckt hierin auch wieder die Formel §. 42. N. 15. *).

Setzt man in der IV. noch $2\mu+1$ statt p, so nimmt sie die Form an:

$$\text{VII.}\qquad \frac{(-1)^m}{2m+1}\cdot\Phi_{\mu+m,\,\mu-m}=S\left[(-1)^a\frac{(m+a)^{2a|-1}}{(2a+1)!}\cdot\Phi_{\mu-a,\,\mu-a}\right],$$

wo die Reihe rechts $m+1$ Glieder hat und μ positiv ganz oder gebrochen seyn kann, aber größer als m seyn muß **).

Wird in VI. und VII. μ positiv ganz gedacht, so lassen sich die Phi-Funktionen wie die Gamma-Funktionen in Produkte äquidifferenter Faktoren ausdrücken und dann gehen die Gleichungen VI. und VII. in gewöhnliche algebraische Relationen über.

Endlich wissen wir zur Genüge, daß und wie eine Gleichung zwischen Phi-Funktionen allemal sogleich in eine Gleichung zwischen Gamma-Funktionen übertragen werden kann, so daß wir diese Uebertragung hier nicht weiter vornehmen wollen.

Anmerkg. Dagegen mag am Schlusse noch eine wichtige Bemerkung stehen.

Wenn eine solche, auf dem Wege der Integral-Rechnung gefundene Vergleichung der Phi-Funktionen (entweder dadurch, daß man überall

---

*) Die Gleichung VI. ist zugleich diejenige, welche in Schlömilch's „Analytischen Studien" 1te Abtheil. pag. 25. N. 5. als Eigenschaft der Gamma-Funktion hingestellt ist.

**) Auch die Gleichung VII. findet sich in derselben so eben angeführten Schrift (pag. 30. N. 6.) sobald man hier die Phi-Funktionen in Gamma-Funktionen ausdrückt.

$$\frac{(x-1)!\,(z-1)!}{(x+z-1)!} \text{ statt } \Phi_{x,z}$$

schreibt, oder dadurch, daß man zuerst $\frac{\Gamma_x \cdot \Gamma_z}{\Gamma_{x+z}}$ statt $\Phi_{x,z}$ setzt und dann in der entstehenden Vergleichung der Gamma-Funktionen statt letzterer wieder ihre Werthe in Faktoriellen ausgedrückt schreibt) in eine Vergleichung zwischen Faktoriellen (oder vielmehr Fakultäten) übergegangen ist, — so können allemal noch die Fragen gestellt werden:

1) Gelten diese letzteren nicht auch ohne die Beschränkung, daß die Zeiger oder Argumente der entsprechenden Gamma-Funktionen gerade positiv seyn müssen, wenn nur die Gamma-Funktionen nach der Formel $\Gamma_z = (z-1)!$ in Fakultäten umgeformt worden sind?

2) Wie lassen sich dieselben Gleichungen ohne Zuziehung von Integral-Rechnung bloß aus der Theorie der Faktoriellen ableiten, so daß ihre allgemeinere Gültigkeit dann sich von selbst versteht? —

Gegenwärtiger Mangel an Raum verbietet uns aber auf die nicht so sehr schwierige Beantwortung dieser beiden Fragen hier einzugehen. — Es genüge hier die Behauptung, daß die Frage der N. 1. sich mit ja beantwortet, die Frage der N. 2. aber bei einer größeren Uebung ihre leichte Erledigung findet *).

---

*) Daß die VI., wenn Fakultäten statt der Gamma-Funktionen gesetzt werden, so daß sie dann so aussieht:

$$\frac{2^{\mu-1}}{\sqrt{\pi}}(\tfrac{1}{2}\mu+\tfrac{1}{2}m-\tfrac{1}{2})!\,(\tfrac{1}{2}\mu-\tfrac{1}{2}m-1)! = S\left[\frac{(m+a)^{2a|-1}}{2^{a|2}}\cdot(\mu-1-a)!\right]$$

allgemeiner und ohne die gedachte Beschränkung gilt d. h. auch noch, wenn $\mu < m$ fällt für ein Beispiel sogleich in die Augen, z. B. wenn $\mu = \frac{3}{2}$ und $m = 2$ genommen wird. Die Gleichung wird dann

$$\alpha) \qquad \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}\cdot(\tfrac{3}{4})!\,(-\tfrac{5}{4})! = (\tfrac{1}{2})! + 3\cdot(-\tfrac{1}{2})! + 3\cdot(-\tfrac{3}{2})!,$$

und daß diese Gleichung in der That richtig ist, läßt sich (mit Zuziehung der §§. 99. 100. und namentlich des §. 102. des VIII. Th.) wie folgt nachweisen: Es ist

$$\left(\frac{5}{4}\right)! = 1^{\frac{5}{4}|1} = 1^{-\frac{3}{4}|1} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^{2|1} = \left(-\frac{3}{4}\right)! \frac{5}{16} = \frac{5}{16} \cdot \Gamma_{\frac{1}{4}};$$

ferner $$\left(-\frac{5}{4}\right)! = 1^{-\frac{1}{4}|1} \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^{-1|1} = \left(-\frac{1}{4}\right)! \, (-4) = -4 \cdot \Gamma_{\frac{3}{4}}.$$

Auf der andern Seite ist endlich

$$(\tfrac{1}{2})! = \tfrac{1}{2} \cdot \Gamma_{\frac{1}{2}}, \quad (-\tfrac{1}{2})! = \Gamma_{\frac{1}{2}} \quad \text{und}$$

$$(-\tfrac{3}{2})! = 1^{-\frac{3}{2}|1} = 1^{-\frac{1}{2}|1} \cdot (\tfrac{1}{2})^{-1|1} = (-\tfrac{1}{2})! \, (-2) = -2 \cdot \Gamma_{\frac{1}{2}}.$$

Die Gleichung α.) ist daher (nach Substitution dieser Werthe) keine andere als

$$\beta) \qquad \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{-5}{4} \cdot \Gamma_{\frac{1}{4}} \cdot \Gamma_{\frac{3}{4}} = -\tfrac{5}{2} \cdot \Gamma_{\frac{1}{2}};$$

oder, weil $\Gamma_{\frac{1}{4}} \cdot \Gamma_{\frac{3}{4}} = \frac{\pi}{Sin\frac{1}{4}\pi} = \frac{2\pi}{\sqrt{2}}$ und $\Gamma_{\frac{1}{2}} = \sqrt{\pi}$ ist, eigentlich diese:

$$\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{-5}{4} \cdot \frac{2\pi}{\sqrt{2}} = -\tfrac{5}{2}\sqrt{\pi};$$

und diese Gleichung ist offenbar eine richtige.

Dritte Abhandlung.

Von den Reihen und den Integralen des Fourier.

Sechstes Kapitel.

Von den Fourier'schen Reihen.

Vorerinnerung.

Die Anwendungen der Analysis auf die Physik und insbesondere die Untersuchung über die Verbreitung der Wärme und analoge Untersuchungen, haben die Lösung der analytischen Aufgaben nothwendig gemacht und herbeigeführt, welche in diesem Kapitel besprochen werden sollen, nämlich: Reihen zu finden, welche nach Sinus oder Cosinus der vielfachen Bogen x fortlaufen und welche entweder für eine endliche Menge verschiedener Werthe von x beliebig gegebene Werthe φ_1, φ_2, φ_3, ... annehmen, oder welche für eine unendliche Menge, von $x = a$ an bis $x = b$ hin stetig neben einander liegender Werthe von x, mit den entsprechenden Werthen einer gegebenen Funktion φ_x zusammenfallen.

Diese Probleme hat zuerst Lagrange bei Gelegenheit der Untersuchung über das Schwingen einer Seite gelöst (S. Miscellan. math. phys. Taur. T. III. und M. Ohm's Lehrbuch der Mechanik. 1838. Bd. III. §. 180.); allein erst Fourier in seiner Théorie de la chaleur. 1822. hat die hohe Wichtigkeit dieser Probleme und deren Anwendung umfassend nachgewiesen und dadurch für diese Gattung mathematisch-physikalischer Untersuchungen ein neues Feld eröffnet. Deshalb werden diese Reihen nicht mit Unrecht nach Fourier benannt.

§. 51.

Die erstere dieser Aufgaben ist folgende:

Wenn $\frac{\pi}{n}$ durch w bezeichnet wird, — die Koeffizienten $A_1, A_2, A_3, \cdots A_{n-1}$ der aus $n-1$ Gliedern bestehenden endlichen Reihe

$$(R_x)\cdots \quad A_1\cdot Sin\, wx + A_2\cdot Sin\, 2wx + \cdots + A_{n-1}\cdot Sin\,(n-1)wx$$

so zu finden, daß diese Reihe für $x = 1, 2, 3, \cdots n-1$ bezüglich die gegebenen Werthe $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \cdots \varphi_{n-1}$ annimmt.

Man hat also zur Bestimmung dieser $n-1$ Unbekannten die $n-1$ Gleichungen der ersten Ordnung

$$A_1 \cdot Sin\, w + A_2 \cdot Sin\, 2w + \cdots + A_{n-1} \cdot Sin\,(n-1)w = \varphi_1$$

$$A_1 \cdot Sin\, 2w + A_2 \cdot Sin\, 4w + \cdots + A_{n-1} \cdot Sin\, 2(n-1)w = \varphi_2$$

$$A_1 \cdot Sin\, 3w + A_2 \cdot Sin\, 6w + \cdots + A_{n-1} \cdot Sin\, 3(n-1)w = \varphi_3$$

$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$

$$A_1 \cdot Sin\,(n-1)w + A_2 \cdot Sin\, 2(n-1)w + \cdots$$
$$+ A_{n-1} \cdot Sin\,(n-1)(n-1)w = \varphi_{n-1}.$$

Wendet man nun zur Auflösung dieser $n-1$ Gleichungen die Methode der Multiplikatoren (die französische oder Bezout'sche) an, d. h. multiplicirt man diese Gleichungen der Reihe nach bezüglich mit unbestimmten Ausdrücken $M_1, M_2, M_3 \cdots M_{n-1}$; addirt man alle $n-1$ erhaltenen Gleichungen und nimmt man nachgehends diese unbestimmt gelassenen Faktoren immer anders und anders an, nämlich jedesmal so, daß in der zuletzt entstandenen Gleichung die Koeffizienten von $A_1, A_2, \cdots A_{n-1}$ alle der Null gleich werden, bis auf einen einzigen, so wird dieser einzige A_μ (welcher nach und nach $A_1, A_2, \cdots A_{n-1}$ seyn kann) gefunden. — Diesen Zweck erreicht man nun, wenn man $M_1 = Sin\,\mu w$, $M_2 = Sin\, 2\mu w$, $M_3 = Sin\, 3\mu w$, 2c. 2c. und $M_{n-1} = Sin\,(n-1)\mu w$ nimmt; denn es ist in der That (wenn auch ν wie μ positiv ganz gedacht wird)

$$Sin\,\mu w \cdot Sin\,\nu w + Sin\, 2\mu w \cdot Sin\, 2\nu w + \cdots$$
$$+ Sin\,(n-1)\mu w \cdot Sin\,(n-1)\nu w$$

allemal der Null gleich, wenn μ von ν verschieden ist, — dagegen $= \frac{n}{2}$, wenn $\mu = \nu$ *).

---

*) Die Schlüsse, durch welche Lagrange die Werthe dieser Multiplikatoren gefunden hat, sind sehr interessant und in einem der beiden oben angeführten Werke nachzulesen. Will man sich aber von der Wahrheit dieser letzteren Behauptung, nachdem sie einmal aufgestellt worden, bloß überzeugen,

Man findet daher zuletzt

$$A_\mu = \frac{2}{n} \cdot \left[\varphi_1 \cdot Sin\,\mu w + \varphi_2 \cdot Sin\,2\mu w + \cdots + \varphi_{n-1} \cdot Sin(n-1)\mu w\right],$$

wenn nur $nw = \pi$ vorausgesetzt wird.

Berechnet man also hieraus, indem man $\mu = 1, 2, 3 \cdots n-1$ setzt, die Werthe der Koeffizienten $A_1, A_2, \cdots A_{n-1}$ und substituirt man diese Werthe in die Reihe R_x, so ist diese Reihe R_x eine solche Funktion von x, daß sie für $x = 1, 2, 3, \cdots n-1$ bezüglich die beliebig gegebenen Werthe $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \cdots \varphi_{n-1}$ annimmt.

Setzt man also, wie wir gethan haben (wenn $\frac{\pi}{n}$ durch w bezeichnet wird)

1) $$R_x = S\left[A_a \cdot Sin\,awx\right]_{a+b=n-1},$$

so hat sich gefunden

2) $$A_\mu = \frac{2}{n} \cdot S\left[\varphi_c \cdot Sin\,c\mu w\right]_{c+d=n-1}\ {}^{*)};$$

und diese Werthe aus 2.) in die 1.) substituirt, geben nun

---

so darf man nur die Produkte der Sinus in die bekannten Differenzen einfacher Cosinus verwandeln, nachgehends aber diese einzelnen Cosinus-Reihen summiren und zwar entweder auf dem in der Note zu §. 8. beschriebenen Wege, oder dadurch, daß man Potenzen von v als Faktoren anhängt, dann aber diese entstehenden Reihen nach §. 18. des VIII. Th. summirt und zuletzt $v = 1$ nimmt.

*) Da man nach der ein für allemal gemachten Annahme, statt eines jeden kleinen deutschen Buchstaben nach und nach 0 und jede positive ganze Zahl setzen muß, so ist hier in den Gleichungen 1.) und 2.) ein Glied (für $a = 0$) mehr genommen als eigentlich Glieder sind; solches ist aber hier allemal der Null gleich; daher ist diese Schreibweise nicht fehlerhaft. — Uebrigens ließe sich dieses Mehrglied vermeiden, wenn man überall $a+1$ statt a, und $c+1$ statt c setzen wollte.

Die Gleichungen $c+d = n-1$ oder $a+b = n-1$ lassen c oder a nicht größer als $n-1$ werden, weil außerdem d oder b negativ werden würde, was gegen die Annahme ist.

3) $$R_x = \frac{2}{n} \cdot S\left[Sin\, awx \cdot S[\varphi_c \cdot Sin\, acw]\right]_{a+b=n-1 \quad c+b=n-1}$$

oder auch

4) $$R_x = \frac{2}{n} \cdot S\left[\varphi_c \cdot Sin\, caw \times Sin\, awx\right]_{c+b=n-1,\; a+b=n-1},$$

wo man zuerst statt a setzen kann $0, 1, 2, 3 \cdots n-1$, und dann für jeden solchen Werth von a, auch statt c jedesmal setzen muß $0, 1, 2, 3 \cdots n-1$ *).

Anmerkg. Da $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \cdots \varphi_{n-1}$ auch Werthe einer Funktion φ_x seyn können, zu Werthen von x gehörend, die zwischen gegebenen Grenzen liegen, und da das Verfahren allemal statt findet, wie groß die Zahl n auch immer gedacht werden mag, so kann man auf diesem Wege auch eine analoge unendliche Reihe finden, welche nach Sinus der vielfachen Bogen x fortläuft, und welche mit einer gegebenen Funktion φ_x alle stetig neben einander liegenden Werthe gemein hat, von $x = a$ an bis $x = b$ hin, nur daß dann die Summe in 2.) für A_μ, die Summe von unendlich-vielen unendlich-kleinen Produkten von der Form $f \cdot dx$ wird und daher durch ein bestimmtes Integral ihren Ausdruck erhält. — Statt aber den Uebergang von n endlich, zu n unendlich, auszuführen, wollen wir lieber in den folgenden Paragraphen die dahin zielenden Arbeiten direkt vornehmen.

§. 52.

Soll z. B. eine unendliche Reihe

$$(R_x) \cdots \quad A_1 \cdot Sin\, x + A_2 \cdot Sin\, 2x + A_3 \cdot Sin\, 3x + \text{ in inf.}$$

gefunden werden, deren Werthe für alle Werthe von x, welche zwischen 0 und π liegen, mit den entsprechenden Werthen

*) Wollte man eine analoge Cosinusreihe finden, so müßte man sie von der Form $k_0 + k_1 \cdot Cos\, 2wx + k_2 \cdot Cos\, 4wx + \cdots + k_{n-1} \cdot Cos\, 2(n-1)wx$ suchen und so, daß sie für $x = 1, 2, 3, \cdots n$ die n Werthe $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \cdots \varphi_n$ giebt. — Unter dieser Voraussetzung würde man auf ganz analoge Weise ein analoges Resultat erzielen.

einer gegebenen Funktion φ_x zusammenfallen, so hat man zur Bestimmung der unendlich-vielen Koeffizienten A_1, A_2, A_3, 2c., unendlich-viele Gleichungen, welche alle in der einzigen Gleichung

$$1)\qquad A_1 \cdot Sin\,x + A_2 \cdot Sin\,2x + A_3 \cdot Sin\,3x + \text{ in inf. } = \varphi_x$$

enthalten sind und aus ihr hervorgehen, sobald in ihr statt x nach und nach alle unendlich vielen Werthe gesetzt werden, von $x = \frac{1}{\infty}$ an bis zu $x = \pi$ hin.

Verfährt man daher ganz analog wie im vorhergehenden Paragraphen, um aus diesen, in 1.) repräsentirten unendlich-vielen Gleichungen jedesmal alle Koeffizienten A zu eliminiren bis auf einen einzigen A_μ (der nach und nach A_1, A_2, A_3 2c. seyn kann), so wird man die Gleichung 1.) mit $dx \cdot Sin\,\mu x$ multipliciren, und die neue Gleichung wieder als den Repräsentanten der unendlich-vielen, für alle Werthe von x, die zwischen 0 und π liegen, aus ihr hervorgehenden Gleichungen ansehen und zuletzt alle diese Gleichungen addiren; dies giebt

$$A_1 \cdot \int_0^\pi Sin\,x \cdot Sin\,\mu x \cdot dx + A_2 \cdot \int_0^\pi Sin\,2x \cdot Sin\,\mu x \cdot dx$$
$$+ A_3 \cdot \int_0^\pi Sin\,3x \cdot Sin\,\mu x \cdot dx + \text{ in inf. } = \int_0^\pi \varphi_x \cdot Sin\,\mu x \cdot dx.$$

Nun ist aber

$$\int_0^\pi Sin\,\nu x \cdot Sin\,\mu x \cdot dx = \left.\begin{matrix} 0 \\ \frac{1}{2}\pi \end{matrix}\right\} \text{ je nachdem } \left\{\begin{matrix} \mu \gtrless \nu \\ \mu = \nu \end{matrix}\right\} \text{*)};$$

folglich geht die vorstehende Gleichung über in

---

*) Es ist $Sin\,\nu x \cdot Sin\,\mu x = \frac{1}{2} Cos\,(\nu-\mu)x - \frac{1}{2} Cos\,(\nu+\mu)x$; daher findet sich das fragliche bestimmte Integral zunächst

$$= \tfrac{1}{2}\int_0^\pi Cos\,(\nu-\mu)x \cdot dx - \tfrac{1}{2}\int_0^\pi Cos\,(\nu+\mu)x \cdot dx,$$

dann $\frac{1}{2}\left[\frac{Sin\,(\nu-\mu)x}{\nu-\mu}\right]_{\pi \div 0} - \frac{1}{2}\left[\frac{Sin\,(\nu+\mu)x}{\nu+\mu}\right]_{\pi \div 0}$, welche Werthe in Null übergehen, wenn nicht $\nu-\mu = 0$ d. h. $\nu = \mu$ ist. — Ist aber $\nu = \mu$, so geht $\frac{1}{2} Cos\,(\nu-\mu)x$ in $\frac{1}{2} Cos\,0$ d. h. in $\frac{1}{2}$ über und das Integral davon wird $\frac{1}{2}\int_0^\pi 1 \cdot dx = \frac{1}{2}\pi$.

2) $\frac{1}{2}\pi \cdot A_\mu = \int_0^\pi \varphi_x \cdot Sin\,\mu x \cdot dx = \int_0^\pi \varphi_z \cdot Sin\,\mu z \cdot dz$,

wodurch alle einzelnen Koeffizienten A_1, A_2, A_3, rc. rc. (in 1.) bestimmt sind, indem man statt μ nach und nach 1, 2, 3, rc. setzt.

Man hat also gefunden (aus 1. und 2.)

$$\text{I.} \qquad \frac{2}{\pi} \cdot S\left[Sin\,ax \cdot \int_0^\pi \varphi_z \cdot Sin\,az \cdot dz \right] = \varphi_x,$$

aber nicht als eine allgemeine, vollkommene (identische) Gleichung, sondern zunächst nur gültig für alle Werthe von x, welche zwischen 0 und π liegen.

§. 53.

Genau dasselbe Verfahren kann man aber eintreten lassen, wenn man eine Reihe

$$B_0 + B_1 \cdot Cos\,x + B_2 \cdot Cos\,2x + B_3 \cdot Cos\,3x + \text{ in inf.}$$

sucht, welche von $x = 0$ bis $x = \pi$ mit den Werthen der gegebenen Funktion φ_x zusammenfällt. — Man schreibt die Gleichung hin, nämlich

1) $B_0 + B_1 \cdot Cos\,x + B_2 \cdot Cos\,2x + B_3 \cdot Cos\,3x + \text{ in inf.} = \varphi_x$,

multiplicirt solche mit $dx \cdot Cos\,\mu x$, denkt sich statt x nach und nach alle Werthe von $x = 0$ an bis $x = \pi$ hin gesetzt, und dann alle unendlich-vielen Gleichungen, welche der Voraussetzung gemäß statt finden sollen, zu einander addirt. Dadurch erhält man:

$$B_0 \cdot \int_0^\pi Cos\,\mu x \cdot dx + B_1 \cdot \int_0^\pi Cos\,\mu x \cdot Cos\,x \cdot dx$$
$$+ B_2 \cdot \int_0^\pi Cos\,\mu x \cdot Cos\,2x \cdot dx + \text{ in inf.} \quad = \int_0^\pi \varphi_x \cdot Cos\,\mu x \cdot dx;$$

und diese Gleichung giebt (für $\mu = 0$)

2) $\pi \cdot B_0 = \int_0^\pi \varphi_x \cdot dx$

und für jeden Werth von μ, der positiv ganz ist,

3) $\frac{\pi}{2} \cdot B_\mu = \int_0^\pi \varphi_x \cdot Cos\,\mu x \cdot dx$.

Man findet also

$$\text{II.} \qquad \frac{2}{\pi} \cdot S\left[Cos\, ax \cdot \int_0^\pi \varphi_z \cdot Cos\, az \cdot dz \right] = \varphi_x,$$

wenn man vom allerersten Gliede (für $a = 0$) nur die Hälfte nimmt *). Und diese Gleichung gilt zunächst nur für alle Werthe von x, die zwischen 0 und π liegen.

Anmerkg. Die Aufgabe des §. 51. ist eine einfache sogenannte Interpolations-Aufgabe, wo jedoch die Form der zu findenden Funktion von vorne herein gegeben, d. h. unter den möglichen unendlich-vielen verschiedenen Formen bereits herausgewählt ist, so daß nur noch die unbestimmten Koeffizienten gesucht werden. Aber eben deshalb gehören auch die Aufgaben der §. 52. und §. 53. genau genommen ebenfalls zu den Interpolations-Aufgaben, da bei den letzteren die Anzahl der Werthe, mit denen die gesuchte Funktion (welche später die Zwischenwerthe d. h. die interpolirten Werthe zu liefern hat) übereinstimmen soll, keine bestimmt vorgeschriebene ist, also jede beliebige seyn kann, so daß die gesuchte Funktion (Reihe) auch unendlich-viele stetig auf einander folgender, zwischen bestimmten Grenzen liegender Werthe mit einer gegebenen Funktion φ_x gemein haben kann. — Die gefundenen Gleichungen I. und II. gehören daher auch nicht zu den sogenannten allgemeinen, vollständigen (identischen) Gleichungen, welche für alle Werthe von x, d. h. während x ein bloßer Träger der Operationszeichen ist, richtig bleiben, sondern sie sind Zahlen-Gleichungen, welche nur unter gewissen Beschränkungen gelten. (S. Einleitung zum VIII. Th. §§. 14. 15.).

---

*) Man kann auch die II. aus der I. ableiten, wenn man in der I. zuerst $\varphi_x \cdot Sin\, x$ statt φ_x schreibt, dann die Integrale

$\int_0^\pi \varphi_z \cdot Sin\, z \cdot Sin\, az \cdot dz$ in die Differenzen

$\frac{1}{2}\int_0^\pi \varphi_z \cdot Cos\,(a-1)z \cdot dz - \frac{1}{2}\int_0^\pi \varphi_z \cdot Cos\,(a+1)z \cdot dz$ zerlegt, zuletzt aber die Differenzen der Sinusse in die Form $2\,Sin\, x \cdot Cos\, mx$ verwandelt, um mit $Sin\, x$ wegdividiren zu können.

§. 54.

Die Hauptfrage bleibt jetzt die: ob diese Reihen I. und II. convergent sind, da sie nicht allgemeine Reihen sind (welche nach Potenzen eines Fortschreitungs-Buchstaben fortlaufen), folglich mit ihnen nicht weiter gerechnet werden dürfte, sobald sie nicht convergent wären.

Wir wollen aber von den gedachten Reihen II. und I. die Summe ihrer $n+1$ ersten Glieder bezüglich durch C_n und S_n bezeichnen und nachweisen, daß solche Summen für $n=\infty$ einen bestimmten endlichen Werth annehmen. Ist dies geschehen, so sind die unendlichen Reihen I. und II. nothwendig convergent. — Wir werden aber dann zu gleicher Zeit sehen, ob und wann dieser Werth der Reihen $=\varphi_x$ seyn wird oder nicht.

Weil aber der Bezeichnung zufolge

1) $$C_n = S\Big[Cos\, ax \cdot \int_0^\pi \varphi_z \cdot Cos\, az \cdot dz\Big]_{a+b=n}, \;*)$$

ist, wenn im allerersten Gliede (für $a=0$) nur die Hälfte genommen wird, und

2) $$S_n = S\Big[Sin\, ax \cdot \int_0^\pi \varphi_z \cdot Sin\, az \cdot dz\Big]_{a+b=n}$$

ist, so hat man auch, da man $Cos\, ax$ und $Sin\, ax$ bei den Integrationen nach z, unter das Integralzeichen bringen kann, und da die Summe bestimmter Integrale zwischen denselben Grenzen, in ein Integral der Summe der Differenzial-Funktionen übergeht, — sogleich

3) $$C_n = \int_0^\pi S\Big[Cos\, az \cdot Cos\, ax\Big]_{a+b=n} \cdot \varphi_z \cdot dz,$$

wenn für $a=0$ nur die Hälfte genommen wird, — und

---

*) Da wir ein für allemal festgesetzt haben, daß jeder kleine deutsche Buchstabe nie etwas anderes als entweder 0 oder jede ganze positive Zahl vorstellen soll, so bewirkt die Gleichung $a+b=n$ nichts anderes, als daß a nicht größer als n werden kann, weil sonst b negativ werden würde.

4) $S_n = \int_0^\pi S\left[Sin\, az \cdot Sin\, ax \atop a+b=n \right] \cdot \varphi_z \cdot dz.$

Und weil

$$Cos\, az \cdot Cos\, ax = \tfrac{1}{2}\, Cos\, a(z-x) + \tfrac{1}{2}\, Cos\, a(z+x)$$

und

$$Sin\, az \cdot Sin\, ax = \tfrac{1}{2}\, Cos\, a(z-x) - \tfrac{1}{2}\, Cos\, a(z+x)$$

ist, so folgt, daß, wenn man

5) $\int_0^\pi S\left[Cos\, a(z-x) \atop a+b=n \right] \cdot \varphi_z \cdot dz = P_n,$

6) $\int_0^\pi S\left[Cos\, a(z+x) \atop a+b=n \right] \cdot \varphi_z \cdot dz = Q_n$

setzt, unter der Voraussetzung, daß für $a = 0$ nur die Hälfte des Gliedes genommen wird, — dann

7) $C_n = \tfrac{1}{2}(P_n + Q_n)$ und 8) $S_n = \tfrac{1}{2}(P_n - Q_n)$

seyn muß, so daß also jetzt alles nur noch darauf ankommt, zu beweisen, daß P_n und Q_n für $n = \infty$ bestimmte endliche Werthe annehmen.

Nun haben wir aber bereits mehreremale gefunden

$$\tfrac{1}{2} + Cos\, y + Cos\, 2y + Cos\, 3y + \cdots + Cos\, my = \frac{Sin\,(m+\frac{1}{2})y}{2\, Sin\, \frac{1}{2}y}\ ^{*)};$$

folglich hat man

9) $P_n = \tfrac{1}{2}\int_0^\pi \varphi_z \cdot \dfrac{Sin\,(2n+1)\dfrac{z-x}{2}}{Sin\,\dfrac{z-x}{2}} \cdot dz$

und

---

*) Man setzt diese Summe zur Linken $= s$, multiplicirt links und rechts mit $Sin\, y$, verwandelt die Produkte $Sin\, y \cdot Cos\, ry$ in die Differenzen $\frac{1}{2} Sin\,(r+1)y - \frac{1}{2} Sin\,(r-1)y$ und man erhält die Gleichung

$$\tfrac{1}{2} Sin\,(m+1)y + \tfrac{1}{2} Sin\, my = s \cdot Sin\, y. —$$

Man verwandelt dann die Summe links in das Produkt $Sin\,(m+\frac{1}{2})y \cdot Cos\, \frac{1}{2}y$, so wie $Sin\, y$ rechts in $2\, Sin\, \frac{1}{2}y \cdot Cos\, \frac{1}{2}y$, und die Summe s ist gefunden.

$$10)\qquad Q_n = \tfrac{1}{2}\int_0^{\pi} \varphi_z \cdot \frac{Sin\,(2n+1)\frac{z+x}{2}}{Sin\,\frac{z+x}{2}} \cdot dz;$$

und es kommt also jetzt nur noch darauf an nachzuweisen, daß diese beiden bestimmten Integrale für $n=\infty$ einen bestimmten endlichen Werth annehmen.

Setzt man aber in 9.) $\frac{z-x}{2}=y$ und in 10.) $\frac{z+x}{2}=y$, so findet sich, weil jedesmal $dz = 2dy$ wird,

$$11)\qquad P_n = \int_{-\frac{1}{2}x}^{\frac{1}{2}\pi-\frac{1}{2}x} \varphi_{2y+x} \cdot \frac{Sin\,(2n+1)y}{Sin\,y} \cdot dy$$

und

$$12)\qquad Q_n = \int_{\frac{1}{2}x}^{\frac{1}{2}\pi+\frac{1}{2}x} \varphi_{2y-x} \cdot \frac{Sin\,(2n+1)y}{Sin\,y} \cdot dy,$$

wo φ_{2y+x} und φ_{2y-x} als beliebig gegebene Funktionen von y betrachtet und etwa durch f_y vorgestellt werden können.

§. 55.

Um nun diese Integrale auswerthen zu können, erinnern wir zunächst an folgende Wahrheiten aus der Theorie der bestimmten Integrale, nämlich:

1) Ist f_x von $x=a$ bis $x=b$ stets $\left\{\begin{matrix}\text{positiv}\\ \text{negativ}\end{matrix}\right\}$, so ist auch $\int_a^b f\cdot dx$ $\left\{\begin{matrix}\text{positiv}\\ \text{negativ}\end{matrix}\right\}$, so lange $b>a$, dagegen $\left\{\begin{matrix}\text{negativ}\\ \text{positiv}\end{matrix}\right\}$, sobald $b<a$ ist.

2) $\int_a^b f\cdot dx = -\int_b^a f\cdot dx;$

3) $\int_a^b f_x\cdot dx = \int_{a-c}^{b-c} f_{x+c}\cdot dx;$

4) $\int_a^b f_x\cdot dx = \dfrac{1}{c}\int_{ac}^{bc} f_{x:c}\cdot dx.$

5) Ferner ist allemal

$$\int_a^b f \cdot dx = \int_a^c f \cdot dx + \int_c^b f \cdot dx.$$

6) Das Integral $\int_a^b f_x \cdot F_x \cdot dx$ liegt immer zwischen $f_g \cdot \int_a^b F \cdot dx$ und $f_k \cdot \int_a^b F \cdot dx$, so oft F_x in dem Raume von $x = a$ an bis $x = b$ hin sein Vorzeichen nicht ändert und f_g den größesten, f_k dagegen den kleinsten der Werthe vorstellt, welche f von $x = a$ an bis $x = b$ hin annimmt (S. VIII. Th. §§. 88. 89. 95. 96.).

Hierauf betrachten wir zunächst das bestimmte Integral

$$(\odot) \cdots \qquad R = \int_0^h f_y \cdot \frac{Sin(2n+1)y}{Sin\, y} \cdot dy,$$

wo h positiv und $\overline{\overline{<}} \frac{1}{2}\pi$ vorausgesetzt wird.

Erstlich ist klar, daß der $Sin(2n+1)y$ oder $Sin\, ky$, — wenn der Kürze wegen $2n+1 = k$ gesetzt wird, — vom Positiven zum Negativen übergeht, sobald ky in seinem Wachsen $= \pi$, 3π, 5π, rc. rc. wird, daß derselbe aber vom Negativen zum Positiven zurückkehrt, so oft ky zu 2π, 4π, 6π, rc. rc. anwächst. — Zerlegen wir daher (nach N. 5.) unser Integral R in die Summe der Integrale

$$\int_0^{\pi:k} + \int_{\pi:k}^{2\pi:k} + \int_{2\pi:k}^{3\pi:k} + \cdots + \int_{r\pi:k}^h,$$

indem wir unter $r\pi{:}k$ das größte Vielfache von $\frac{\pi}{k}$ verstehen, welches in h steckt, so daß $h - \frac{r\pi}{k} < \frac{\pi}{k}$ ist, so hat man

7) $\qquad R = R_0 - R_1 + R_2 - R_3 + \cdots (-1)^{r-1} R_{r-1} + (-1)^r R_r,$

wenn für $\nu = 0, 1, 2, 3, \cdots r-1$

8) $\qquad R_\nu = (-1)^\nu \cdot \int_{\nu\pi:k}^{(\nu+1)\pi:k} f_y \cdot \frac{Sin\, ky}{Sin\, y} \cdot dy$

und wenn noch

9) $\qquad R_r = (-1)^r \cdot \int_{r\pi:k}^{h} f_y \cdot \frac{Sin\, ky}{Sin\, y} \cdot dy$

genommen wird; während in jedem dieser letztern Integrale, der $Sin\,ky$ innerhalb der Grenzen des Integrals sein Vorzeichen nie ändert, sondern stets $\left\{\begin{matrix}\text{positiv}\\ \text{negativ}\end{matrix}\right\}$ ist und bleibt, je nachdem $\nu \left\{\begin{matrix}\text{gerade}\\ \text{ungerade}\end{matrix}\right\}$, also $(-1)^\nu = \pm 1$ ist.

Bezeichnen wir nun die Integrale

$$R, \qquad R_\nu \quad \text{und} \quad R_n$$

bezüglich durch

$$\varrho, \qquad \varrho_\nu \quad \text{und} \quad \varrho_n,$$

so oft $f_y = 1$ und $r = n$ und $h = \frac{1}{2}\pi$ gedacht werden, so daß man also hat

10) $$\varrho = \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{Sin\,ky}{Sin\,y} \cdot dy = \tfrac{1}{2}\pi \text{ *)},$$

11) $$\varrho_\nu = (-1)^\nu \cdot \int_{\nu\pi:k}^{(\nu+1)\pi:k} \frac{Sin\,ky}{Sin\,y} \cdot dy$$

für $\nu = 1, 2, 3, \dots n-1$; und noch

12) $$\varrho_n = (-1)^n \cdot \int_{n\pi:k}^{\frac{1}{2}\pi} \frac{Sin\,ky}{Sin\,y} \cdot dy.$$

Und weil jetzt durch direkte Integration

---

*) Es ist nämlich

$$\frac{Sin\,(n+1)y}{Sin\,y} = 1 + 2\,Cos\,2y + 2\,Cos\,4y + \dots + 2\,Cos\,2ny;$$

folglich ist auch

$$\int \frac{Sin\,(n+1)y}{Sin\,y} \cdot dy = y + Sin\,2y + \tfrac{1}{2}Sin\,4y + \tfrac{1}{3}Sin\,6y + \dots + \frac{1}{n}Sin\,2ny;$$

und dies giebt $\frac{1}{2}\pi$, so oft man das Integral zwischen den Grenzen 0 und $\frac{1}{2}\pi$ nimmt.

Später (im §. 67.) wird hervorgehen, daß allemal

$\int_0^h \frac{Sin\,ky}{Sin\,y} \cdot dy = \frac{1}{2}\pi$ ist für $k = \infty$, wenn nur $h < \pi$ ist, also nicht bloß, wenn wie hier, $h = \frac{1}{2}\pi$ vorausgesetzt ist.

$$\int_{\nu\pi:k}^{(\nu+1)\pi:k} Sin\,ky \cdot dy = (-1)^{\nu} \cdot \frac{2}{k}$$

sich ergiebt, so wird (nach N. 6.) der Werth

von ϱ_ν liegen zwischen $\frac{2}{k} \cdot \left(1 : Sin\,\frac{(\nu+1)\pi}{k}\right)$

und $\frac{2}{k}\left(1 : Sin\,\frac{\nu\pi}{k}\right)$,

während (aus N. 12. und N. 6.)

ϱ_n liegt zwischen $\frac{1}{k}$ und $\frac{1}{k} \cdot \left(1 : Sin\,\frac{n\pi}{k}\right)$;

und da diese Sinus in den Nennern der Grenzwerthe mit ν zugleich wachsen, so sind nicht nur $\varrho_0, \varrho_1, \varrho_2, \cdots \varrho_n$ alle positiv, sondern es muß auch

13) $\varrho_0 > \varrho_1 > \varrho_2 > \varrho_3, \cdots > \varrho_n$

seyn, während die Gleichung 10.) jetzt übergeht in

14) ϱ d. h. $\varrho_0 - \varrho_1 + \varrho_2 - \varrho_3 + \cdots + (-1)^n \cdot \varrho_n = \frac{1}{2}\pi$,

so daß aus allen diesen Gründen, so lange $2m < n$ ist,

15) $\begin{cases} \varrho_0 - \varrho_1 + \varrho_2 - \varrho_3 + \cdots - \varrho_{2m-1} + \varrho_{2m} > \frac{1}{2}\pi \\ \varrho_0 - \varrho_1 + \varrho_2 - \varrho_3 + \cdots - \varrho_{2m-1} < \frac{1}{2}\pi \end{cases}$

seyn wird.

Kehren wir nun zu dem allgemeineren Integral R (in ⊙) wieder zurück.

Denken wir uns zuerst f_y von $y = 0$ an bis $y = h$ hin stets abnehmend, oder doch nicht wachsend, und stets positiv, so liegt (nach N. 6.)

16) R_ν zwischen $f_{(\nu+1)\pi:k} \cdot \varrho_\nu$ und $f_{\nu\pi:k} \cdot \varrho_\nu$;

und da die Werthe von f mit denen von ν nicht wachsen, ϱ_ν aber abnimmt, wenn ν wächst, so folgt auch (analog wie in 13.) nicht bloß, daß $R_0, R_1, R_2, \cdots R_\nu$ alle positiv sind, sondean auch daß

17) $R_0 > R_1 > R_2 > R_3 \cdots > R_\nu$

ist, und eben deshalb auch (analog wie in 15.), so lange $2m<r<n$ ist,

$$18)\quad \begin{cases} R>R_0-R_1+R_2-R_3+\cdots-R_{2m-1} \\ R<R_0-R_1+R_2-R_3+\cdots-R_{2m-1}+R_{2m}. \end{cases}$$

Nimmt man aber hier in der oberen Ungleichung statt der subtrahirten Glieder R_1, R_3, rc. ihre größeren Grenzen, — statt der addirten Glieder R_0, R_2, rc. aber ihre kleineren (aus 17.), so bleibt die Ungleichung noch; das umgekehrte Verfahren läßt die untere Ungleichung noch bestehen; und man erhält:

$$19)\quad \begin{cases} R>f_{\pi:k}\cdot(\varrho_0-\varrho_1)+f_{3\pi:k}\cdot(\varrho_2-\varrho_3)+\cdots \\ \qquad +f_{(2m-1)\pi:k}\cdot(\varrho_{2m-2}-\varrho_{2m-1}) \\ R<f_0\cdot\varrho_0-f_{2\pi:k}\cdot(\varrho_1-\varrho_2)-f_{4\pi:k}\cdot(\varrho_3-\varrho_4)-\cdots \\ \qquad -f_{(2m-1)\pi:k}\cdot(\varrho_{2m-1}-\varrho_{2m}) \end{cases}$$

d. h., weil der letzte Werth der Funktion f gleich oder kleiner als die übrigen ist,

$$20)\quad \begin{cases} R>(\varrho_0-\varrho_1+\varrho_2-\varrho_3+\cdots-\varrho_{2m-1})\cdot f_{2m\pi:k} \\ R<\varrho_0\cdot f_0-(\varrho_1-\varrho_2+\varrho_3\cdots-\varrho_{2m})\cdot f_{2m\pi:k}. \end{cases}$$

Nun ist aber nach N. 15. der erste Faktor zur Rechten in der obern Ungleichung 20.), $>\frac{\pi}{2}-\varrho_{2m}$ und der Faktor von $f_{2m\pi:k}$ in der untern Ungleichung von 20.), $>\varrho_0-\varrho_{2m}-\frac{1}{2}\pi$; darum gehen die Ungleichungen 20.) über in

$$21)\quad \begin{cases} R>\frac{\pi}{2}\cdot f_{2m\pi:k}-\varrho_{2m}\cdot f_{2m\pi:k} \\ R<\frac{\pi}{2}\cdot f_{2m\pi:k}+\varrho_0\cdot(f_0-f_{2m\pi:k})+\varrho_{2m}\cdot f_{2m\pi:k}, \end{cases}$$

wo $2m<r<n$ und $k=2n+1$ ist. Da man nun diese Bedingungen festhalten kann, auch wenn man sich m nach und nach immer größer und zuletzt unendlich-groß denkt, wo dann auch $r=\infty$ und $n=\infty$ werden muß, — da man ferner n von der Form $\frac{m^{1+\alpha}-1}{2}$ sich denken kann, wo α positiv ist,

so daß $k = 2n+1 = m^{1+\alpha}$ und $\frac{2m}{k} = \frac{2}{m^\alpha} = \frac{1}{\infty}$ wird für $m = \infty$; — da ferner ϱ_{2m} für $m = \infty$ unendlich-klein werden und $f_{2m\pi:k}$ $\left(\text{wegen } \frac{2m}{k} = \frac{1}{\infty}\right)$ in f_0 übergeht, wenn man hier unter 0 das positiv Unendlich-Kleine versteht, — so gehen die beiden Ungleichungen 21.) in die Gleichung

$$22) \qquad R = \frac{\pi}{2} \cdot f_0$$

über, so daß man also hat

$$23) \qquad \int_0^h f_y \cdot \frac{Sin\, ky}{Sin\, y} \cdot dy = \frac{\pi}{2} \cdot f_0 \quad \text{für} \quad k = \infty,$$

so lange h positiv und $\overline{\overline{<}} \frac{1}{2}\pi$ ist, während wir f_y von $y = 0$ bis $y = h$ nie wachsend und stets positiv gedacht haben.

Sollte aber f_y von $y = 0$ bis $y = h$ auch negative Werthe annehmen, aber noch stets abnehmen oder doch nicht wachsen, so gilt die Gleichung 23.) doch noch, weil man sich eine Konstante c so groß positiv denken kann, daß die Summe $c+f_y$ stets positiv bleibt, also statt f_y in 23.) gesetzt werden kann. Man hat dann (aus 23.)

$$\int_0^h (c+f_y) \cdot \frac{Sin\, ky}{Sin\, y} = \frac{\pi}{2}(c+f_0) \quad \text{für} \quad k = \infty;$$

aber auch, wenn man c allein (in 23.) statt f_y setzt,

$$\int_0^h c \cdot \frac{Sin\, ky}{Sin\, y} \cdot dy = \frac{\pi}{2} \cdot c \quad \text{für} \quad k = \infty.$$

Subtrahirt man also diese beiden Gleichungen von einander, so geht die Gleichung 23. augenblicklich wieder hervor.

Dieselbe Gleichung 23.) gilt endlich auch noch, wenn die Werthe von f_y, von $y = 0$ bis $y = h$, stets zunehmen oder doch nicht abnehmen sollten, weil dann $-f_y$ stets abnimmt oder doch nicht zunimmt, also $-f_y$ in 23. statt der

Funktion f_y, wie sie dort gedacht wird, gesetzt werden kann. Dadurch geht aber die Gleichung 23.) über in

$$\int_0^h (-f_y) \cdot \frac{Sin\,ky}{Sin\,y} \cdot dy = \frac{\pi}{2} \cdot (-f_0) \quad \text{für} \quad k = \infty$$

und diese Gleichung ist wiederum die 23.), während f_y jetzt stets wächst oder doch nie abnimmt.

Aus der 23.) folgt aber jetzt noch, daß wenn g ebenfalls positiv und $< h$ ist, dann, so lange nur $h \overline{\overline{<}} \frac{1}{2}\pi$ ist,

$$24) \quad \int_g^h f_y \cdot \frac{Sin\,ky}{Sin\,y} \cdot dy = 0 \quad \text{für} \quad k = \infty$$

seyn muß, so oft die Funktion f_y von $y = g$ bis $y = h$ entweder stets wächst, oder stets abnimmt, oder stellenweise oder immer sich gleich bleibt *).

Diese Gleichung 24.) bleibt aber nun auch noch wahr, wenn die Funktion f_y, von $y = g$ an bis $y = h$ hin beliebig oft wächst oder abnimmt, — weil, wenn $y = g_1$, $y = g_2$, $y = g_3$, 2c. die Grenzen der Werthe von y seyn sollten, wo f_y vom Wachsen zum Abnehmen oder vom Abnehmen zum Wachsen übergeht, dann die einzelnen Theil-Integrale zwischen den Grenzen g und g_1, g_1 und g_2, g_2 und g_3, 2c. 2c. genommen, jedes für sich (nach 24.) der Null gleich ist, also auch die Summe aller noch Null seyn muß.

Aber eben darum gilt auch die N. 23., mag die Funktion

---

*) Es ist zwar f_y hier nur von $y = g$ bis $y = h$ gegeben; allein eben deshalb kann man sich f_y von $y = 0$ an bis $y = g$ beliebig und folglich auch so denken, daß die gemachten Bedingungen, unter denen (nach N. 23.) $\int_0^g \psi \cdot dx = \int_0^h \psi \cdot dx = \frac{\pi}{2} \cdot f_0$ sind, wenn $f_y \cdot \frac{Sin\,ky}{Sin\,y} = \psi_y$ gesetzt wird, erfüllt sind. Weil aber

$$\int_g^h \psi \cdot dx = \int_0^h \psi \cdot dx - \int_0^g \psi \cdot dx$$

ist, so folgt die N. 24.) ohne Weiteres aus der N. 23.).

f_y von $y=0$ an bis $y=h$ hin beliebig oft vom Wachsen zum Abnehmen oder vom Abnehmen zum Wachsen übergehen, oder beliebig oft und beliebig lange gleiche Werthe behalten; weil, wenn $y=g$ der erste Werth ist, wo ein solcher Wechsel eintritt, die Gleichung 23.) gilt, so oft g statt des dortigen h gesetzt wird. Man hat also dann

$$\int_0^g f_y \cdot \frac{Sin\,ky}{Sin\,y} \cdot dy = \frac{\pi}{2} \cdot f_0 \quad \text{und} \quad \int_g^h f_y \cdot \frac{Sin\,ky}{Sin\,y} \cdot dy = 0$$

für $k=\infty$; addirt man aber diese beiden Gleichungen, so erhält man die N. 23.) wieder *).

§. 56.

Kehren wir nun nach dieser Untersuchung zu unserem §. 54. zurück. — Das Integral in 11.) daselbst, nämlich

$$\int_{-\frac{1}{2}x}^{\frac{1}{2}\pi-\frac{1}{2}x} \varphi_{2y+x} \cdot \frac{Sin(2n+1)y}{Sin\,y} \cdot dy,$$ läßt sich, — wenn x zwischen 0 und π, also positiv gedacht wird, wo dann auch $\frac{1}{2}\pi-\frac{1}{2}x$ noch positiv und $<\frac{1}{2}\pi$ ist, — zerlegen in

$$\int_{-\frac{1}{2}x}^{0} + \int_0^{\frac{1}{2}\pi-\frac{1}{2}x},$$

von denen das zweite (nach N. 23. des §. 55.) $=\frac{\pi}{2}\cdot\varphi_x$ wird, für $n=\infty$. Das erstere dieser beiden letztern Integrale dagegen wird, wenn man $y=-z$ setzt,

$$=\int_0^{\frac{1}{2}x} \varphi_{x-2z} \cdot \frac{Sin(2n+1)z}{Sin\,z} \cdot dz$$

d. h. (nach derselben N. 23. des §. 55.) $=\frac{\pi}{2}\cdot\varphi_x$, für $n=\infty$.

---

*) Aus dieser Untersuchung geht eigentlich hervor, daß die Gleichung 23.) gilt, auch wenn die obere Grenze unendlich-klein ist, d. h. daß man den Werth $\frac{\pi}{2}\cdot f_0$ erhält, so oft man $\int_{h\div 0} f_y \cdot \frac{Sin\,ky}{Sin\,y} \cdot dy$ herstellt, nach beendigter Integration aber $h=\frac{1}{\infty}$ (und $k=\infty$) nimmt.

Die Gleichung 11. des §. 54. geht daher über in

1) $P_n = \pi \cdot \varphi_x$ für $n = \infty$.

Das Integral in N. 12. des §. 54., nämlich

$$\int_{\frac{1}{2}x}^{\frac{1}{2}\pi+\frac{1}{2}x} \varphi_{2y-x} \cdot \frac{Sin(2n+1)y}{Sin\, y} \cdot dy$$

wird (nach §. 58. NN. 2. u. 5.) zerlegt in

$$= \int_0^{\frac{1}{2}\pi} - \int_0^{\frac{1}{2}x} + \int_{\frac{1}{2}\pi}^{\frac{1}{2}\pi+\frac{1}{2}x}.$$

Von diesen drei Integralen sind aber die beiden erstern für $n = \infty$ einander gleich, ihre Differenz ist also $= 0$; das dritte aber geht, wenn man $\pi - y = z$, also $y = \pi - z$ setzt (weil dann

$Sin(2n+1)(\pi - z) = Sin[\pi - (2n+1)z] = Sin(2n+1)z$

wird), über in

$$\int_{\frac{1}{2}\pi}^{\frac{1}{2}\pi-\frac{1}{2}x} \varphi_{2\pi-2z-x} \cdot \frac{Sin(2n+1)z}{Sin\, z} \cdot dz,$$

welches (nach N. 2. und N. 24. des §. 55.) der Null gleich ist, sobald man $n = \infty$ sich denkt.

Man findet sonach (aus N. 12. des §. 54.)

2) $Q_n = 0$ für $n = \infty$.

Setzt man aber diese Werthe von P_n und Q_n aus 1.) und 2.) in die Gleichungen 7. und 8. des §. 54., so findet sich

3) $C_n = \frac{\pi}{2} \cdot \varphi_x$ für $n = \infty$,

4) $S_n = \frac{\pi}{2} \cdot \varphi_x$ für $n = \infty$.

Es ist also nicht bloß bewiesen, daß die Reihen in I. und II. convergent sind, sondern es sind zu gleicher Zeit diese unendlichen Reihen wiederum ausgewerthet und auf diese Weise die Resultate I. II. noch einmal gefunden.

Anmerkg. Versieht man die Glieder der Reihen in I.

und II. mit Potenzen eines Fortschreitungs-Buchstaben v, d. h. betrachtet man die beiden allgemeinen unendlichen Reihen

1) $$C_v = S\left[v^a \cdot Cos\, ax \cdot \int_0^\pi \varphi_z \cdot Cos\, az \cdot dz\right]$$

und

2) $$S_v = S\left[v_a \cdot Sin\, ax \cdot \int_0^\pi \varphi_z \cdot Sin\, az \cdot dz\right],$$

so lassen sich auch von diesen allgemeinen Reihen die Summen angeben, welche dann für $v = 1$ in die Werthe der Reihen II. und I. übergehen müssen.

Verfährt man nämlich genau so wie im §. 54., so erhält man die Ueberzeugung, daß

3) $C_v = \frac{1}{2}(P_v + Q_v)$ und 4) $S_v = \frac{1}{2}(P_v - Q_v)$

wird, sobald man

5) $$P_v = \int_0^\pi S[v^a \cdot Cos\, a(z-x)] \cdot \varphi_z \cdot dz$$

und

6) $$Q_v = \int_0^\pi S[v^a \cdot Cos\, a(z+x)] \cdot \varphi_z \cdot dz$$

und allemal statt des allerersten Gliedes (für $a = 0$) nur die Hälfte nimmt.

Summirt man jetzt die Reihen, die nach Potenzen von v fortlaufen, nach der Methode des §. 18. des VIII. Th., so erhält man sogleich

$$S[v^a \cdot Cos\, a(z \mp x)] = \frac{1 - v \cdot Cos(z \mp x)}{1 - 2v \cdot Cos(z \mp x) + v^2}.$$

Weil aber in den in 5. und 6. vorkommenden Reihen, von dem allerersten Gliede, welches 1 ist, nur die Hälfte genommen werden darf, so muß man von dieser Summe noch $\frac{1}{2}$ subtrahiren, um die Summen P_v und Q_v zu erhalten; man hat also, weil noch

$$1 + v^2 - v \cdot Cos(z \mp x) = (1-v)^2 + 4v \cdot \left(Sin\, \frac{z-x}{2}\right)^2 \text{ ist,}$$

7) $$\left.\begin{matrix} P_v \\ Q_v \end{matrix}\right\} = \frac{1}{2} \int_0^\pi \frac{1 - v^2}{(1-v)^2 + 4v\left(Sin \frac{z \mp x}{2}\right)^2} \cdot \varphi_z \cdot dz,$$

wo das obere Zeichen für P_v, das untere für Q_v gilt.

So lange nun x zwischen 0 und π liegt, so lange wird für $v = 1$ die Differenzial-Funktion unter dem Integralzeichen von Q_v stets der 0 gleich, also ist auch

8) $$Q_v = 0 \quad \text{für} \quad v = 1;$$

und dies ist die Gleichung 2. des §. 56.

Die Differenzial-Funktion unter dem Integralzeichen von P_v, wird für $v = 1$ auch immer der Null gleich, mit Ausnahme von $z = x$, in welchem Falle der Ausdruck die Form $\frac{0}{0}$ annimmt, welches Ereigniß uns lehrt, daß wir diesen Fall von vorne herein besonders betrachten müssen. Das Integral P_v muß daher zerlegt werden in drei Integrale, nämlich von $z = 0$ bis $z = x-\varepsilon$, von $z = x-\varepsilon$ bis $z = x+\varepsilon$, und von $z = x+\varepsilon$ bis $z = \pi$, während ε unendlich-klein gedacht wird. Das erste und dritte dieser Integrale ist dann für $v = 1$ der Null gleich, eben weil jeder Summand dieser (Integral-) Summen $= 0$ ist. Man hat daher für $v = 1$

9) $$P_v = \tfrac{1}{2}\int_{x-\varepsilon}^{x+\varepsilon} \frac{1-v^2}{(1-v)^2+4v\cdot\left(Sin\frac{z-x}{2}\right)^2}\cdot\varphi_z\cdot dz,$$

also (nach §. 55. N. 3.)

$$= \tfrac{1}{2}\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \frac{1-v^2}{(1-v)^2+4v\cdot(Sin\,\tfrac{1}{2}z)^2}\cdot\varphi_{z+x}\cdot dz,$$

wenn nach der Integration $v = 1$ gesetzt wird.

Ist nun φ_x dicht um x herum stetig, so daß der größte und der kleinste Werth von φ_z, von $z = x-\varepsilon$ an bis zu $z = x+\varepsilon$ hin $\left(\text{wo } \varepsilon = \frac{1}{\infty}\right)$, von dem Werthe φ_x nur um unendlich wenig verschieden sind, so wird man φ_x als einen gemeinschaftlichen Faktor heraussetzen können (nach §. 55. N. 6.) und man hat

10) $$P_v = \tfrac{1}{2}\varphi_x\cdot\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \frac{1-v^2}{(1-v)^2+4v\cdot(Sin\,\tfrac{1}{2}z)^2}\cdot dz \quad \text{für} \quad v = 1$$

oder, weil die Differenzial-Funktion sich nicht ändert, wenn $-z$ statt z gesetzt wird,

$$11)\quad P_v = \varphi_x \cdot \int_0^\varepsilon \frac{1-v^2}{(1-v)^2+4v^2\cdot(Sin\frac{1}{2}z)^2}\cdot dz$$

$$= \varphi_x \cdot \int_0^\varepsilon \frac{1-v^2}{1+v^2-2v\cdot Cos z}\cdot dz \quad \text{für} \quad v = 1.$$

Nun ist aber

$$\int \frac{1}{a-b\cdot Cos z}\cdot dz = \frac{1}{\sqrt{a^2-b^2}}\cdot \frac{1}{Cos}\frac{-b+a\cdot Cos z}{a-b\cdot Cos z},$$

folglich wird (nach §§. 1. u. 2.) die Gleichung 11. übergehen in

$$P_v = \varphi_x \cdot Arc\ cos.\ \frac{-2v+(1+v^2)\cdot Cos\varepsilon}{1+v^2-2v\cdot Cos\varepsilon}$$

d. h. in so ferne $v = 1$ gesetzt werden muß, in

$$12)\quad P_v = \varphi_x \cdot Arc\ cos.\ (-1) = \pi\cdot\varphi_x$$

und dies ist die Gleichung 1.) des §. 56.

So gelangt man also auf diesem Wege zu den Gleichungen II. u. I. abermals; jedoch muß die Convergenz der Reihen P_v und Q_v für $v = 1$ vorher außer Zweifel gesetzt seyn, weil nur dann die (existirenden) Werthe der Reihen den Werthen der Summen der allgemeinen Reihen P_v und Q_v, welche diese allgemeinen Summen für $v = 1$ annehmen, gleich sind.

§. 57.

Wenn aber die Gleichungen I. und II. für alle Werthe von x gelten, welche zwischen 0 und π liegen, so fragt es sich noch, was diese Reihen (in I. und II.) an diesen Grenzen selbst geben, also wenn $x = 0$ ist oder $x = \pi$, und was sie liefern, wenn man statt x einen Werth setzt, der auf einer oder der andern Seite über diese Grenzen hinaus liegt.

1) Geht man aber die §§. 54. 56. für den Fall noch einmal durch, daß $x = 0$ oder $x = \pi$ ist, so findet man zunächst, daß der §. 54. ganz unverändert bleibt. Dagegen ändert

sich der §. 56. sowohl für $x = 0$, als auch wenn $x = \pi$ ist, wesentlich um.

Für $x = 0$ gehen nämlich die Gleichungen 11.) und 12.) des §. 54. über in

$$P_n = \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \varphi_{2y} \cdot \frac{Sin(2n+1)y}{Sin\, y} \cdot dy = Q_n;$$

deshalb wird jetzt (nach §. 55. N. 23.) für $n = \infty$ (und für $x = 0$)

$$P_n = Q_n = \frac{\pi}{2} \cdot \varphi_0;$$

folglich wird auch (aus §. 54. NN. 7. u. 8.) für $x = 0$ und $n = \infty$

$$C_n = \frac{\pi}{2} \cdot \varphi_0 \quad \text{und} \quad S_n = 0;$$

d. h. die Gleichung II. bleibt für $x = 0$ noch gültig, die Gleichung I. aber nur in dem besonderen Falle, wenn gerade $\varphi_0 = 0$ seyn sollte.

Für $x = \pi$ gehen die Gleichungen 11. und 12. des §. 54. über in

$$P_n = \int_{-\frac{1}{2}\pi}^{0} \varphi_{2y+\pi} \cdot \frac{Sin(2n+1)y}{Sin\, y} \cdot dy$$

$$(\text{für } y = -z) = \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \varphi_{\pi-2z} \cdot \frac{Sin(2n+1)z}{Sin\, z} \cdot dz$$

und

$$Q_n = \int_{\frac{1}{2}\pi}^{\pi} \varphi_{2y-\pi} \cdot \frac{Sin(2n+1)y}{Sin\, y} \cdot dy$$

$$(\text{für } y = \pi - z) = \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \varphi_{\pi-2z} \cdot \frac{Sin(2n+1)z}{Sin\, z} \cdot dz,$$

wo jedesmal noch die N. 2. des §. 53. in Anwendung gekommen ist; d. h. für $n = \infty$ (und $x = \pi$) vermöge der N. 23. des §. 54. ist

$$P_n = \frac{\pi}{2} \cdot \varphi_\pi \quad \text{und} \quad Q_n = \frac{\pi}{2} \cdot \varphi_\pi,$$

also

$$C_n = \frac{\pi}{2} \cdot \varphi_\pi \quad \text{und} \quad S_n = 0;$$

d. h. die Gleichung II. bleibt auch für $x = \pi$ noch wahr, dagegen die Gleichung I. nur dann, wenn zufällig $\varphi_\pi = 0$ seyn sollte *).

2) Die Reihe II. (oder C_n für $n = \infty$) nimmt dieselben Werthe an, ob man $x = y$ oder $x = 2\nu\pi \pm y$ nimmt, wenn ν entweder 0 oder positiv oder negativ ganz ist. Im Allgemeinen wird also die Gleichung II. nur für die Werthe von x gelten, welche zwischen 0 und π liegen, so wie noch für $x = 0$ und $x = \pi$ selbst.

Sollte aber die gegebene Funktion φ_x die Eigenschaft haben, daß

$$\varphi_{-x} = \varphi_x$$

ist, so wird die Gleichung II. für alle Werthe von x gelten, die zwischen $-\pi$ und $+\pi$ liegen, so wie auch für diese Grenzen selbst; weil alle einzelnen Glieder der Reihe II., also auch die ganze Reihe II. für jeden negativen Werth von x denselben Werth annimmt, wie für einen gleich großen positiven Werth von x.

3) Weil die Reihe I. (oder S_n für $n = \infty$) für

$$x = y \quad \text{und für} \quad x = 2\nu\pi + y$$

einerlei Werth, aber für

$$x = y \quad \text{und für} \quad x = 2\nu\pi - y$$

gerade entgegengesetzte Werthe annimmt, so wird auch die Gleichung I. nur in seltenen Ausnahmsfällen für andere Werthe von x gelten, die nicht zwischen 0 und π liegen. — Sollte aber die gegebene Funktion φ_x die Eigenschaft haben, daß

$$\varphi_{-x} = -\varphi_x$$

*) Daß die Reihe I. sowohl für $x = \pi$, als auch für $x = 0$ den Werth Null annimmt, fällt in die Augen, in so ferne jedes einzelne Glied der Null gleich wird.

ist, so gilt natürlich die Gleichung I. auch noch für alle Werthe von x, die zwischen $-\pi$ und $+\pi$ liegen*), weil alle einzelnen Glieder der Reihe I. und deshalb auch die ganze Reihe I. für jeden negativen Werth von x, den entgegengesetzten, übrigens gerade so großen Werth annimmt, wie für denselben positiven Werth von x. Sie gilt aber nicht mehr für $x = -\pi$ oder $x = +\pi$.

4) Man kann aber jede beliebige Funktion φ_x in zwei Theile F_x und G_x dergestalt zerlegen, [indem man

$$F_x = \tfrac{1}{2}(\varphi_x + \varphi_{-x}) \quad \text{und} \quad G_x = \tfrac{1}{2}(\varphi_x - \varphi_{-x})$$

nimmt], daß $\quad F_{-x} = F_x \quad$ und $\quad G_{-x} = -G_x$

wird; dann gilt also (nach N. 2.) die Gleichung II., sobald daselbst F_x statt φ_x gesetzt wird, für alle Werthe von x, die zwischen $-\pi$ und $+\pi$ liegen, so wie an diesen Grenzen selbst; während die Gleichung I. (nach N. 3.) für alle Werthe von x gilt, die zwischen $-\pi$ und $+\pi$ liegen, aber nicht nothwendig an diesen Grenzen selbst, sobald G_x statt der dortigen Funktion φ_x gesetzt wird. Man hat daher, eben weil nun $\varphi_x = F_x + G_x$ ist,

$$\begin{aligned}\varphi_x = {} & \tfrac{1}{2}B_0 + B_1 \cdot Cos\,x + B_2 \cdot Cos\,2x + B_3 \cdot Cos\,3x + \text{ in inf.} \\ & + A_1 \cdot Sin\,x + A_2 \cdot Sin\,2x + A_3 \cdot Sin\,3x + \text{ in inf.},\end{aligned}$$

während diese Koeffizienten B_μ und A_μ gefunden werden aus den Gleichungen

$$B_\mu = \frac{2}{\pi} \cdot \int_0^\pi F_x \cdot Cos\,\mu x \cdot dx = \frac{1}{\pi} \cdot \int_0^\pi (\varphi_x + \varphi_{-x}) \cdot Cos\,\mu x \cdot dx$$

und

$$A_\mu = \frac{2}{\pi} \cdot \int_0^\pi G_x \cdot Sin\,\mu x \cdot dx = \frac{1}{\pi} \cdot \int_0^\pi (\varphi_x - \varphi_{-x}) \cdot Sin\,\mu x \cdot dx;$$

so daß die obere Reihe (der Cosinus) die Werthe von F_x, die untere Reihe (der Sinus) dagegen die Werthe von G_x giebt,

---

*) Da nämlich die Gleichung $\varphi_{-x} = -\varphi_x$ auch diese andere $\varphi_{-0} = -\varphi_0$ d. h. $2\varphi_0 = 0$, oder $\varphi_0 = 0$ in sich schließt, so gilt nun die Gleichung I. auch noch für $x = 0$ (nach N. 1.).

für alle Werthe von x, welche zwischen $-\pi$ und $+\pi$ liegen. Die Gleichung selbst giebt also die Werthe von φ_x ebenfalls für jeden Werth von x, der zwischen $-\pi$ und $+\pi$ liegt, nur nicht nothwendig für $x=-\pi$ oder $x=+\pi$ selbst.

Weil aber $\int_0^{\pi} \varphi_{-x}\cdot Cos\,\mu x\cdot dx$, wenn man $x=-z$ setzt, in $\int_0^{-\pi}(-\varphi_z\cdot Cos\,\mu z)\cdot dz$ und dann in $\int_{-\pi}^{0}\varphi_z\cdot Cos\,\mu z\cdot dz$, und da auf demselben Wege $\int_0^{\pi}(-\varphi_{-x}\cdot Sin\,\mu x)\cdot dx$ in $\int_0^{-\pi}(-\varphi_z\cdot Sin\,\mu z)\cdot dz$ und dann in $\int_{-\pi}^{0}\varphi_z\cdot Sin\,\mu z\cdot dz$ übergeht, so lassen sich die vorstehenden Koeffizienten B_μ und A_μ auch so ausdrücken, nämlich:

$$B_\mu = \frac{1}{\pi}\cdot\int_{-\pi}^{\pi}\varphi_x\cdot Cos\,\mu x\cdot dx$$

und

$$A_\mu = \frac{1}{\pi}\cdot\int_{-\pi}^{\pi}\varphi_x\cdot Sin\,\mu x\cdot dx,$$

also daß die obige Gleichung übergeht in

III. $$\varphi_x = \frac{1}{\pi}\cdot S\left[Cos\,ax\cdot\int_{-\pi}^{\pi}\varphi_z\cdot Cos\,az\cdot dz\right] + \frac{1}{\pi}\cdot S\left[Sin\,ax\cdot\int_{-\pi}^{\pi}\varphi_z\cdot Sin\,az\cdot dz\right],$$

wenn vom allerersten Gliede (für $a=0$) nur die Hälfte genommen wird. — Sie gilt für jeden Werth von x, der zwischen $-\pi$ und $+\pi$ liegt, aber nicht an diesen Grenzen selbst *).

---

*) An diesen Grenzen selbst, nämlich für $x=-\pi$ und für $x=+\pi$ wird die Reihe der Sinus (in III.) $=0$, die der Cosinus aber (mit $\frac{1}{\pi}$ multiplicirt)

$$= F_x \quad \text{d. h.} \quad = \tfrac{1}{2}(\varphi_x+\varphi_{-x}) \quad \text{d. h.} \quad = \tfrac{1}{2}(\varphi_\pi+\varphi_{-\pi});$$

daher hat man dann (für $x=-\pi$ oder für $x=+\pi$) allemal links in III. entweder $\varphi_{-\pi}$ oder φ_π, rechts dagegen $\tfrac{1}{2}\varphi_\pi+\tfrac{1}{2}\varphi_{-\pi}$.

§. 58.

Die Gleichungen I. und II. gelten offenbar noch wenn die Werthe φ_x gar nicht aus einer und derselben Funktion herrühren, sondern von $x = 0$ an bis $x = \pi$ hin ganz beliebig auf einander folgen, also namentlich z. B. auch noch, wenn zwar φ_x eine bestimmt gegebene Funktion von x ist, aber nur von $x = 0$ bis $x = \alpha < \pi$ hin gedacht wird, während von $x = \alpha$ an bis $x = \pi$ hin eine andere Funktion $\varphi_x{}'$ unter φ_x verstanden werden soll; — so lange man nur stets unter $\int_a^b f \cdot dx$ die Summe von unendlich-vielen unendlich-kleinen Werthen von $f \cdot dx$ versteht und $\varphi_\alpha = \varphi_\alpha{}'$ ist *). Es geht diese Behauptung unmittelbar aus der Art und Weise hervor, wie wir uns in den §§. 51.—53. die Entwickelungen gedacht haben. Es versteht sich aber, daß, wenn in diesem letzteren Falle die bloß angezeigten Summen

$\int_0^\pi \varphi_x \cdot Cos\,\mu x \cdot dx$ und $\int_0^\pi \varphi_x \cdot Sin\,\mu x \cdot dx$ ausgewerthet werden sollen, man nehmen muß (nach VIII. Th. §§. 86. 87.)

$$1)\quad \int_0^\pi \varphi_z \cdot Cos\,\mu z \cdot dz = \int_{\alpha \div 0} \varphi_z \cdot Cos\,\mu z \cdot dz + \int_{\pi \div \alpha} \varphi_z{}' \cdot Cos\,\mu z \cdot dz$$

und

$$2)\quad \int_0^\pi \varphi_z \cdot Sin\,\mu z \cdot dz = \int_{\alpha \div 0} \varphi_z \cdot Sin\,\mu z \cdot dz + \int_{\pi \div \alpha} \varphi_z{}' \cdot Sin\,\mu z \cdot dz.$$

Sollten jedoch die Grenzwerthe φ_α und $\varphi_\alpha{}'$ nicht einander gleich seyn (d. h. sollten die durch die, zu der Abscisse x gehörigen Ordinaten φ_x und $\varphi_x{}'$, gegebenen Stücken von Kurven, von denen das erstere von $x = 0$ bis $x = \alpha$, das andere aber von $x = \alpha$ an bis $x = \pi$ genommen werden soll, da, wo $x = \alpha$ ist, nicht zusammenstoßen, so daß die zur Abscisse α gehörige End-Ordinate φ_α des erstern

*) Denkt man sich x als Abscisse, dagegen φ_x, $\varphi_x{}'$ als Ordinaten, so drückt die Bedingung $\varphi_\alpha = \varphi_\alpha{}'$ nichts anders aus, als daß die beiden Kurvenstücke die durch φ_x und $\varphi_x{}'$ vorgestellt sind, da wo $x = \alpha$ ist, zusammenstoßen.

Kurvenstücks von der Anfangs-Ordinate $\varphi_\alpha{}'$ des zweiten Kurvenstücks, welche zu derselben Abscisse $x=\alpha$ gehört, verschieden ist), so wird man sich darüber entscheiden müssen, ob die Gleichungen 1. des §. 52. und 1. des §. 53., nämlich die Gleichungen

$$A_1 \cdot Sin\,x + A_2 \cdot Sin\,2x + A_3 \cdot Sin\,3x + \text{ in inf.} = \varphi_x$$

und

$$B_0 + B_1 \cdot Cos\,x + B_2 \cdot Cos\,2x + B_3 \cdot Cos\,3x + \text{ in inf.} = \varphi_x$$

für $x=\alpha$ unter der Voraussetzung gelten sollen, daß rechts φ_α, oder ob sie gelten sollen, wenn rechts $\varphi_\alpha{}'$ unter φ_x verstanden wird. Von dieser Entscheidung wird es abhängen, ob man sich in den Gleichungen I. und II. (in diesem Falle) bei den Summen unendlich-vieler unendlich-kleiner Produkte, die durch $\int_0^\pi \varphi_z \cdot Sin\,\mu z \cdot dz$ und $\int_0^\pi \varphi_z \cdot Cos\,\mu z \cdot dz$ vorgestellt sind, für $z=\alpha$ unter φ_z den Werth φ_α oder den andern Werth $\varphi_\alpha{}'$ zu denken habe.

Man kann sich aber fragen: was geben die Summen C_n und S_n der ersten n Glieder der Reihen II. und I. (S. §. 54.) für $n=\infty$, unter der Voraussetzung, daß φ_α von $\varphi_\alpha{}'$ verschieden ist, daß aber (in diesen Reihen C_n und S_n) unter φ_x eine bestimmte Funktion von x verstanden wird von $x=0$ an bis $x=\alpha$ hin, — von $x=\alpha$ an bis $x=\pi$ hin aber eine andere $\varphi_x{}'$ unter dem Zeichen φ_x verstanden werden soll?

Geht man zu dem Ende die Untersuchung des §. 54. noch einmal genau durch, so findet man, daß alles, auch unter der jetzigen Voraussetzung, unverändert bleibt. Die Fortsetzung derselben Untersuchung im §. 56. erleidet dagegen stellenweise eine Aenderung. Gleich zu Anfang des §. 56. zerlegt sich nämlich das Integral P_n in die Summe

$$\int_0^{\frac{1}{2}x} \varphi_{x-2z} \cdot \frac{Sin(2n+1)z}{Sin\,z} \cdot dz + \int_0^{\frac{1}{2}\pi - \frac{1}{2}x} \varphi_{x+2z} \cdot \frac{Sin(2n+1)z}{Sin\,z} \cdot dz;$$

für $n = \infty$ und $x = \alpha$ geht nun (nach §. 55. N. 23.) das erstere dieser Integrale in das $\frac{\pi}{2}$ fache des Werthes über, welchen φ_{x-2z} für $z = 0$ annimmt, während das andere Integral in das $\frac{\pi}{2}$ fache des Werthes von φ_{x+2z} für $z = 0$ übergeht. Das erstere Integral wie das andere, jedes ist also $= \frac{\pi}{2} \cdot \varphi_\alpha$ (für $x = \alpha$); aber bei dem erstern Integral drückt φ_{x-2z} alle Werthe von φ_x aus von $x = 0$ bis $x = \alpha$; das erstere φ_α ist also der Endwerth von φ_x. Bei dem anderen Integral dagegen drückt φ_{x+2z} alle Werthe von φ_x' aus, von $x = \alpha$ an bis $x = \pi$; der Werth φ_α der jetzt hervorgeht, ist daher der Anfangswerth der neuen Form φ_x', d. h. er ist φ_α'; daher wird jetzt (für $x = \alpha$)

$$P_n = \frac{\pi}{2} \cdot \varphi_\alpha + \frac{\pi}{2} \cdot \varphi_\alpha' \quad \text{für} \quad n = \infty,$$

welche statt der Gleichung 1. des §. 56. jetzt zu stehen kommt.

Geht man nun im §. 56. weiter fort zu dem Integral Q_n, so findet sich unverändert (auch für $x = \alpha$)

$$Q_n = 0 \quad \text{für} \quad n = \infty \ ^{*});$$

und dies ist die Gleichung 2.) des §. 56. — Dann aber folgt aus 7. und 8. des §. 54. für $x = \alpha$ und $n = \infty$

$$C_n = \frac{\pi}{2} \cdot (\tfrac{1}{2}\varphi_\alpha + \tfrac{1}{2}\varphi_\alpha') \quad \text{und} \quad S_n = \frac{\pi}{2} \cdot (\tfrac{1}{2}\varphi_\alpha + \tfrac{1}{2}\varphi_\alpha'),$$

so daß also unter den hier gemachten Voraussetzungen die Gleichungen I. und II. auch noch für $x = \alpha$ gelten, wenn man

---

*) Man kann nämlich das erstere der drei Integrale, in welche das Integral Q_n dort zerlegt worden ist, selbst noch zerlegen in einen Theil zwischen den Grenzen 0 und $\frac{1}{2}x$ (und dieser ist genau das erstere der drei Integrale) und in einen zweiten Theil zwischen den Grenzen $\frac{1}{2}x$ und $\frac{1}{2}\pi$ (wo $x = \alpha$ gedacht wird), bei welchem durchweg φ' an die Stelle von φ tritt (und dieser ist $= 0$).

rechts statt φ_x nicht φ_α und auch nicht φ_α', sondern $\frac{1}{2}\varphi_\alpha + \frac{1}{2}\varphi_\alpha'$ schreibt, und wenn man voraussetzt, daß die einzelnen Koeffizienten der Reihen I. und II. nach den Formeln 1.) und 2.) des gegenwärtigen Paragraphen berechnet werden.

Da in der Gleichung III. die erstere Reihe (der Cosinus) die Funktion $\pi \cdot F_x$ d. h. $\frac{\pi}{2} \cdot \varphi_x + \frac{\pi}{2} \cdot \varphi_{-x}$ vorstellt, die andere Reihe (der Sinus) aber die andere Funktion $\pi \cdot G_x$ d. h. $\frac{\pi}{2} \cdot \varphi_x - \frac{\pi}{2} \cdot \varphi_{-x}$, — und da für $x = \alpha$ der Werth der ersteren Reihe statt $\pi \cdot F_\alpha$ so eben $= \pi(\frac{1}{2}F_\alpha + \frac{1}{2}F_\alpha')$, (wenn F_α' das vorstellt, was aus F_α wird, wenn φ' an die Stelle von φ zu stehen kommt)

$$\text{d. h.} \quad = \frac{\pi}{4}\varphi_\alpha + \frac{\pi}{4}\varphi_{-\alpha} + \frac{\pi}{4}\varphi_\alpha' + \frac{\pi}{4}\varphi_{-\alpha}'$$

gefunden worden ist; und gerade so der Werth der anderen Reihe

$$= \frac{\pi}{4}\varphi_\alpha - \frac{\pi}{4}\varphi_{-\alpha} + \frac{\pi}{4}\varphi_\alpha' - \frac{\pi}{4}\varphi_{-\alpha}'$$

gefunden wird, — so folgt, daß die Summe beider Reihen (in III. zur Rechten) unter den hier gemachten Voraussetzungen (und noch, wie in III., mit $\frac{1}{\pi}$ multiplicirt) für $x = \alpha$ nicht $= \varphi_\alpha$ sondern $= \frac{1}{2}\varphi_\alpha + \frac{1}{2}\varphi_\alpha'$ werden wird.

Anmerkg. Ganz dieselben Resultate ergeben sich auch aus der Betrachtung der Anmerkung zu §. 56. — Bis zu N. 9. daselbst bleibt alles ganz unverändert; — ist aber φ_x nicht auf beiden Seiten dicht an x stetig, sondern nur von $x = \alpha - \varepsilon$ an bis $x = \alpha$, tritt aber von da ab bis zu $x = \alpha + \varepsilon$ eine andere stetige Funktion φ_x' an die Stelle der ersteren φ_x, so muß man das dortige Integral (in 9.)

$$\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \frac{1 - v^2}{(1-v)^2 + 4v \cdot (Sin\,\frac{1}{2}z)^2} \cdot \varphi_{z+x} \cdot dz$$

in zwei Theile zerlegen, nämlich von $z = -\varepsilon$ an bis $z = 0$, und von $z = 0$ an bis $z = +\varepsilon$; der erstere Theil ist dann (aus analogen Gründen, wie dort die N. 10. hergestellt worden) für $x = \alpha$

$$= \tfrac{1}{2}\varphi_\alpha \cdot \int_{-\varepsilon}^{0} \frac{1-v^2}{(1-v)^2+4v\cdot(Sin\tfrac{1}{2}z)^2}\cdot dz$$

der andere Theil ist dagegen

$$= \tfrac{1}{2}\varphi_\alpha' \cdot \int_{0}^{\varepsilon} \frac{1-v^2}{(1-v)^2+4v\cdot(Sin\tfrac{1}{2}z)^2}\cdot dz.$$

Verfährt man dann weiter, genau so wie dort geschehen, so findet sich zuletzt (für $v = 1$)

$$P_v = \frac{\pi}{2}\varphi_\alpha + \frac{\pi}{2}\varphi_\alpha',$$

während

$$Q_v = 0 \quad (\text{für } v = 1)$$

ist. — Dann ist $C_v = \tfrac{1}{2}(P_v + Q_v)$ und $S_v = \tfrac{1}{2}(P_v - Q_v)$ d. h. für $x = \alpha$ (und $v = 1$)

$$C_v = S_v = \frac{\pi}{4}\varphi_\alpha + \frac{\pi}{4}\varphi_\alpha'$$

und

$$\frac{2}{\pi}C_v = \frac{2}{\pi}S_v = \tfrac{1}{2}\varphi_\alpha + \tfrac{1}{2}\varphi_\alpha',$$

welches wiederum die Gleichungen II. und I. sind für $x = \alpha$, aber rechts statt φ_x nicht φ_α und auch nicht φ_α', sondern die halbe Summe beider Werthe gesetzt, die zu $x = \alpha$ gehören.

§. 59.

Es gelten also die Gleichungen

I. $\varphi_x = \dfrac{2}{\pi}\cdot[A_1\cdot Sin\,x + A_2\cdot Sin\,2x + A_3\cdot Sin\,3x + \text{ in inf.}]$,

wo $A_\mu = \int_0^\pi \varphi_x \cdot Sin\,\mu x\cdot dx$;

$$\text{II.}\quad \varphi_x = \frac{2}{\pi}\cdot[\tfrac{1}{2}B_0 + B_1\cdot Cos\,x + B_2\cdot Cos\,2x + \text{ in inf.}],$$

$$\text{wo}\quad B_\mu = \int_0^\pi \varphi_x\cdot Cos\,\mu x\cdot dx;$$

$$\text{III.}\quad \varphi_x = \frac{1}{\pi}\cdot[\tfrac{1}{2}B_0 + B_1\cdot Cos\,x + B_2\cdot Cos\,2x + \text{ in inf.}]$$

$$+\frac{1}{\pi}\cdot[A_1\cdot Sin\,x + A_2\cdot Sin\,2x + A_3\cdot Sin\,3x + \text{ in inf.}],$$

$$\text{wo}\quad B_\mu = \int_{-\pi}^{\pi} \varphi_x\cdot Cos\,\mu x\cdot dx \quad\text{und}\quad A_\mu = \int_{-\pi}^{\pi} \varphi_x\cdot Sin\,\mu x\cdot dx,$$

während μ jedesmal 0 und jede positive ganze Zahl vorstellt; und zwar gelten die erstern beiden (I. und II.) für alle Werthe von x, die zwischen 0 und π liegen, die dritte aber für alle Werthe von x, die zwischen $-\pi$ und $+\pi$ liegen; die I. ist nicht nothwendig mehr wahr für $x = 0$ und für $x = \pi$, während die II. auch noch für diese beiden (Grenz-) Werthe von x gilt; die III. endlich gilt für die Grenzwerthe $x = -\pi$ und $x = +\pi$ ebenfalls nicht mehr. — Alle drei Gleichungen gelten aber auch noch, wenn die Funktion φ_x an einer (oder mehreren) Stellen ihre Form ändert, z. B. bei $x = \alpha$ von einer bestimmten Form φ_x zu einer andern Form φ_x' übergeht und wenn dabei entweder $\varphi_\alpha = \varphi_\alpha'$ seyn oder diese Gleichheit nicht statt finden sollte, wenn man nur in letzterem Falle, so oft $x = \alpha$ genommen wird, in diesen Gleichungen zur Linken unter φ_x nicht φ_α und auch nicht φ_α' versteht, sondern die halbe Summe beider; und wenn man zugleich die bestimmten Integrale, welche die Koeffizienten B_μ und A_μ der Reihen zur Rechten zu geben haben, nach den Mustern 1.) und 2.) des §. 58. berechnet.

Aus der Gleichung III. allein gehen aber die Gleichungen I. und II. augenblicklich wieder hervor. — Denkt man sich nämlich in III. unter φ_x eine ganz beliebige Funktion von x, aber, wie dies in I. und II. vorausgesetzt wird, nur von $x = 0$ bis $x = \pi$ gehend; dann aber für $x = 0$ bis $x = -\pi$ so fortgesetzt, daß

entweder $\varphi_{-x} = \varphi_x$ oder $\varphi_{-x} = -\varphi_x$ wird für jeden Werth von x, der zwischen 0 und π liegt, — so wird im erstern Falle $A_\mu = 0$ werden, im andern Falle aber wird $B_\mu = 0$, jedesmal weil die Differenzial-Funktion ihren Werth in den entgegengesetzten umändert, so oft $-x$ statt x gesetzt wird (S. VIII. Th. §. 88.); und man hat dann im erstern Fall die Gleichung II., weil dann

$\int_{-\pi}^{\pi} \varphi_x \cdot Cos\,\mu x \cdot dx = 2 \cdot \int_0^{\pi} \varphi_x \cdot Cos\,\mu x \cdot dx$ wird; im andern Falle dagegen hat man die Gleichung I., weil nun

$\int_{-\pi}^{\pi} \varphi_x \cdot Sin\,\mu x \cdot dx = 2 \cdot \int_0^{\pi} \varphi_x \cdot Sin\,\mu x \cdot dx$ ist, in so ferne nach der jedesmaligen Voraussetzung, in den letztern beiden Integralen die Funktionen unter dem Integralzeichen unverändert bleiben, wenn man $-x$ statt x gesetzt sich denkt.

§. 60.

Will man Reihen haben, welche nach Sinus und Cosinus der vielfachen Bogen fortlaufen, und deren Werthe für alle Werthe von x, welche zwischen 0 und a liegen, oder welche zwischen $-a$ und $+a$ liegen, mit den Werthen einer gegebenen Funktion φ_x zusammenfallen, so findet man auf dem ganz analogen Wege

$$\text{IV.}\quad \varphi_x = \frac{2}{a} \cdot \left[A_1 \cdot Sin\frac{\pi x}{a} + A_2 \cdot Sin\frac{2\pi x}{a} + A_3 \cdot Sin\frac{3\pi x}{a} + \text{in inf.}\right],$$

$$\text{wo}\quad A_\mu = \int_0^a \varphi_x \cdot Sin\frac{\mu\pi x}{a} \cdot dx;$$

$$\text{V.}\quad \varphi_x = \frac{2}{a} \cdot \left[\tfrac{1}{2}B_0 + B_1 \cdot Cos\frac{\pi x}{a} + B_2 \cdot Cos\frac{2\pi x}{a} + \text{in inf.}\right],$$

$$\text{wo}\quad B_\mu = \int_0^a \varphi_x \cdot Cos\frac{\mu\pi x}{a} \cdot dx;$$

$$\text{VI.}\quad \varphi_x = \frac{1}{a} \cdot \left[\tfrac{1}{2}B_0 + B_1 \cdot Cos\frac{\pi x}{a} + B_2 \cdot Cos\frac{2\pi x}{a} + \text{in inf.}\right]$$
$$+ \frac{1}{a} \cdot \left[A_1 \cdot Sin\frac{\pi x}{a} + A_2 \cdot Sin\frac{2\pi x}{a} + \text{in inf.}\right],$$

wo $B_\mu = \int_{-a}^{a} \varphi_x \cdot Cos\frac{\mu\pi x}{a} \cdot dx$ und $A_\mu = \int_{-a}^{a} \varphi_x \cdot Sin\frac{\mu\pi x}{a} \cdot dx$, während μ überall 0 und jede positive ganze Zahl vorstellt; und zwar gelten die Gleichungen IV. und V. für alle Werthe von x, welche zwischen 0 und a liegen; und die V. auch noch für $x = 0$ und für $x = a$; dagegen gilt die VI. für alle Werthe von x, welche zwischen $-a$ und $+a$ liegen, jedoch nicht nothwendig für $x = -a$ oder $x = +a$ selbst. — Und alle drei Gleichungen IV.—VI. gelten auch noch, wenn für irgend einen der Werthe α von x, die Form φ_x in eine andere Form φ_x' übergehen und noch φ_α von φ_α' verschieden seyn sollte, sobald man dann nur links unter φ_x nicht φ_α und nicht φ_α', sondern $\frac{1}{2}\varphi_\alpha + \frac{1}{2}\varphi_\alpha'$ versteht, und wenn die bestimmten Integrale, welche die Koeffizienten B_μ und A_μ zu geben haben, nach den Mustern 1.) und 2.) des §. 58. berechnet werden.

Man findet aber diese Resultate, wenn man die Gleichungen IV. und V. mit unbestimmten Koeffizienten annimmt, dann links und rechts bezüglich mit $Sin\frac{\mu\pi x}{a} \cdot dx$ und $Cos\frac{\mu\pi x}{a} \cdot dx$ multiplicirt, dann die Gleichung für alle Werthe von x, von 0 an bis a hin, hingeschrieben und zuletzt alle diese Gleichungen addirt sich denkt, in so ferne

$$\int_0^a Sin\frac{\nu\pi x}{a} \cdot Sin\frac{\mu\pi x}{a} \cdot dx$$

$$= \frac{1}{2}\int^a Cos\frac{(\nu-\mu)\pi x}{a} \cdot dx - \frac{1}{2}\int_0^a Cos\frac{(\nu+\mu)\pi x}{a} \cdot dx$$

$= 0$ ist, so lange $\nu \gtrless \mu$, dagegen den Werth $\frac{a}{2}$ annimmt für $\nu = \mu$, — und dies letztere auch von dem anderen Integral $\int_0^a Cos\frac{\nu\pi x}{a} \cdot Cos\frac{\mu\pi x}{a} \cdot dx$ behauptet werden kann.

Man kann auch umgekehrt wie in den §§. 54. und 56. die ersten n Glieder der Reihen in IV. und V. zur Rechten wieder

summiren. Wenn man diese Summen jetzt wiederum bezüglich durch S_n und C_n bezeichnet (analog wie im §. 54.), dabei

$$\int_0^a S\left[\underset{\mathfrak{a}+\mathfrak{b}=n}{Cos\,\mathfrak{b}\frac{\pi(z-x)}{a}}\right]\cdot\varphi_z\cdot dz = P_n$$

und

$$\int_0^a S\left[\underset{\mathfrak{a}+\mathfrak{b}=n}{Cos\,\mathfrak{b}\frac{\pi(z+x)}{a}}\right]\cdot\varphi_z\cdot dz = Q_n$$

setzt, unter der Voraussetzung, daß links (in beiden Reihen) vom allerersten Gliede (für $\mathfrak{a}=0$) nur die Hälfte genommen wird, so findet man wiederum (wie im §. 54.)

$$C_n = \tfrac{1}{2}(P_n+Q_n) \quad \text{und} \quad S_n = \tfrac{1}{2}(P_n-Q_n),$$

und hierauf, indem man die $n+1$ Glieder der Cosinus-Reihen summirt,

$$P_n = \tfrac{1}{2}\int_0^a \varphi_z\cdot\frac{Sin(2n+1)\cdot\frac{\pi(z-x)}{2a}}{Sin\frac{\pi(z-x)}{2a}}\cdot dz$$

und

Q_n gerade so, nur $z+x$ statt $z-x$ geschrieben; alles indem man wie im §. 54. verfährt.

Setzt man nun $\frac{\pi(z-x)}{2a} = y$, so daß $dz = \frac{2a}{\pi}\cdot dy$ wird, so findet sich weiter

$$P_n = \frac{a}{\pi}\cdot\int_{-\frac{\pi x}{2a}}^{\frac{1}{2}\pi-\frac{\pi x}{2a}} \varphi_{\frac{2a}{\pi}y-x}\cdot\frac{Sin(2n+1)y}{Sin\,y}\cdot dy$$

und eben so, wenn man $\frac{\pi(z+x)}{2a} = y$ setzt,

$$Q_n = \frac{a}{\pi}\cdot\int_{\frac{\pi x}{2a}}^{\frac{1}{2}\pi-\frac{\pi x}{2a}} \varphi_{\frac{2a}{\pi}y+x}\cdot\frac{Sin(2n+1)y}{Sin\,y}\cdot dy.$$

Nun zerlegt man diese Integrale, die man so eben für P_n und

Q_n gefunden hat, (genau wie im §. 56. geschehen) bezüglich in 2 oder 3 Theile, und findet dann, so lange x zwischen 0 und a liegt, also $\frac{\pi x}{2a} < \frac{1}{2}\pi$ ist,

$$P_n = a \cdot \varphi_x \quad \text{und} \quad Q_n = 0 \quad \text{für} \quad n = \infty;$$

d. h. es ist für alle Werthe von x, die zwischen 0 und a liegen,

$$\text{VII.} \quad \int_0^a S\left[Cos\, b\frac{\pi(z-x)}{a} \right] \cdot \varphi_z \cdot dz = a \cdot \varphi_x$$

$$\text{VIII.} \quad \int_0^a S\left[Cos\, b\frac{\pi(z+x)}{a} \right] \cdot \varphi_z \cdot dz = 0,$$

wenn in beiden Reihen vom allerersten Gliede (für $a = 0$) nur die Hälfte genommen wird.

Dieselben beiden Reihen werden aber unter derselben Voraussetzung jede $= \frac{1}{2}a \cdot \varphi_x$, sowohl für $x = 0$ wie für $x = a$; wie alles deutlich hervorgeht, wenn man analog dem §. 57. verfährt; so daß man also statt der VII. und VIII. jetzt erhält $\left(\text{weil auch noch } Cos\, b\left(\frac{\pi z}{a} \mp \pi\right) = (-1)^b \cdot Cos\, b\frac{\pi z}{a}\right)$

$$\text{IX.} \quad \int_0^a S\left[Cos\, b\frac{\pi z}{a} \right] \cdot \varphi_z \cdot dz = \tfrac{1}{2}a \cdot \varphi_0$$

und

$$\text{X.} \quad \int_0^a S\left[(-1)^b \cdot Cos\, b\frac{\pi z}{a} \right] \cdot \varphi_z \cdot dz = \tfrac{1}{2}a \cdot \varphi_a.$$

Aus diesen Werthen von P_n und Q_n für $n = \infty$ folgen aber nun sogleich noch die Werthe von C_n und S_n für $n = \infty$ d. h. die Gleichungen IV. und V. für alle Werthe von x, welche zwischen 0 und a liegen; während für die Grenzwerthe $x = 0$ und $x = a$ das Behauptete ebenfalls noch hervorgeht.

So wie aber aus der I. und II. die III. abgeleitet worden, gerade so kann nun aus der IV. und V. auch die VI. abgeleitet werden.

Die IV.—VI. gehen wiederum in die I.—III. über, so wie man $a = \pi$ setzt.

Umgekehrt gehen auch die Gleichungen IV.—VI. unmittelbar aus den Gleichungen I.—III. hervor, wenn man $\frac{\pi x}{a}$ statt x, und $\frac{\pi z}{a}$ statt z, also auch $\frac{\pi}{a}\cdot dz$ statt dz schreibt, zuletzt aber statt $\varphi_{\frac{\pi x}{a}}$, in so ferne darunter doch wieder jede beliebige Funktion von x verstanden werden kann, bloß φ_x setzt, weshalb dann auch statt $\varphi_{\frac{\pi z}{a}}$ bloß φ_z gesetzt werden muß.

§. 61.

Aus diesen Gleichungen I.—III. oder IV.—VI. kann man aber wieder eine Reihe von Folgerungen ziehen. — Setzt man z. B. in den Gleichungen IV. und V. 2a statt a, dann x+a und z+a bezüglich statt x und z, zuletzt aber φ_x wieder statt φ_{x+a}, also natürlich auch φ_z statt φ_{z+a}, so erhält man

$$\text{XI.}\qquad \frac{1}{a}\cdot S\left[Sin\frac{b\pi(x+a)}{2a}\cdot\int_{-a}^{a}\varphi_z\cdot Sin\frac{b\pi(z+a)}{2a}\right]\cdot dz = \varphi_x$$

$$\text{XII.}\qquad \frac{1}{a}\cdot S\left[Cos\frac{b\pi(x+a)}{2a}\cdot\int_{-a}^{a}\varphi_z\cdot Cos\frac{b\pi(z+a)}{2a}\right]\cdot dz = \varphi_x,$$

wenn vom allerersten Gliede (für $b = 0$) nur die Hälfte genommen wird; — und man hat nun zwei neue Gleichungen, die für alle Werthe von x gelten, welche zwischen $-a$ und $+a$ liegen, während die letztere auch noch für $x = -a$ und für $x = +a$ gilt, die erstere aber für diese beiden Grenzwerthe von x nicht mehr nothwendig wahr bleibt, sondern nur dann, wenn $\varphi_a = \varphi_{-a} = 0$ ist.

Sondert man aber von diesen letztern beiden Reihen die geraden Glieder ab (indem man 2b statt b schreibt) und die ungeraden (dadurch, daß man 2b+1 statt b setzt), und bedenkt man dabei, daß in den ersteren Gliedern

$$\frac{Cos}{Sin}\left(\frac{2b\pi(x+a)}{2a}\right) = \frac{Cos}{Sin}\left(\frac{b\pi x}{a}+b\pi\right) = (-1)^b\cdot\frac{Cos}{Sin}\left(\frac{b\pi x}{a}\right)$$

und in den übrigen Gliedern

$$Cos\frac{(2b+1)\pi(x+a)}{2a} = (-1)^{b+1} Sin\frac{(2b+1)\pi x}{2a}$$

dagegen

$$Sin\frac{(2b+1)\pi(x+a)}{2a} = (-1)^{b} Cos\frac{(2b+1)\pi x}{2a}$$

ist, so erhält man (aus XI.)

$$\text{XIII.}\left\{\begin{array}{l} \frac{1}{a}\cdot S\left[Sin\frac{b\pi x}{a}\cdot\int_{-a}^{a}\varphi_z\cdot Sin\frac{b\pi z}{a}\cdot dz\right] \\ +\frac{1}{a}\cdot S\left[Cos\frac{(2b+1)\pi x}{2a}\cdot\int_{-a}^{a}\varphi_z\cdot Cos\frac{(2b+1)\pi z}{2a}\cdot dz\right]=\varphi_x \end{array}\right.$$

und (aus XII.)

$$\text{XIV.}\left\{\begin{array}{l} \frac{1}{a}\cdot S\left[Cos\frac{b\pi x}{a}\cdot\int_{-a}^{a}\varphi_z\cdot Cos\frac{b\pi z}{a}\cdot dz\right] \\ +\frac{1}{a}\cdot S\left[Sin\frac{(2b+1)\pi x}{2a}\cdot\int_{-a}^{a}\varphi_z\cdot Sin\frac{(2b+1)\pi z}{2a}\cdot dz\right]=\varphi_x. \end{array}\right.$$

Beide Gleichungen XIII. und XIV. gelten für alle Werthe von x, welche zwischen $-a$ und $+a$ liegen, die letztere auch noch an den beiden Grenzen selbst, was von der ersteren im Allgemeinen nicht behauptet werden kann. Jedoch darf man nicht unterlassen zu bemerken, daß in der XIV. von dem allerersten Gliede der ersten Reihe (für $b = 0$) nur die Hälfte genommen werden darf.

§. 62.

A. Hätte die durch eine Reihe auszudrückende Funktion φ_x die Eigenschaft, daß

$$\varphi_{-x} = \varphi_x$$

wäre, so würden in XIII. die Integrale in den Gliedern der erstern Reihe der Null gleich werden, in XIV. dagegen die Glieder der zweiten Reihe, — und man würde also dann haben (weil jetzt auch $\int_{-a}^{a} = 2\int_{0}^{a}$ wird)

XV. $\frac{2}{a} \cdot S\left[Cos\frac{(2b+1)\pi x}{2a} \cdot \int_0^a \varphi_z \cdot Cos\frac{(2b+1)\pi z}{2a} \cdot dz\right] = \varphi_x$

XVI. $\frac{2}{a} \cdot S\left[Cos\frac{b\pi x}{a} \cdot \int_0^a \varphi_z \cdot Cos\frac{b\pi z}{a} \cdot dz\right] = \varphi_x$,

wenn in der letztern Gleichung zur Linken das allererste Glied (für $b = 0$) nur zur Hälfte genommen wird. Die letztere Gleichung gilt auch noch an den Grenzen der Werthe von x, d. h. noch für $x = -a$ und für $x = +a$.

B. Hätte aber die durch eine Reihe auszudrückende Funktion φ_x diese andere Eigenschaft, daß

$$\varphi_{-x} = -\varphi_x, \text{ also auch } \varphi_0 = 0$$

wäre, so würden aus ganz analogen Gründen, in der Gleichung XIII. die Glieder der zweiten Reihe, in der Gleichung XIV. dagegen die Glieder der erstern Reihe, $= 0$ werden; und man würde daher nun haben aus XIII.

XVII. $\frac{2}{a} \cdot S\left[Sin\frac{b\pi x}{a} \cdot \int_0^a \varphi_z \cdot Sin\frac{b\pi z}{a} \cdot dz\right] = \varphi_x$

XVIII. $\frac{2}{a} \cdot S\left[Sin\frac{(2b+1)\pi x}{2a} \cdot \int_0^a \varphi_z \cdot Sin\frac{(2b+1)\pi z}{2a} \cdot dz\right] = \varphi_x$,

welche wiederum gelten für alle Werthe von x, die zwischen $-a$ und $+a$ liegen und letztere auch noch an den Grenzen d. h. für $x = -a$ und für $x = +a$ selbst.

§. 63.

Wir übergehen weitere Umformungen, die man noch vornehmen kann und die, wenn das Bedürfniß es erheischt, jedesmal leicht ausgeführt werden können, und lassen nun einige Beispiele der Anwendung folgen.

Erstes Beispiel. Man soll Reihen finden, welche nach Sinus oder Cosinus der vielfachen Bogen x fortlaufen, und welche für alle Werthe von x, die zwischen bestimmten Grenzen liegen, der Einheit gleich sind.

Da hier $\varphi_x = 1$ gegeben ist, so hat man für $\mu > 0$

$$\int \varphi_x \cdot Sin\,\mu x \cdot dx = \int Sin\,\mu x \cdot dx = -\frac{1}{\mu} \cdot Cos\,\mu x,$$

$$\int \varphi_x \cdot Cos\,\mu x \cdot dx = \int Cos\,\mu x \cdot dx = \frac{1}{\mu} \cdot Sin\,\mu x;$$

und für $\mu = 0$ ist das erstere dieser Integrale $= 0$, das andere $= x$.

Die Gleichung §. 59. I. giebt daher

$$1) \qquad 1 = \frac{4}{\pi} \cdot (Sin\,x + \tfrac{1}{3} Sin\,3x + \tfrac{1}{5} Sin\,5x + \text{ in inf.});$$

und diese Gleichung gilt für alle Werthe von x, die zwischen 0 und π liegen und für $x = 0$ oder $x = \pi$ schon nicht mehr. — Zufällig aber gilt dieselbe Gleichung auch noch für alle Werthe von x, welche zwischen $2\nu\pi$ und $(2\nu+1)\pi$ liegen, wenn ν jede positive oder negative ganze Zahl vorstellt, und zwar deshalb, weil die Reihe zur Rechten für $x = \alpha$ und für $x = 2\nu\pi + \alpha$ einen und denselben Werth annimmt.

Die Gleichungen II. und III., wenn man sie auf dieses Beispiel in Anwendung bringt, gehen über in $1 = 1$.

Die Gleichung IV. des §. 60. giebt ferner (für $\varphi_x = 1$)

$$2) \qquad 1 = \frac{4}{\pi} \cdot \left[Sin\frac{\pi x}{a} + \tfrac{1}{3} Sin\frac{3\pi x}{a} + \tfrac{1}{5} Sin\frac{5\pi x}{a} + \text{ in inf.} \right];$$

und diese Gleichung gilt für alle Werthe von x, die zwischen 0 und a liegen, aber nicht mehr an diesen Grenzen selbst. — Zufällig aber gilt dieselbe Gleichung 2.) auch noch für alle Werthe von x, welche zwischen $2\nu a$ und $(2\nu+1)a$ liegen, weil die Reihe für $x = \alpha$ wie für $x = 2\nu a + \alpha$ einen und denselben Werth annimmt*).

---

*) Summirt man die Reihe

$$z \cdot Sin\,w + \tfrac{1}{3} z^3 \cdot Sin\,3w + \tfrac{1}{5} z^5 \cdot Sin\,5w + \text{ in inf.}$$

nach Anleitung des VIII. Th. §. 18., so erhält man

Die Gleichungen V. und VI. gehen für $\varphi_x = 1$ in diese:

$$1 = 1$$

über.

Die Gleichung XI. des §. 61. giebt

$$3)\quad \frac{4}{\pi}\cdot\left[Sin\frac{(x+a)\pi}{2a}+\tfrac{1}{3}Sin\frac{3(x+a)\pi}{2a}\right.$$
$$\left.+\tfrac{1}{5}Sin\frac{5(x+a)\pi}{2a}+\text{ in inf.}\right]=1;$$

und diese Gleichung gilt für alle Werthe von x, welche zwischen $-a$ und $+a$ liegen, aber nicht an diesen Grenzen selbst.

Die Gleichung XII. geht in $1 = 1$ über. — Die Gleichung XIII. dagegen giebt

$$4)\quad \frac{4}{\pi}\cdot\left(Cos\frac{\pi x}{2a}-\tfrac{1}{3}Cos\frac{3\pi x}{2a}+\tfrac{1}{5}Cos\frac{5\pi x}{2a}-\text{ in inf.}\right)=1;$$

und auf diese reducirt sich auch die N. 3., weil

$$\frac{1}{4i}\cdot log\frac{1-z^2+2iz\cdot Sin\,w}{1-z^2-2iz\cdot Sin\,w};$$

und dieser Ausdruck geht für $z = 1$ in $\frac{1}{4i}\cdot log(-1)$ d. h. in $\frac{2\mu+1}{4}\pi$ über, wo μ entweder 0 oder eine positive oder negative ganze Zahl vorstellt; und dieser Werth von μ muß noch näher bestimmt werden. — Ist nun $w = \frac{\pi x}{a}$ (und $z = 1$), so ist die vorliegende Reihe die obige in 2.) zur Rechten, und wir überzeugen uns nun auf dem obigen Wege, daß $\mu = 0$ genommen werden muß, so oft x zwischen $2\nu a$ und $(2\nu+1)a$ liegt, — daß man aber $\mu = -1$ nehmen müsse, so oft x zwischen $(2\nu-1)a$ und $2\nu a$, also auch z. B. zwischen $-a$ und 0 liegt, weil die Reihe in der That für jeden negativen Werth von x, gerade den entgegengesetzten Werth annimmt, den solche für einen positiven Werth von x hat.

So wird man, so oft die Summation einer Reihe zu einem mehrdeutigen Ausdruck führt, jedesmal zu einer besonderen Untersuchung genöthigt, durch welche der rechte Werth der Summe entschieden wird.

$$Sin\frac{(2\nu+1)(x+a)\pi}{2a} = Sin\left[\frac{(2\nu+1)\pi x}{2a}+\frac{2\nu+1}{\pi}\pi\right]$$
$$= (-1)^{\nu}\cdot Cos\frac{(2\nu+1)\pi x}{2a}$$

ist, wenn ν positiv ganz.

Summirt man aber diese Reihe wieder nach dem VIII. Th. §. 18., so erhält man $\frac{1}{2}\frac{1}{Tg}\infty$ d. h. $\frac{2\mu+1}{4}\pi$, wo man den Werth von μ, der Null oder positiv oder negativ ganz seyn muß, noch näher zu bestimmen hat. Die Gleichung XIII. oder 4.) zeigt uns nun, daß die Summe $=\frac{\pi}{4}$ ist, daß man also $\mu = 0$ nehmen muß, so oft x zwischen $-a$ und $+a$ liegt, in so ferne die Gleichung 4.) innerhalb dieser Werthe von x gilt. Setzt man aber in dieser Gleichung π statt a, so erhält man

$$5)\qquad \frac{4}{\pi}\cdot\left[Cos\tfrac{1}{2}x-\tfrac{1}{3}Cos\tfrac{3}{2}x+\tfrac{1}{5}Cos\tfrac{5}{2}x-\text{ in inf.}\right] = 1,$$

und diese Gleichung gilt für alle Werthe von x, welche zwischen $-\pi$ und $+\pi$ liegen*), aber nicht mehr an diesen Grenzen selbst.

Die Gleichung XIV. geht in $1 = 1$ über. — Endlich kann man auch noch die Gleichungen XV. und XVI. anwenden, weil $\varphi_x = 1 = \varphi_{-x}$ ist, und man erhält dann aus XV. die 4.) noch einmal, während die XVI. in $1 = 1$ übergeht. — Die XVII. und XVIII. lassen sich auf dieses Beispiel nicht anwenden, weil die Bedingung, daß $\varphi_{-x} = -\varphi_x$, für $\varphi_x = 1$ nicht erfüllt ist.

Anmerkg. So wie wir die Einheit in eine Reihe verwandelt haben, die nach Sinus und Cosinus der vielfachen,

---

*) Für $x = 0$ geht hieraus die bekannte Leibnitz'sche Reihe hervor nämlich

$$1-\tfrac{1}{3}+\tfrac{1}{5}-\tfrac{1}{7}+\tfrac{1}{9}-\text{ in inf.} = \frac{\pi}{4}.$$

Bogen x fortläuft, so konnte man auch jede beliebige Konstante c in solche Reihen verwandeln; man bekam dann dieselben Reihen, welche wir hier gefunden haben, nur jedes Glied in ihnen mit c noch multiplicirt.

Zweites Beispiel. Es sey die einfachste Funktion von x, nämlich x selbst, in Reihen zu verwandeln, die nach Sinus und Cosinus der Vielfachen von x fortlaufen.

Hier ist $\varphi_x = x$; und (durch theilweise Integration)

$$\int \varphi_z \cdot Sin\,\mu z \cdot dz = \int z \cdot Sin\,\mu z \cdot dz = -\frac{z \cdot Cos\,\mu z}{\mu} + \frac{1}{\mu^2} \cdot Sin\,\mu z;$$

und

$$\int \varphi_z \cdot Cos\,\mu z \cdot dz = \int z \cdot Cos\,\mu z \cdot dz = \frac{z \cdot Sin\,\mu z}{\mu} + \frac{1}{\mu^2} \cdot Cos\,\mu z.$$

Die Gleichung I. des §. 59. giebt daher (weil

$A_\mu = \pi \dfrac{(-1)^{\mu+1}}{\mu}$ wird)

$$1) \qquad x = 2 \cdot [Sin\,x - \tfrac{1}{2} Sin\,2x + \tfrac{1}{3} Sin\,3x - \text{in inf.}];$$

und diese gilt, weil hier $\varphi_{-x} = -\varphi_x$ ist, für alle Werthe von x, welche zwischen den Grenzen $-\pi$ und $+\pi$ liegen, aber nicht an diesen Grenzen selbst.

Die Gleichung II. giebt (weil $B_0 = \int_0^\pi z \cdot dz = \frac{1}{2}\pi$ und

$B_\mu = \dfrac{(-1)^\mu - 1}{\mu^2}$ wird)

$$2) \qquad x = \frac{2}{\pi} \cdot \left[\tfrac{1}{4}\pi^2 - 2\left(Cos\,x + \frac{1}{3^2} Cos\,3x + \frac{1}{5^2} Cos\,5x + \text{in inf.}\right)\right];$$

und diese Gleichung gilt für alle Werthe von x, welche zwischen 0 und π liegen, so wie für diese Grenzwerthe selbst.

Die Gleichung III. liefert (weil hier $B_0 = 0$, $B_\mu = 0$ und $A_\mu = \dfrac{2\pi(-1)^\mu}{\mu}$ wird) die obige Gleichung 1. noch einmal.

Und weil ferner (durch theilweise Integration)

$$\int \varphi_z \cdot Sin\frac{\mu\pi z}{a} \cdot dz = \int z \cdot Sin\frac{\mu\pi z}{a} \cdot dz$$

$$= -\frac{az}{\mu\pi} \cdot Cos\frac{\mu\pi z}{a} + \frac{a^2}{\mu^2\pi^2} \cdot Sin\frac{\mu\pi z}{a}$$

und

$$\int z \cdot Cos\frac{\mu\pi z}{a} \cdot dz = \frac{az}{\mu\pi} \cdot Sin\frac{\mu\pi z}{a} + \frac{a^2}{\mu^2\pi^2} \cdot Cos\frac{\mu\pi z}{a}$$

gefunden wird, so giebt die Formel IV. des §. 60. (in so ferne jetzt $A_\mu = \frac{(-1)^{\mu+1} \cdot a^2}{\mu\pi}$ wird)

$$3) \qquad x = \frac{2a}{\pi} \cdot \left[Sin\frac{\pi x}{a} - \tfrac{1}{2} Sin\frac{2\pi x}{a} + \tfrac{1}{3} Sin\frac{3\pi x}{a} - \text{in inf.} \right];$$

und diese Gleichung gilt, da hier $\varphi_{-x} = -\varphi_x$ ist, für alle Werthe von x, welche zwischen den Grenzen $-a$ und $+a$ liegen, aber nicht für diese Grenzwerthe selbst.

Die Formel V. giebt (in so ferne jetzt

$B_\mu = \frac{a^2}{\mu^2\pi^2} \cdot [(-1)^\mu - 1]$ wird und $B_0 = \tfrac{1}{2}a^2$)

$$4) \qquad x = \tfrac{1}{2}a - \frac{4a}{\pi^2} \cdot \left(Cos\frac{\pi x}{a} + \frac{1}{3^2} Cos\frac{3\pi x}{a} + \frac{1}{5^2} Cos\frac{5\pi x}{a} + \text{in inf.} \right);$$

und diese Gleichung gilt für jeden Werth von x, der zwischen 0 und a liegt, so wie an diesen Grenzen selbst.

Die Formel VI. liefert die Gleichung 3.) noch einmal.

Die Gleichung XI. des §. 61. giebt

$$5) \qquad x = -2\frac{a}{\pi} \cdot \left[Sin\frac{\pi(x+a)}{a} + \tfrac{1}{2} Sin\frac{2\pi(x+a)}{a} + \tfrac{1}{3} Sin\frac{3\pi(x+a)}{a} + \text{in inf.} \right],$$

und diese Gleichung ist von der 3.) nicht verschieden, weil

$Sin\frac{\mu\pi(x+a)}{a} = Sin\left(\mu\pi + \frac{\mu\pi x}{a}\right) = (-1)^\mu \cdot Sin\frac{\mu\pi x}{a}$ ist.

Die Gleichung XII. geht jetzt über in

$$x = \frac{8a}{\pi^2} \cdot \left[Cos\frac{(x+a)\pi}{2a} + \frac{1}{3^2} Cos\frac{3(x+a)\pi}{2a} + \frac{1}{5^2} Cos\frac{5(x+a)\pi}{2a} + \text{in inf.} \right]$$

d. h. in

6) $$x = \frac{8a}{\pi^2} \cdot \left[Sin\frac{\pi x}{2a} - \frac{1}{3^2} Sin\frac{3\pi x}{2a} + \frac{1}{5^2} Sin\frac{5\pi x}{2a} - \text{in inf.} \right];$$

und diese Gleichung gilt für jeden Werth von x, der zwischen $-a$ und $+a$ liegt, so wie noch an diesen Grenzen selbst.

Die Gleichung XIII. und die Gleichung XVII., welche letztere hier anwendbar ist, führen wieder zur Gleichung 3.)

Die Gleichung XIV. dagegen und die Gleichung XVIII. gehen über in die zuletzt erhaltene Gleichung 6.). — Die Gleichungen XV. und XVI. sind nicht anwendbar, weil hier, wo man $\varphi_x = x$ hat, nicht $\varphi_{-x} = \varphi_x$ ist.

Nimmt man endlich in der 6.) $a = \pi$, so erhält man

7) $$x = \frac{8}{\pi} \cdot \left(Sin\tfrac{1}{2}x - \tfrac{1}{9} Sin\tfrac{3}{2}x + \tfrac{1}{25} Sin\tfrac{5}{2}x - \text{in inf.} \right);$$

und diese Gleichung gilt für alle Werthe von x, welche zwischen $-\pi$ und $+\pi$ liegen, so wie an diesen Grenzen selbst.

Anmerkg. Setzt man in der Formel 1.) $\pi - x$ statt x, so erhält man

8) $$\pi - x = 2(Sin\,x + \tfrac{1}{2} Sin\,2x + \tfrac{1}{3} Sin\,3x + \text{in inf.})$$

und diese Gleichung gilt für alle Werthe von $\pi - x$, welche zwischen $-\pi$ und $+\pi$ liegen, d. h. für alle Werthe von x, welche zwischen 0 und 2π liegen und nicht an diesen Grenzen selbst.

Addirt man aber die Gleichungen 1.) und 8.), so erhält man noch einmal die Gleichung 1.) des ersten Beispiels, und natürlich nur gültig für alle Werthe von x, für welche die 1.) und die 8.) gemeinschaftlich gelten, d. h. für alle Werthe von x, die zwischen 0 und π liegen, und schon nicht mehr an diesen Grenzen selbst.

Drittes Beispiel. Man soll $Cos\,\alpha x$, wo α einen beliebigen Bruch bedeutet, in Reihen verwandeln, die nach Sinus und Cosinus der Vielfachen von x fortlaufen.

Weil hier $\varphi_x = Cos\,\alpha x$ ist, so hat man, wenn die Produkte $Cos\,\alpha x \cdot Sin\,\mu x$ und $Cos\,\alpha x \cdot Cos\,\mu x$ in eine Summe von Sinus und Cosinus verwandelt und dann integrirt werden,

$$\int \varphi_z \cdot Sin\,\mu z \cdot dz = -\frac{Cos\,(\mu+\alpha)z}{2(\mu+\alpha)} - \frac{Cos\,(\mu-\alpha)z}{2(\mu-\alpha)}$$

und

$$\int \varphi_z \cdot Cos\,\mu z \cdot dz = \frac{Sin\,(\mu+\alpha)z}{2(\mu+\alpha)} + \frac{Sin\,(\mu-\alpha)z}{2(\mu-\alpha)},$$

so lange α von μ verschieden ist.

Die Gleichung I. des §. 59. giebt nun, weil jetzt

$$A_\mu = \frac{\mu}{\mu^2-\alpha^2} \cdot [1-(-1)^\mu \cdot Cos\,\alpha\pi] \text{ wird,}$$

$$1)\quad Cos\,\alpha x = \frac{2}{\pi} \cdot S\left[\frac{b+1}{(b+1)^2-\alpha^2} \cdot [1+(-1)^b \cdot Cos\,\alpha\pi] \cdot Sin(b+1)x\right]$$

$$= \frac{2}{\pi} \cdot S\left[\frac{b+1}{(b+1)^2-\alpha^2} Sin\,(b+1)x\right]$$

$$+ \frac{2 \cdot Cos\,\alpha\pi}{\pi} \cdot S\left[\frac{(b+1)(-1)^b}{(b+1)^2-\alpha^2} Sin\,(b+1)x\right];$$

und diese Gleichung gilt für alle Werthe von x, welche zwischen 0 und π liegen; sie gilt aber nicht mehr an diesen Grenzen selbst.

Sondert man hier die geraden Glieder von den ungeraden ab (indem man erst 2b statt b, dann 2b+1 statt b schreibt), so kann man dieselbe Gleichung auch so schreiben:

$$2)\quad Cos\,\alpha x = \frac{2}{\pi} \cdot (1+Cos\,\alpha\pi) \cdot S\left[\frac{2b+1}{(2b+1)^2-\alpha^2} \cdot Sin\,(2b+1)x\right]$$

$$+ \frac{2}{\pi} \cdot (1-Cos\,\alpha\pi) \cdot S\left[\frac{2b+2}{(2b+2)^2-\alpha^2} \cdot Sin\,(2b+2)x\right].$$

Die Gleichung II. giebt (weil jetzt

$$B_\mu = \frac{(-1)^{\mu+1}}{\mu^2-\alpha^2} \text{ wird)}$$

$$3)\qquad Cos\,\alpha x = \frac{2}{\pi}\alpha\cdot Sin\,\alpha\pi\cdot S\left[\frac{(-1)^{b+1}}{b^2-\alpha^2}\cdot Cos\,bx\right],$$

wo von dem allerersten Gliede (für $b = 0$) nur die Hälfte genommen werden darf; und diese Gleichung gilt (da sie sich nicht ändert, wenn auch $-x$ statt x gesetzt wird) für alle Werthe von x, welche zwischen $-\pi$ und $+\pi$ liegen, so wie für diese Grenzwerthe selbst *).

Um nicht zu weitläufig zu werden, übergehen wir die Anwendungen der übrigen Formeln auf dieses Beispiel, wo $\varphi_x = Cos\,\alpha x$ gedacht worden ist.

Noch mehr Beispiele. Zur weiteren Uebung für den Anfänger mag man noch $\varphi_x = Sin\,\alpha x$, $\varphi_x = e^{\alpha x}+e^{-\alpha x}$, $\varphi_x = e^{\alpha x}-e^{-\alpha x}$, u. s. w. f. nehmen. — Man findet dann z. B. (aus I.)

$$1)\qquad Sin\,\alpha x = \frac{2}{\pi}Sin\,\alpha\pi\cdot S\left[\frac{(-1)^b(b+1)}{(b+1)^2-\alpha^2}\cdot Sin(b+1)x\right],$$

welche Gleichung, da sie sich nicht ändert, wenn $-x$ statt x gesetzt wird, für alle Werthe von x gilt, welche zwischen $-\pi$ und $+\pi$ liegen; sie gilt aber nicht mehr für diese Grenzwerthe von x selbst.

Ferner (aus II.)

$$2)\qquad Sin\,\alpha x = \frac{2\alpha}{\pi}\cdot S\left[\frac{-1+(-1)^b\cdot Cos\,\alpha\pi}{b^2-\alpha^2}\cdot Cos\,bx\right],$$

wo vom allerersten Gliede (für $b = 0$) nur die Hälfte genommen werden darf. Diese Gleichung gilt für alle Werthe von x, welche zwischen 0 und π liegen, so wie an diesen Grenzen selbst.

Ferner

$$3)\qquad e^{\alpha x}+e^{-\alpha x} = \frac{2\alpha}{\pi}(e^{\alpha\pi}+e^{-\alpha\pi})\cdot\left[\frac{1}{2\alpha^2}-\frac{Cos\,x}{1+\alpha^2}+\frac{Cos\,2x}{4+\alpha^2}-\text{in inf.}\right]$$

---

*) Setzt man in dieser N. 3. $x = \pi$, so erhält man einen bekannten Ausdruck für $Cotg\,\alpha\pi$.

4) $e^{\alpha x} - e^{-\alpha x}$

$$= \frac{2}{\pi}(e^{\alpha\pi} - e^{-\alpha\pi}) \cdot \left[\frac{Sin\, x}{1+\alpha^2} - \frac{2 Sin\, 2x}{4+\alpha^2} + \frac{3\, Sin\, 3x}{9+\alpha^2} - \text{in inf.}\right],$$

welche beiden letztern Gleichungen für alle Werthe von x gelten, die zwischen $-\pi$ und $+\pi$ liegen, während die 3.) auch noch an diesen Grenzen selbst gilt.

U. s. w. f.

§. 64.

Da die Koeffizienten dieser Fourier'schen Reihen bestimmte Integrale sind, so erfordert die Anwendung dieser Reihen stets die Auswerthung der bestimmten Integrale. — Diese läßt sich häufig nur in Form von unendlichen Reihen herstellen, wobei es meist noch darauf ankommt, diese Reihen schneller convergent zu machen. Deshalb werden für besondere Beispiele auch noch ganz besondere Betrachtungen angestellt werden müssen, um zu einem praktischen oder gewünschten Resultate zu gelangen.

Eine solche besondere Betrachtung für den Fall, daß φ_z eine Funktion von $Cos\, z$ ist (so daß z außer in $Cos\, z$ nirgend erscheint) wollen wir hier beispielsweise noch anführen.

Denkt man sich nämlich die Funktion Q_x so, daß sowohl sie als auch ihre Differenzial-Koeffizienten ∂Q_x, $\partial^2 Q_x$, $\partial^3 Q_x$ bis $\partial^{n-1} Q_x$ an beiden Grenzen $x = a$ und $x = b$ eines bestimmten Integrals, der Null gleich werden, so findet sich sofort durch n mal hinter einander wiederholte theilweise Integration:

$$\text{I.} \quad \int_a^b (Q_x \cdot \partial^n P_x) dx = (-1)^n \int_a^b (P_x \cdot \partial^n Q_x) \cdot dx.$$

Nimmt man nun $Q_x = (1-x^2)^{n-\frac{1}{2}}$ und $a = -1$ und $b = +1$, so daß die eben gemachte Bedingung erfüllt ist, und bedenkt man, daß

$$\text{II.} \quad \partial^{n-1}(1-x^2)^{n-\frac{1}{2}} = (-1)^{n-1} \frac{1^{n|2}}{n} \cdot Sin\left(n \cdot \frac{1}{Cos} x\right) \text{*)}$$

---

*) Man findet nach dem Taylor'schen Lehrsatze, nach welchem man hat

$$1) \qquad u_{x+h} = S\left[\partial^a u_x \cdot \frac{h^a}{a!}\right],$$

ist, so geht die I. über in

$$\int_{-1}^{1}(1-x^2)^{n-\frac{1}{2}} \cdot \partial^n P_x \cdot dx = -\frac{1^{n|2}}{n} \cdot \int_{-1}^{1} \partial Sin\left(n \cdot \frac{1}{Cos} x\right)_x \cdot P_x \cdot dx,$$

---

den Differenzial-Koeffizienten $\partial^{n-1}u_x$, wenn man u_{x+h} direkt in eine Reihe nach h entwickelt, den Koeffizienten von h^{n-1} nimmt und zuletzt solchen noch mit $(n-1)!$ multiplicirt. Setzt man aber $u_x = (1-x^2)^{n-\frac{1}{2}}$, so wird nach dem polynomischen Lehrsatze (S. II. Th. d. Syst. d. Math. 2te Auflage §. 685. N. 2.)

2) $$u_{x+h} = [(1-x^2)-2xh-h^2]^{n-\frac{1}{2}}$$

$$= S\left[\frac{(n-\frac{1}{2})^{a+b|-1}}{a!\ b!}(1-x^2)^{n-\frac{1}{2}-a-b}(-2x)^a \cdot (-1)^b \cdot h^{a+2b}\right].$$

Nimmt man nun $a+2b = n-1$, so erhält man:

3) $$\partial^{n-1}u_x = \partial^{n-1}(1-x^2)^{n-\frac{1}{2}}$$

$$= S\left[\frac{(n-1)!\ (n-\frac{1}{2})^{a+b|-1}}{a!\ b!\ 2^b} \cdot 2^{a+b} \cdot x^a \cdot (-1)^{a+b}\right]_{a+2b\,=\,n-1}.$$

Nun ist aber nach der Theorie der Faktoriellen im VIII. Th. und zwar nach §. 102. VI. daselbst

$(n-\frac{1}{2})^{a+b|-1} \cdot 2^{a+b} = (2n-1)^{a+b|-2}$ und (weil $a = n-1-2b$ ist)

wiederum $= (2n-1)^{n-1-b|-2} = \dfrac{(2n-1)^{n|-2}}{(2b+1)^{b+1|-2}}$ (nach V. 8.)

$$= \frac{1^{n|2}}{1^{b+1|2}} \quad \text{(nach IV.)};$$

ferner ist (nach VI. und §. 101. III.)

$$b!\ 2^b = 1^{b|1} \cdot 2^b = 2^{b|2}, \quad \text{auch} \quad 1^{b+1|2} = 1^{b|2}(2b+1),$$

und (nach §. 108. XX.)

$$1^{b|2} \cdot 2^{b|2} = 1^{2b|1},$$

also $$1^{b+1|2} \cdot 2^{b|2} = 1^{2b|1} \cdot (2b+1) = (2b+1)!;$$

endlich ist, wenn man $x = Cos\,v$ setzt, $1-x^2 = (Sin\,v)^2$. Rückt man daher noch aus der Reihe rechts in 3.), nachdem man alle diese Veränderungen vorgenommen hat, den gemeinschaftlichen Faktor $\dfrac{(-1)^{n-1} \cdot 1^{n|2}}{n}$

oder wenn man $x = Cos\, v$, also $\frac{1}{Cos} x = v$ setzt, und die Integrale statt nach x lieber nach v nimmt,

$$\int_{\pi}^{0} (Sin\, v)^{2n-1} \cdot \partial^n P_x \cdot \partial x_v \cdot dv = -\frac{1^{n|2}}{n} \int_{\pi}^{0} \partial[Sin(nv)]_v \cdot P_x \cdot dv$$

d. h. weil $\partial x_v = -Sin\, v$ gefunden wird und noch $\partial(Sin\, nv)_v = n \cdot Cos\, nv$ ist,

$$\int_{0}^{\pi} (Sin\, v)^{2n} \cdot \partial^n P_x \cdot dv = 1^{n|2} \cdot \int_{0}^{\pi} Cos(nv) \cdot P_x \cdot dv,$$

wo $x = Cos\, v$ ist.

Wird daher μ statt n, ferner z statt v, endlich φ_x statt P_x geschrieben, so findet sich aus der vorstehenden Gleichung, wenn man auch noch t statt x schreibt,

$$\text{III.} \quad \int_{0}^{\pi} \varphi_t \cdot Cos\, \mu z \cdot dz = \frac{1}{1^{\mu|2}} \cdot \int_{0}^{\pi} \partial^\mu \varphi_t \cdot (Sin\, z)^{2\mu} \cdot dz,$$

wenn unter t zuletzt $Cos\, z$ verstanden wird.

---

heraus, so erhält man (aus 3.), wenn man nur überall $n-1-2b$ statt a schreibt,

$$4) \quad \partial^{n-1}(1-x^2)^{n-\frac{1}{2}}$$
$$= \frac{(-1)^{n-1} \cdot 1^{n|2}}{n} \cdot S\left[\frac{n!}{(n-1-2b)!\,(2b+1)!}(-1)^b (Cos\, v)^{n-2b-1} \cdot (Sin\, v)^{2b+1}\right],$$

während wiederum nach §. 102. V. 1. (immer des VIII. Th.)

$$\frac{n!}{(n-1-2b)!} = n^{2b+1|-1},$$

also
$$\frac{n!}{(n-1-2b)!\,(2b+1)!} = \frac{n^{2b+1|-1}}{(2b+1)!} = n_{2b+1}$$

d. h. der $(2b+1)^{te}$ Binomial-Koeffizient der n^{ten} Potenz irgend eines Binomiums ist. Aber eben deshalb ist die in N. 4. zur Rechten durch das Summenzeichen S vorgestellte Reihe keine andere als die, welche man für $Sin(nv)$ erhält, wenn man in der bekannten Formel

$$Sin(nv) = \frac{(Cos\, v + i \cdot Sin\, v)^n - (Cos\, v - i \cdot Sin\, v)^n}{2i}$$

die n^{ten} Potenzen nach dem binomischen Lehrsatze entwickelt. — So ist also die Richtigkeit der obigen II. im Texte, außer Zweifel gestellt.

Diese Reduktionsformel III. kann also Anwendung finden, so oft man beabsichtigt eine Funktion von $Cos\,x$ in eine Reihe zu verwandeln, welche nach Cosinus der Vielfachen von x fortläuft.

Soll z. B. die Funktion $\frac{1}{\sqrt{1-2a\cdot Cos\,x+a^2}} = \varphi_x$ in eine solche Reihe verwandelt werden, so daß die Formel II. des §. 59. in Anwendung kommen kann, so hat man zunächst daselbst

$$B_\mu = \int_0^\pi \varphi_z \cdot Cos\,\mu z \cdot dz$$

d. h. hier

$$B_\mu = \int_0^\pi \frac{Cos\,\mu z}{\sqrt{1-2a\cdot Cos\,z+a^2}} \cdot dz$$

anszuwerthen.

Geschieht dies nun nach der vorstehenden Reduktionsformel III., so hat man

$$t = Cos\,z, \qquad \varphi_t = (1-2at+a^2)^{-\frac{1}{2}},$$

also

$$\partial^\mu \varphi_t = a^\mu \cdot 1^{\mu|2} \cdot (1-2at+a^2)^{-\frac{1}{2}-\mu};$$

und die III. giebt nun

$$B_\mu = a^n \cdot \int_0^\pi \frac{(Sin\,z)^{2\mu}}{(1-2a\cdot Cos\,z+a^2)^{\mu+\frac{1}{2}}} \cdot dz,$$

welches letztere Integral auf die elliptischen Transcendenten zurückgeführt werden kann. Führt man nämlich einen neuen Veränderlichen y dadurch ein, daß man

$$\frac{Sin\,z}{\sqrt{1-2a\cdot Cos\,z+a^2}} = Sin\,y$$

nimmt, so findet sich weiter

$$B_\mu = a^\mu \cdot \int_0^\pi \frac{(Sin\,y)^{2\mu}}{\sqrt{1-a^2(Sin\,y)^2}} \cdot dy.$$

Entwickelt man rechts den Ausdruck unter dem Integralzeichen (nach dem binomischen Lehrsatze) in eine Reihe, die nach

Potenzen von a fortläuft, so kommen lauter Glieder zu integriren von der Form

$$\int_0^\pi (Sin\,y)^{2n+2b}\cdot dy \quad \text{d. h.} \quad 2\int_0^{\frac{1}{2}\pi}(Sin\,y)^{2n+2b}\cdot dy;$$

und setzt man dann für jedes solche Integral dessen Werth aus §. 13. N. 34., so findet sich in Form einer unendlichen Reihe

$$1) \quad B_\mu = \frac{1^{\mu|2}}{2^{\mu|2}}\cdot\pi a^\mu\cdot S\left[\frac{1^{b|2}}{2^{b|2}}\cdot\frac{(2\mu+1)^{b|2}}{(2\mu+2)^{b|2}}\cdot a^{2b}\right],$$

während

$$2) \quad \varphi_x = \frac{2}{\pi}\cdot S[B_a\cdot Cos\,ax]$$

ist, wenn man vom allerersten Gliede (für $a=0$) nur die Hälfte nimmt.

Man kann aber auch $\frac{1}{\sqrt{1-a^2\cdot(Sin\,y)^2}}$ erst so schreiben, nämlich

$$\frac{1}{\sqrt{1-a^2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{1+\frac{a^2}{1-a^2}Cos\,y^2}},$$

und nun dieses in eine Reihe verwandeln (wiederum nach dem binomischen Lehrsatze), welche nach ganzen Potenzen von $Cos\,y$ fortläuft. Die einzelnen zu integrirenden Glieder haben dann die Form

$$\int_0^\pi (Sin\,y)^{2n}\cdot(Cos\,y)^{2b}\cdot dy \quad \text{oder} \quad 2\int_0^{\frac{1}{2}\pi}(Sin\,y)^{2n}\cdot(Cos\,y)^{2b}\cdot dy$$

und ihr Werth ist aus §. 49. N. 101. zu entnehmen. Man findet dann

$$3) \quad B_\mu = \frac{1^{\mu|2}}{2^{\mu|2}}\cdot\frac{\pi a^\mu}{\sqrt{1-a^2}}\cdot S\left[(-1)^b\cdot\frac{1^{b|2}}{2^{b|2}}\frac{1^{b|2}}{(2\mu+2)^{b|2}}\cdot\left(\frac{a^2}{1-a^2}\right)^b\right],$$

welche Werthe nun in 2.) zu setzen sind.

Diese Reihe convergirt desto schneller je größer μ wird, wenn nur $\frac{a^2}{1-a^2}<1$ d. h. $a<\sqrt{\frac{1}{2}}$ ist; während die Reihe 1.) sehr kleine Werthe von a voraussetzt, wenn sie als gehörig brauchbar angesehen werden soll.

Dieses Beispiel mag hinreichen, die Schwierigkeiten sichtbar zu machen, welche sich der Anwendung der Fourier'schen Reihen auf einzelne Fälle entgegensetzen, während es zu gleicher Zeit sehen läßt, welcher Art die Mittel seyn können, die zur Ueberwindung solcher Schwierigkeiten verwandt werden müssen.

§. 65.

Weil man bei diesen Untersuchungen so häufig auf Integrale stößt von der Form

$$\int_a^b \varphi_y \cdot Sin\, ky \cdot dy, \qquad \int_a^b \varphi_y \cdot Cos\, ky \cdot dy,$$

wo $k = \infty$ gedacht wird, so wollen wir dieselben hier noch einer näheren Erörterung unterziehen.

I. Zunächst haben wir im §. 55. N. 23. gefunden, indem wir voraussetzen, daß f_y innerhalb der Grenzwerthe von y in den einzelnen Integralen stets endlich bleibt,

$$\int_0^h \frac{f_y}{Sin\, y} \cdot Sin\, ky \cdot dy = \frac{\pi}{2} \cdot f_0 \quad \text{für} \quad h \overline{\overline{<}} \tfrac{1}{2}\pi \quad \text{und} \quad k = \infty;$$

und in der N. 24. ebendaselbst

$$\int_g^h \frac{f_y}{Sin\, y} \cdot Sin\, ky \cdot dy = 0, \quad \text{wenn} \quad g < h \overline{\overline{<}} \tfrac{1}{2}\pi \quad \text{und} \quad k = \infty;$$

woraus zu gleicher Zeit hervorgeht, daß die Gleichung 1.) wahr bleibt, wenn auch h noch so klein, nur positiv gedacht wird, so daß derselbe Werth $\frac{\pi}{2} \cdot f_0$ hervorgehen würde, wenn man das Integral $\int_{h \div 0} \frac{f_y}{Sin\, y} \cdot Sin\, ky \cdot dy$ als Funktion von k und h herstellen und dann in ihr $k = \infty$ und $h = \frac{1}{\infty}$ nehmen könnte.

Es entsteht nun die Frage: welche Werthe nehmen dieselben Integrale an, wenn g und h über die angegebenen Grenzen hinaus gehen? —

Geht aber h über die Grenze $\frac{1}{2}\pi$ hinaus, so kann man das zwischen den Grenzen $x = g$ und $x = h$ genommene Integral in zwei Theile zerlegen, von denen der erstere von $x = g$ bis zu $x = \frac{1}{2}\pi$ geht und nach der zweiten der vorstehenden Gleichungen der Null gleich ist, während der andere Theil $= \int_{\frac{1}{2}\pi}^{h} \frac{f_y}{Sin\,y} \cdot Sin\,ky \cdot dy$ ist, und, wenn man $\pi - z = y$ setzt, in $\int_{\pi-h}^{\frac{1}{2}\pi} \frac{f_{\pi-z}}{Sin\,z} \cdot Sin(k\pi - kz) \cdot dz$ übergeht. Setzt man nun k, obgleich unendlich-groß doch positiv ganz voraus, so wird letzteres Integral wiederum

$$= (-1)^{k+1} \cdot \int_{\pi-h}^{\frac{1}{2}\pi} \frac{f_{\pi-z}}{Sin\,z} \cdot Sin\,kz \cdot dz.$$

Ist nun $h < \pi$, (aber $> \frac{1}{2}\pi$), also $\pi - h < \frac{1}{2}\pi$ und > 0, so findet sich auch dieses Integral der Null gleich (nach der 2ten der obigen Gleichungen). Ist aber $h = \pi$, d. h. $\pi - h = 0$, so wird dasselbe Integral $= (-1)^{k+1} \cdot \frac{\pi}{2} \cdot f_\pi$ d. h. $= \pm \frac{\pi}{2} \cdot f_\pi$, je nachdem k, obgleich unendlich-groß doch $\left\{\begin{matrix}\text{ungerade}\\ \text{gerade}\end{matrix}\right\}$ gedacht wird. Man findet also

$$1) \quad \int_g^h \frac{f_y}{Sin\,y} \cdot Sin\,ky \cdot dy = 0,$$

so oft $0 < g < h < \pi$ ist und k positiv ganz und unendlich-groß gedacht wird.

Ferner folgt hieraus noch:

$$2) \quad \int_0^h \frac{f_y}{Sin\,y} \cdot Sin\,ky \cdot dy = \tfrac{1}{2}\pi \cdot f_0,$$

wenn $h < \pi$ und k positiv ganz, obgleich unendlich-groß *).

*) Wir werden aber später (im §. 67.) sehen, daß diese beiden Gleichungen 1.) und 2.) auch noch gelten, wenn k unendlich groß zwar, aber nicht mehr nothwendig ganz, sondern in beliebiger Form gedacht wird.

Dann haben wir so eben auch gefunden

3) $$\int_g^\pi \frac{f_y}{Sin\,y}\cdot Sin\,ky\cdot dy = \pm\frac{\pi}{2}\cdot f_\pi,$$

so lange g zwischen 0 und π liegt und k positiv ganz und $\left\{\begin{matrix}\text{ungerade}\\ \text{gerade}\end{matrix}\right\}$ ist.

Deshalb ist nun auch, wenn man in 3.) h statt g setzt, und dann 2.) und 3.) addirt,

4) $$\int_0^\pi \frac{f_y}{Sin\,y}\cdot Sin\,ky\cdot dy = \frac{\pi}{2}\cdot(f_0 \pm f_\pi),$$

wenn k unendlich-groß positiv ganz und $\left\{\begin{matrix}\text{ungerade}\\ \text{gerade}\end{matrix}\right\}$ ist.

II. Betrachten wir jetzt dasselbe Integral, aber zwischen Grenzen genommen, welche zwischen $q\pi$ und $(q+1)\pi$ liegen, wo q positiv oder negativ ganz gedacht wird, und die wir durch $q\pi+g$ und $q\pi+h$ ausdrücken können. Setzt man aber $y = q\pi+z$, so wird das eben gedachte Integral

$$\int_{q\pi+g}^{q\pi+h} \frac{f_y}{Sin\,y}\cdot Sin\,ky\cdot dy = \int_g^h \frac{f_{q\pi+z}}{Sin(q\pi+z)}\cdot Sin(kq\pi+kz)\cdot dz.$$

Ist nun k positiv ganz gedacht, wenn auch unendlich-groß, so hat man, weil q positiv oder negativ ganz gedacht worden,

$Sin(q\pi+z) = (-1)^q\cdot Sin\,z$ und $Sin(kq\pi+kz) = (-1)^{kq}\cdot Sin\,kz$;

und die vorstehende Gleichung geht daher nun über in

$$\int_{q\pi+g}^{q\pi+h} \frac{f_y}{Sin\,y}\cdot Sin\,ky\cdot dy = (-1)^{(k-1)q}\cdot\int_g^h \frac{f_{q\pi+z}}{Sin\,z}\cdot Sin\,kz\cdot dz.$$

Hieraus folgt:

α) wenn g und h positiv und $g<h<\pi$ ist (aus N. 1.)

5) $$\int_{q\pi+g}^{q\pi+h} \frac{f_y}{Sin\,y}\cdot Sin\,ky\cdot dy = 0 \text{ für } k=\infty \text{ und positiv ganz},$$

β) wenn $g=0$ aber h positiv und $<\pi$ (aus N. 2.)

6) $\int_{q\pi}^{q\pi+h} \frac{f_y}{Sin\, y} \cdot Sin\, ky \cdot dy = \pm \frac{\pi}{2} \cdot f_{q\pi}$, für $k = \infty$ und ganz, wo das (+) Zeichen gilt, wenn k ungerade, oder auch, wenn k gerade, aber gleichzeitig auch q gerade ist; während das (—) Zeichen genommen werden muß, wenn k gerade und gleichzeitig q ungerade ist;

γ) wenn $g > 0$ und $< \pi$, aber $h = \pi$ ist (aus N. 3.)

7) $$\int_{q\pi+g}^{(q+1)\pi} \frac{f_y}{Sin\, y} \cdot Sin\, ky \cdot dy = \pm \frac{\pi}{2} \cdot f_{(q+1)\pi} \text{ für } k = \infty,$$

wo das ($\pm$) Zeichen gilt, wenn $(k-1)(q+1)$ $\left\{\begin{matrix}\text{gerade}\\ \text{ungerade}\end{matrix}\right\}$, so daß also allemal das (+) Zeichen genommen werden muß, ausgenommen, wenn k und q beide gerade sind, in welchem letzteren Falle allein das (—) Zeichen gilt;

δ) endlich für $g = 0$ und $h = \pi$ (aus N. 4.)

8) $$\int_{q\pi}^{(q+1)\pi} \frac{f_y}{Sin\, y} \cdot Sin\, ky \cdot dy = (-1)^{(k-1)q} \frac{\pi}{2} \cdot (f_{q\pi} + (-1)^{k-1} f_{(q+1)\pi})$$

für $k = \infty$, so daß man den Werth $\frac{\pi}{2} \cdot [f_{q\pi} + f_{(q+1)\pi}]$ erhält, so oft k ungerade, — dagegen den Werth $\frac{\pi}{2} \cdot [f_{q\pi} - f_{(q+1)\pi}]$ hat, so oft k gerade und auch q gerade ist; während der Werth $\frac{\pi}{2} \cdot [-f_{q\pi} + f_{(q+1)\pi}]$ sich ergiebt, wenn k gerade und q ungerade ist; immer unter der Voraussetzung, daß k auch noch unendlich-groß gedacht wird.

Es fällt dabei in die Augen, daß alle diese Resultate 5.—8. auch noch gelten, wenn $q = 0$ gedacht wird, weil sie dann in die 1.—4. übergehen.

Dagegen muß für alle diese Resultate 1.—8. vorausgesetzt werden, daß f_y für alle Werthe von y, welche zwischen und an den Grenzen der bestimmten Integrale liegen, stets einen endlichen bestimmten Werth hat, während es jedoch gleichgültig

ist, ob alle diese Werthe von f_y ein einziges Gesetz der Stetigkeit befolgen, oder einmal oder beliebig oft dieses Gesetz ändern.

III. Setzt man in 5.–8. $q=-1$, so erhält man noch

$$9)\quad \int_{-\pi+g}^{-\pi+h} \frac{f_y}{Sin\, y}\cdot Sin\, ky\cdot dy = 0 \quad \text{für } k=+\infty \text{ und ganz,}$$

wo $-\pi+g$ und $-\pi+h$ beliebige negative Grenzen sind, deren absoluten Werthe zwischen 0 und π liegen;

$$10)\quad \int_{-\pi}^{-\pi+h} \frac{f_y}{Sin\, y}\cdot Sin\, ky\cdot dy = \pm\frac{\pi}{2}\cdot f_{-\pi} \quad \text{für } k=+\infty,$$

wo das $(\pm)$ Zeichen gilt, je nachdem $k \begin{Bmatrix}\text{ungerade}\\ \text{gerade}\end{Bmatrix}$;

$$11)\quad \int_{-\pi+g}^{0} \frac{f_y}{Sin\, y}\cdot Sin\, ky\cdot dy = \frac{\pi}{2}\cdot f_0 \quad \text{für } k=+\infty \text{ und ganz}$$

während die Grenze $-\pi+g$ beliebig negativ, aber an sich $<\pi$ ist; endlich

$$12)\quad \int_{-\pi}^{0} \frac{f_y}{Sin\, y}\cdot Sin\, ky\cdot dy = \frac{\pi}{2}[\pm f_{-\pi}+f_0] \quad \text{für } k=\infty,$$

wo das $(\pm)$ Zeichen gilt, je nachdem $k \begin{Bmatrix}\text{ungerade}\\ \text{gerade}\end{Bmatrix}$.

Nur muß f_y innerhalb der Grenzwerthe von y stets einen endlichen bestimmten Werth behalten.

IV. Es sey endlich $\int_0^{r\pi+h} \frac{f_y}{Sin\, y}\cdot Sin\, ky\cdot dy$ auszuwerthen, während k positiv ganz und unendlich-groß gedacht ist.

Man kann dieses Integral zerlegen in

$$\int_0^{\pi} + \int_{\pi}^{2\pi} + \int_{2\pi}^{3\pi} + \cdots + \int_{q\pi}^{(q+1)\pi} + \cdots + \int_{(r-1)\pi}^{r\pi} + \int_{r\pi}^{r\pi+h}.$$

Setzt man daher statt dieser einzelnen bestimmten Integrale ihre Werthe (aus N. 8. und N. 6.), so erhält man, wenn $h>0$ aber $<\pi$ gedacht ist,

$$13)\quad \int_0^{r\pi+h} \frac{f_y}{Sin\, y} \cdot Sin\, ky \cdot dy$$
$$= \pi[\tfrac{1}{2}f_0 \pm f_\pi + f_{2\pi} \pm f_{3\pi} + f_{4\pi} \pm \cdots + (-1)^{(k-1)r} f_{r\pi}],$$

wo die oberen (+) Zeichen alle gelten; wenn k ungerade, die unteren (—) Zeichen dagegen, so oft k, obgleich unendlich-groß doch gerade gedacht wird.

Und für $h = 0$ findet sich eben hieraus

$$14)\quad \int_0^{r\pi} \frac{f_y}{Sin\, y} \cdot Sin\, ky \cdot dy$$
$$= \pi[\tfrac{1}{2}f_0 \pm f_\pi + f_{2\pi} \pm f_{3\pi} + f_{4\pi} \pm \cdots \pm \tfrac{1}{2}f_{r\pi}],$$

wo im letzten Gliede das (+) Zeichen gilt, wenn r gerade ist, während so oft r ungerade ist, auch für dies letzte Glied, wie für die übrigen Glieder das (±) Zeichen gilt, je nachdem

k $\left\{\begin{matrix}\text{ungerade}\\ \text{gerade}\end{matrix}\right\}$ gedacht wird.

Anmerkg. Die in den NN. 13. 14. gefundenen Resultate sind übrigens nichts anders als die Summe der Werthe derselben Integrale, aber zwischen $y = 0$ und $y = \varepsilon$, dann zwischen $y = \pi - \varepsilon$ und $y = \pi + \varepsilon$, hierauf zwischen $y = 2\pi - \varepsilon$ und $y = 2\pi + \varepsilon$, ferner zwischen $y = 3\pi - \varepsilon$ und $y = 3\pi + \varepsilon$, u. s. w. f., zuletzt zwischen $y = r\pi - \varepsilon$ und $y = r\pi + \varepsilon$ (in N. 13.) oder $y = r\pi$ (in N. 14.) genommen, während ε beliebig klein aber positiv gedacht wird, — wie aus II. vollkommen deutlich hervorgeht*). — Unser Integral (in N. 13. oder N. 14.) wird also nur deshalb nicht der Null gleich, weil dicht an den Werthen 0, π, 2π, 3π, ⋯ $q\pi$, ⋯ $r\pi$ von y, der Nenner $Sin\, y$ des Ausdrucks unter dem

*) Solche bestimmte Integrale, zwischen Grenzen die unendlich nahe an einander liegen, genommen, und die nur deshalb einen bestimmten endlichen Werth haben, weil die zu integrirende Funktion innerhalb dieser Grenzen unendlich groß wird, sind es, welche Cauchy „singuläre Integrale" genannt hat.

Integralzeichen unendlich-klein und für diese Werthe selbst, der Null gleich wird.

§. 66.

Daß aber ein Integral von der Form

$$\int_g^h \varphi_y \cdot Sin\, ky \cdot dy \quad \text{für} \quad k = \infty,$$

in welchem g und h beliebig reell gedacht sind, im Allgemeinen der Null gleich werden müsse, wie groß auch die Differenz $h-g$ der Grenzwerthe von y seyn mag, geht am deutlichsten hervor, wenn man $ky = z$ setzt, wodurch

$$1) \quad \int_g^h \varphi_y \cdot Sin\, ky \cdot dy = \frac{1}{k} \cdot \int_{gk}^{hk} \varphi_{z:k} \cdot Sin\, z \cdot dz$$

wird, wo das Produkt zur Rechten, den unendlich-kleinen Faktor $\frac{1}{k}$ hat, während der zweite Faktor nur in Ausnahmsfällen unendlich-groß werden kann, wenn auch der Unterschied der Grenzen gk und hk, nämlich $(h-g)k$, jetzt unendlich-groß geworden ist.

Man wird sich davon überzeugen, wenn man das Integral

$$2) \quad \int_{gk}^{hk} \varphi_{z:k} \cdot Sin\, z \cdot dz$$

in drei Theile zerlegt, das erstere von $z = gk$ bis zu dem nächsten Vielfachen $m\pi$ von π genommen, so daß, wenn $m\pi - gk = \alpha$ gesetzt wird $\alpha < \pi$ ist, — das andere zwischen den Grenzen $z = m\pi$ und $z = n\pi$ genommen, wo n die größeste Zahl ist, welche anzeigt, wie oft π in hk enthalten, — endlich das dritte von $z = n\pi$ an bis $z = hk$ hin, wo, wenn $hk - n\pi = \beta$ gesetzt wird, $\beta < \pi$ ist; dabei können m und n beliebig positive oder negative ganze Zahlen seyn. Das erstere dieser drei Integrale geht, wenn man $z = m\pi - y$ setzt, über in

$$(-1)^{m+1} \cdot \int_0^\alpha \varphi_{(m\pi - y):k} \cdot Sin\, y \cdot dy,$$

während $\frac{m\pi}{k} = g + \frac{\alpha}{k}$ eine endliche Zahl und $\frac{y}{k}$ jedenfalls unendlich-klein wird, da der größeste Werth von y noch $< \pi$ ist. Dieses Integral hat aber einen endlichen Werth, so lange es nicht ein unterbrochenes ist (S. VIII. Th. §§. 90. 92. 93.), d. h. so lange für alle Werthe von y, welche von $y = 0$ an bis zu $y = \alpha$ hin sich erstrecken,

$$dy \cdot \varphi_{g + \frac{\alpha - y \pm dy}{k}} = \frac{1}{\infty},$$

d. h. wenn

a) $\varepsilon \cdot \varphi_{g+\varepsilon} = \frac{1}{\infty}$ wird für $\varepsilon = \frac{1}{\infty}$.

Genau dasselbe gilt von dem dritten der drei Integrale, welches, wenn man $z = n\pi + y$ setzt, in

$(-1)^n \cdot \int_0^\beta \varphi_{(n\pi+y):k} \cdot Sin\, y \cdot dy$ übergeht, während

$\frac{n\pi}{k} = \frac{hk - \beta}{k} = h - \frac{\beta}{k}$ eine endliche Zahl und $\frac{y}{k}$ stets unendlich-klein ist. Auch dieses Integral hat einen endlichen Werth, so lange es nicht zu den unterbrochenen gehört, d. h. so lange für alle Werthe von y, welche von $y = 0$ bis zu $y = \beta$ hin liegen,

$$dy \cdot \varphi_{h - \frac{\beta - y \pm dy}{k}} = \frac{1}{\infty}$$

d. h.

b) $\varepsilon \cdot \varphi_{h-\varepsilon} = \frac{1}{\infty}$ wird für $\varepsilon = \frac{1}{\infty}$.

Das mittlere der drei Integrale endlich, in welche das Integral 2.) zerlegt worden, nämlich

$$\int_{m\pi}^{n\pi} \varphi_{z:k} \cdot Sin\, z \cdot dz$$

zerlegt sich in $n-m$ einzelne Integrale d. h. in die Summe

$$\int_{m\pi}^{(m+1)\pi} + \int_{(m+1)\pi}^{(m+2)\pi} + \cdots + \int_{(m+q)\pi}^{(m+q+1)\pi} + \cdots + \int_{(n-1)\pi}^{n\pi},$$

während jedes derselben, z. B.

$$\int_{(m+q)\pi}^{(m+q+1)\pi} \varphi_{z:k} \cdot Sin\,z \cdot dz,$$

indem man $(m+q)\pi+y = z$ setzt (da q positiv ganz vorausgesetzt wird) in

$$(-1)^{m+q} \cdot \int_0^{\pi} \varphi_{[(m+q)\pi+y]:k} \cdot Sin\,y \cdot dy$$

übergeht. Man hat daher

3) $$\int_{m\pi}^{n\pi} \varphi_{z:k} \cdot Sin\,z \cdot dz =$$

$$(-1)^m \cdot \Big[\int_0^{\pi} \Big(\varphi_{(m\pi+y):k} - \varphi_{[(m+1)\pi+y]:k} + \varphi_{[(m+2)\pi+y]:k} - \cdots \pm \varphi_{[(n-1)\pi+y]:k}\Big) \times Sin\,y \cdot dy.$$

Nimmt nun die Funktion φ_z von $z = g$ an bis zu $z = h$ hin, oder nur von $z = \frac{m\pi}{k}$ an bis zu $z = \frac{n\pi}{k}$ hin, immerfort ab, während sie immer positiv bleibt, so ist die Reihe unter dem Integralzeichen (da sie immer kleiner werdende Glieder hat mit abwechselnden Vorzeichen) **kleiner** als ihr erstes Glied und größer als ihre vereinten beiden ersten Glieder; **demnach hat das Integral 3.) einen endlichen Werth**, so lange keines der Theil-Integrale ein unterbrochenes ist, d. h. so lange

$$\varepsilon \cdot \varphi_{(m\pi+y\pm\varepsilon):k} = \frac{1}{\infty}$$

ist für $k=\infty$, $\varepsilon = \frac{1}{\infty}$ und für alle Werthe von y, welche von $y = 0$ an bis $y = (n-m)\pi$ hin gehen; und diese Bedingung ist ausgedrückt in der Gleichung

$\left(\text{weil } \frac{m\pi}{k} = g + \frac{\alpha}{k} \text{ ist}\right)$

c) $$dy \cdot \varphi_{y\pm dy} = \frac{1}{\infty} \quad \text{von } y = g \text{ an bis } y = h \text{ hin;}$$

in welcher Bedingung die Bedingungen a) und b) bereits mit enthalten sind.

Dasselbe ist aber der Fall, (d. h. das Integral 3. hat

einen endlichen Werth), wenn z von g an bis $z = h$ hin, oder doch von $z = \frac{m\pi}{k}$ an bis zu $z = \frac{n\pi}{k}$ hin, immerfort wächst, dabei aber immerfort positiv bleibt, weil man dann die aus $n-m$ Gliedern bestehende Reihe nur in umgekehrter Ordnung schreiben darf, um wieder stets abnehmende Glieder mit abwechselnden Vorzeichen zu haben.

Dasselbe gilt nun auch, wenn die Funktion φ_z von $z = g$ an bis zu $z = h$ hin beliebig oft wächst und abnimmt, wenn solche nur immer positiv bleibt, weil man dann das ganze von $z = g$ bis $z = h$ genommene Integral 3.) zur Linken, zuvor in solche Theil-Integrale zerlegen kann, daß in den letzteren die Funktion φ_z entweder stets abnimmt oder stets wächst, so daß alle Theil-Integrale einen endlichen Werth haben, also daß das Gesammt-Integral auch einen endlichen Werth haben muß.

Endlich hat auch das fragliche Integral 3.) nämlich

$$3) \qquad \int_{m\pi}^{n\pi} \varphi_{z:k} \cdot Sin\, z \cdot dz$$

noch einen endlichen Werth, wenn auch φ_z von $z = g$ an bis $z = h$ hin, nicht nur beliebig oft wächst oder abnimmt, sondern auch beliebig oft vom Positiven zum Negativen oder vom Negativen zum Positiven übergeht oder stets negativ ist, — weil es immer eine positive Zahl c giebt, die so groß ist, daß $c + \varphi_z$ stets positiv bleibt. Dann hat nämlich dasselbe Integral 3.) einen endlichen Werth, so oft $c + \varphi_z$ statt φ_z gesetzt wird, während der eine Theil desselben, d. h.

$$\int_{m\pi}^{n\pi} c \cdot Sin\, z \cdot dz, \quad = (-1)^m \cdot \int_0^{(n-m)\pi} c \cdot Sin\, y \cdot dy$$
$$= (-1)^{m+1} \cdot c \cdot [Cos\,(n-m)\pi - Cos\, 0]$$

d. h. ebenfalls endlich ist. Die Differenz dieser letztern beiden ist aber wieder das obige Integral in N. 3.

Es hat also das Integral in 1.) zur Rechten, nämlich $\int_{gk}^{hk} \varphi_{z:k} \cdot Sin\, z \cdot dz$ für $k = \infty$ allemal einen endlichen Werth

und darum ist allemal das Integral in 1.) zur Linken $= \frac{1}{\infty}$ (oder $= 0$) für $k = \infty$, so lange nur die Bedingung c) erfüllt ist, d. h. es ist allemal

$$\text{I.} \begin{cases} \int_g^h \varphi_y \cdot Sin\, ky \cdot dy = \frac{1}{\infty} \quad \text{für} \quad k = \infty \\ \text{so oft nur} \quad dy \cdot \varphi_{y \pm dy} = \frac{1}{\infty} \quad \text{wird} \\ \text{für alle Werthe von } y, \text{ welche zwischen } g \text{ und } h \text{ liegen,} \end{cases}$$

wie weit auch die Grenzen g und h aus einander liegen mögen.

Gerade eben so findet man aber auch

$$\text{II.} \begin{cases} \int_g^h \varphi_y \cdot Cos\, ky \cdot dy = \frac{1}{\infty} \quad \text{für} \quad k = \infty, \\ \text{so oft nur} \quad dy \cdot \varphi_{y \pm dy} = \frac{1}{\infty} \quad \text{wird} \\ \text{für jeden Werth von } y, \text{ welcher zwischen } g \text{ und } h \text{ liegt.} \end{cases}$$

§. 67.

Aus dem vorstehenden Satze I. des §. 66. gehen nun aber wieder die Resultate NN. 23. 24. des §. 55. (d. h. die Nummern 1. und 2. des §. 65.) als besondere Fälle hervor. Es folgt nämlich unmittelbar aus der I. des §. 66., unter der Voraussetzung, daß f_y von $y = g$ an bis $y = h$ hin stets endlich bleibt,

$$1) \quad \int_g^h \frac{f_y}{Sin\, y} \cdot Sin\, ky \cdot dy = 0 \quad \text{für} \quad k = \infty,$$

sobald man daselbst $\frac{f_y}{Sin\, y}$ statt φ_y setzt, — so lange nur für alle Werthe von y, von $y = g$ an bis $y = h$ hin,

$$dy \cdot \varphi_{y+dy} \quad \text{d. h.} \quad dy \cdot \frac{f_{y+dy}}{Sin\,(y+dy)} = \frac{1}{\infty} \quad \text{wird;}$$

und dies letztere ist der Fall, so oft g und h, >0 und $<\pi$ sind.

Wollte man aber den Werth von

$$\int_0^h \frac{f_y}{Sin\, y} \cdot Sin\, ky \cdot dy \quad \text{für} \quad k = \infty$$

aus der I. des §. 66. ableiten, so müßte man daselbst

$\varphi_y = \dfrac{f_y - f_0}{Sin\, y}$ setzen, wo f_0 einen endlichen Werth haben soll,

damit eben jetzt die Bedingung

$$dy \cdot \varphi_{y+dy} = \frac{1}{\infty}$$

erfüllt ist, welches jedoch für $y = \pi$ nicht mehr behauptet werden kann. Setzt man daher noch $h < \pi$ voraus, so giebt die Gleichung I. des §. 66. sogleich, wenn $k = \infty$ vorausgesetzt wird,

$$\int_0^h \frac{f_y - f_0}{Sin\, y} \cdot Sin\, ky \cdot dy = 0 \quad \text{für} \quad k = \infty$$

d. h.

$$2) \qquad \int_0^h \frac{f_y}{Sin\, y} \cdot Sin\, ky \cdot dy = f_0 \cdot \int_0^h \frac{Sin\, ky}{Sin\, y} \cdot dy.$$

Setzen wir aber $ky = z$, so erhalten wir

$$3) \qquad \int_0^c \frac{Sin\, ky}{Sin\, y} \cdot dy = \int_0^{ck} \frac{Sin\, z}{k \cdot Sin(z:k)} \cdot dz;$$

setzt man nun $ck = \sqrt{k}$, so wird ck mit k zugleich unendlich-groß, während $c = \dfrac{1}{\sqrt{k}}$ unendlich-klein wird; und weil zu gleicher Zeit c der größeste Werth von $\dfrac{z}{k}$ und

$$k \cdot Sin \frac{z}{k} = z\left(1 - \frac{z^2}{3!\,k^2} + \frac{z^4}{5!\,k^4} - \text{ꝛc. ꝛc.}\right)$$

ist, so folgt, daß nun $k \cdot Sin \dfrac{z}{k} = z$ wird für $k = \infty$; so daß man aus 3.) erhält

4) $$\int_0^c \frac{Sin\, ky}{Sin\, y}\cdot dy = \int_0^\infty \frac{Sin\, z}{z}\cdot dz = \tfrac{1}{2}\pi$$

(nach §. 18. N. 51.), wenn nur $c = \frac{1}{\sqrt{k}} = \frac{1}{\infty}$ ist.

Setzen wir also in die 2.), c d. h. $\frac{1}{\sqrt{k}}$ statt h, so erhalten wir

5) $$\int_0^c \frac{f_y}{Sin\, y}\cdot Sin\, ky\cdot dy = \tfrac{1}{2}\pi\cdot f_0 \quad \text{für} \quad k=\infty,$$

wo $c = \frac{1}{\sqrt{k}} = \frac{1}{\infty}$ ist.

Addiren wir aber zu dieser Gleichung die Gleichung 1.), nachdem wir $c = \frac{1}{\sqrt{k}}$ statt des dortigen g gesetzt haben, und in welcher $h<\pi$ ist, so ergiebt sich

6) $$\int_0^h \frac{f_y}{Sin\, y}\cdot Sin\, ky\cdot dy = \tfrac{1}{2}\pi\cdot f_0, \quad \text{für} \quad k=\infty,$$

so lange nur $h<\pi$ ist; und in dieser Gleichung steckt die 23.) des §. 55. wie die 2.) des §. 65., während die vorstehende Gleichung 1.) sowohl die 24.) des §. 55. als auch die 1.) des §. 65. in sich schließt.

§. 68.

Wollte man aus der I. des §. 66. den Werth von $\int_0^h \frac{Sin\, ky}{y}\cdot f_y\cdot dy$ für $k=\infty$ ableiten, so würde man $\varphi_y = \frac{f_y - f_0}{y}$ nehmen, — vorausgesetzt, daß f_0 ein bestimmter endlicher Werth ist, — weil dann die dortige Bedingung

$$dy\cdot\varphi_{y+dy} \quad \text{d. h.} \quad dy\cdot\frac{f_{y+dy}-f_0}{y+dy} = \frac{1}{\infty}$$

auch für $y=0$ erfüllt ist. Dann hat man (aus I. des §. 66.), wie groß auch h gedacht werden mag,

$$\int_0^h \frac{f_y - f_0}{y} \cdot Sin\, ky \cdot dy = 0 \quad \text{für} \quad k = \infty,$$

d. h.

6) $$\int_0^h \frac{f_y}{y} \cdot Sin\, ky = f_0 \cdot \int_0^h \frac{Sin\, ky}{y} \cdot dy.$$

Setzt man aber $ky = z$, so hat man wieder (weil $k = \infty$) und wenn man §. 18. N. 51. zu Hilfe nimmt,

$$\int_0^h \frac{Sin\, ky}{y} \cdot dy = \int_0^\infty \frac{Sin\, z}{z} \cdot dz = \frac{\pi}{2};$$

also findet sich

7) $$\int_0^h \frac{Sin\, ky}{y} \cdot f_y \cdot dy = \frac{\pi}{2} \cdot f_0 \quad \text{für} \quad k = \infty,$$

wie groß auch der positive Werth h gedacht werden mag, so wie auch, wenn h beliebig klein (aber positiv) gedacht wird *).

Weil aber $\int_g^h = \int_0^h - \int_0^g$ ist, so folgt aus der 7.) noch, sobald man g und h positiv voraussetzt,

8) $$\int_g^h \frac{Sin\, ky}{y} \cdot f_y \cdot dy = 0 \quad \text{für} \quad k = \infty;$$

---

*) Man konnte auch den Werth w von $\int_0^h \frac{Sin\, ky}{y} \cdot dy$ für $k = \infty$, d. h. von $\int_0^\infty \frac{Sin\, z}{z} \cdot dz$ aus der Gleichung 6.) selbst ableiten. Setzt man nämlich

$\int_0^\infty \frac{Sin\, ky}{y} \cdot e^{-y} \cdot dy = v,$ so hat man, wenn nach k differenzirt wird,

$\partial v_k = \int_0^\infty e^{-y} \cdot Cos\, ky \cdot dy = \frac{1}{1+k^2}$ (nach §. 4. N. 9); folglich wird, wenn man wieder nach k integrirt,

$$v = Arc\, tg. k \quad \text{und für} \quad k = \infty, \quad v = \tfrac{1}{2}\pi.$$

Wird also in 6.) e^{-y} statt f_y und $h = \infty$ gesetzt, so geht der Ausdruck zur Linken in $\frac{1}{2}\pi$ über und man hat, weil $f_0 = e^{-0} = 1$ wird

$$\tfrac{1}{2}\pi = \int_0^\infty \frac{Sin\, ky}{y} \cdot dy = \int_0^\infty \frac{Sin\, z}{z} \cdot dz.$$

und diese Gleichung gilt auch noch, wenn g und h alle beide negativ sind, wie aus dieser 8.) hervorgeht, wenn man $y = -z$ setzt.

Dagegen findet sich noch aus der 7.), wenn die untere Grenze negativ, die obere positiv ist,

9) $$\int_{-g}^{h} \frac{Sin\, ky}{y} \cdot f_y \cdot dy = \pi \cdot f_0 \quad \text{für} \quad k = \infty;$$

denn es ist dasselbe Integral

$$= \int_{-g}^{0} \frac{Sin\, ky}{y} f_y \cdot dy + \int_{0}^{h} \frac{Sin\, ky}{y} f_y \cdot dy,$$

von denen das letztere (nach N. 7.) $= \frac{\pi}{2} f_0$ ist, während das erstere, wenn $-y$ statt y gesetzt wird,

$$= \int_{0}^{g} \frac{Sin\, ky}{y} f_{-y} \cdot dy, \quad \text{also (nach N. 7.) für} \quad k = \infty$$

ebenfalls $= \frac{\pi}{2} \cdot f_0$ wird *).

Bei dieser Gelegenheit hat sich aber auch ergeben, daß

10) $$\int_{-g}^{0} \frac{Sin\, ky}{y} f_y \cdot dy = \frac{\pi}{2} \cdot f_0 \quad \text{für} \quad k = \infty$$

ist, wenn die untere Grenze $(-g)$ negativ seyn sollte.

§. 69.

Aber auch aus der Gleichung II. des §. 66. lassen sich analoge Folgerungen ziehen.

Zuerst ist klar, daß wenn man in dieser Formel II. $\frac{f_y}{Cos\, y}$ statt φ_y setzt, man unmittelbar

1) $$\int_{0}^{h} \frac{f_y}{Cos\, y} \cdot Cos\, ky \cdot dy = 0 \quad \text{für} \quad k = \infty$$

---

*) Sollte bei $x = 0$, f_x in f_x' übergehen, so würde das Integral in 9.) zur Linken $= \frac{\pi}{4}\left(f_0 + f_0'\right)$ werden.

haben wird, so lange h positiv aber $<\frac{1}{2}\pi$, d. h. so lange $Cos\,y$ noch nicht Null wird.

Will man aber $\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{f_y}{Cos\,y} \cdot Cos\,ky \cdot dy$ für $k = \infty$ auswerthen, so setze man $y = \frac{1}{2}\pi - z$ und man erhält

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{f_y}{Cos\,y} \cdot Cos\,ky \cdot dy = \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{f_{\frac{1}{2}\pi-z}}{Sin\,z} \cdot Cos(\tfrac{1}{2}k\pi - kz) \cdot dz$$

$$= Cos\,\tfrac{1}{2}k\pi \cdot \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{f_{\frac{1}{2}\pi-z}}{Sin\,z} \cdot Cos\,kz \cdot dz + Sin\,\tfrac{1}{2}k\pi \cdot \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{f_{\frac{1}{2}\pi-z}}{Sin\,z} \cdot Sin\,kz \cdot dz.$$

Man wird daher wieder unterscheiden müssen 1) ob k unendlich-groß und gebrochen gedacht wird, in welchem Falle das vorstehende Resultat alles unbestimmt läßt, oder 2) ob k, obgleich unendlich-groß aber ganz seyn wird. In diesem zweiten Falle ist wieder zu unterscheiden a) ob k gerade, also von der Form 2r, oder b) ob k ungerade, also von der Form 2r+1 seyn wird.

Ist $k = 2r$ und r unendlich-groß und ganz, so giebt die vorstehende Gleichung

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{f_y}{Cos\,y} \cdot Cos\,ky \cdot dy = (-1)^r \cdot \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{f_{\frac{1}{2}\pi-z}}{Sin\,z} \cdot Cos\,kz \cdot dz,$$

während das Integral rechts zu den unterbrochenen gehört, also gar keinen Werth hat, so lange wir voraussetzen, daß f_y von $y = 0$ bis $y = \frac{1}{2}\pi$ hin endlich bleibt.

Ist $k = 2r+1$ und r unendlich-groß aber ganz, so giebt dieselbe Gleichung

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{f_y}{Cos\,y} \cdot Cos\,ky \cdot dy = (-1)^r \cdot \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{f_{\frac{1}{2}\pi-z}}{Sin\,z} \cdot Sin\,kz \cdot dz,$$

d. h. (nach §. 65. N. 2.)

2) $$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{f_y}{Cos\,y} \cdot Cos\,ky \cdot dy = (-1)^r \cdot \frac{\pi}{2} \cdot f_{\frac{1}{2}\pi} = \pm \frac{\pi}{2} \cdot f_{\frac{1}{2}\pi},$$

wo das obere (+) Zeichen gilt, wenn k von der Form 4n+1, das untere (—) Zeichen dagegen, wenn k von der Form 4n+3 und n unendlich-groß und ganz gedacht wird.

Daß

3) $\int_g^h \frac{f_y}{Cos\, y} \cdot Cos\, ky \cdot dy = 0$ ist für $k = \infty$,

so oft g und h zwischen $(q-\frac{1}{2})\pi$ und $(q+\frac{1}{2})\pi$ liegen, aber mit keiner dieser Grenzen selbst zusammenfallen, während q beliebig positiv ganz vorausgesetzt wird, — geht aus II. des §. 66. unmittelbar hervor, weil der Nenner $Cos\, y$ für keinen der Werthe von y Null wird, die Bedingung $dy \cdot \varphi_{y+dy} = \frac{1}{\infty}$ also erfüllt ist, so lange nur f_y für alle Werthe von y einen endlichen Werth hat, was wir hier stets stillschweigend voraussetzen.

Setzt man in $\int_{(q-\frac{1}{2})\pi}^{(q-\frac{1}{2})\pi+h} \frac{f_y}{Cos\, y} \cdot Cos\, ky \cdot dy$,

wo q positiv oder negativ ganz oder Null gedacht wird, $y = (q-\frac{1}{2})\pi + z$, so geht solches Integral über in

$(-1)^r \cdot \int_0^h \frac{f_{(q-\frac{1}{2})\pi+z}}{Sin\, z} \cdot Sin\, kz \cdot dz$, wenn k ungerade und $= 2r+1$ ist. Da nun das letztere Integral, wenn $h < \pi$ ist, (nach §. 65. N. 2.) für $r = \infty$, $= \frac{\pi}{2} \cdot f_{(q-\frac{1}{2})\pi}$ wird, so hat man gefunden

4) $\int_{(q-\frac{1}{2})\pi}^{(q-\frac{1}{2})\pi+h} \frac{f_y}{Cos\, y} \cdot Cos\, ky \cdot dy = \pm \frac{\pi}{2} \cdot f_{(q-\frac{1}{2})\pi}$

je nachdem $k = \left\{\begin{matrix} 4n+1 \\ 4n+3 \end{matrix}\right\}$ ist und wenn n unendlich-groß und ganz, h dagegen beliebig positiv und $< \pi$ gedacht wird.

Verfährt man aber auf analoge Weise mit dem Integral

$$\int_{(q-\frac{1}{2})\pi+h}^{(q+\frac{1}{2})\pi} \frac{f_y}{Cos\, y} \cdot Cos\, ky \cdot dy, \text{ —}$$

setzt man also $y = (q+\frac{1}{2})\pi - z$, so geht solches über in

$$(-1)^r \cdot \int_0^{\pi-h} \frac{f_{(q+\frac{1}{2})\pi-z}}{Sin\, z} \cdot Sin\, kz \cdot dz,$$

wenn $k=2r+1$ und r unendlich-groß und ganz ist. Man findet also (nach §. 65. N. 2.), wenn h positiv und $<\pi$ gedacht wird und q beliebig positiv oder negativ ganz oder Null,

$$5) \quad \int_{(q-\frac{1}{2})\pi+h}^{(q+\frac{1}{2})\pi} \frac{f_y}{Cos\, y} \cdot Cos\, ky \cdot dy = \pm \frac{\pi}{2} \cdot f_{(q+\frac{1}{2})\pi},$$

je nachdem $k=\begin{cases}4n+1\\4n+3\end{cases}$ ist, wenn nur n unendlich-groß und ganz gedacht wird.

Addirt man die 4.) und 5.) zu einander, so erhält man

$$\int_{(q-\frac{1}{2})\pi}^{(q+\frac{1}{2})\pi} \frac{f_y}{Cos\, y} \cdot Cos\, ky \cdot dy = \pm \frac{\pi}{2}(f_{(q-\frac{1}{2})\pi}+f_{(q+\frac{1}{2})\pi}),$$

je nachdem $k=\begin{cases}4n+1\\4n+3\end{cases}$ und n unendlich-groß aber positiv ganz gedacht wird.

Und daraus folgt, wenn r positiv ganz gedacht wird,

$$6) \quad \int_0^{(r+\frac{1}{2})\pi+h} \frac{f_y}{Cos\, y} \cdot Cos\, ky \cdot dy$$
$$= \pm \pi[\tfrac{1}{2} f_{\frac{1}{2}\pi} + f_{\frac{3}{2}\pi} + f_{\frac{5}{2}} + \cdots + f_{(r+\frac{1}{2})\pi}],$$

wenn h positiv und $<\pi$, und wo das obere (+) Zeichen gilt, wenn k (obgleich unendlich-groß aber) ganz und von der Form $4n+1$ ist, oder das untere (−) Zeichen, wenn k von der Form $4n+3$ ist.

Ist $h=0$, so gilt dieselbe Gleichung 6.) noch, sobald von dem letzten Gliede $f_{(r+\frac{1}{2})\pi}$ nur die Hälfte genommen wird.

Diese Muster werden übrigens dem Anfänger einen hinreichenden Einblick in die Art und Weise thun lassen, wie dergleichen Fragen behandelt werden müssen, weshalb wir nun zum Schlusse dieses Kapitels eilen.

§. 70.

Dirichlet (S. Crelle's Journal für Math. Bd. XVII.) findet noch die Summen oder vielmehr die Werthe der (endlichen oder unendlichen) Reihen

1) $H = S[C_b \cdot Cos\, b^2 w]$ und 2) $K = S[C_b \cdot Sin\, b^2 w]$,

wenn $w = \frac{2\pi}{n}$ und n positiv ganz ist und wenn die Summe F_x der endlichen oder unendlichen Reihe

3) $F_x = C_0 + C_1 \cdot Cos\, x + C_2 \cdot Cos\, 2x + C_3 \cdot Cos\, 3x + \cdots$

für jeden reellen Werth von x bekannt und gegeben ist.

Er geht nämlich aus von den beiden bestimmten Integralen $\int_0^\infty \frac{Cos\, z}{\sqrt{z}} dz$ und $\int_0^\infty \frac{Sin\, z}{\sqrt{z}} dz$, deren Werthe er als unbekannt ansieht und die bezüglich durch a und b bezeichnet werden können (S. §. 24. NN. 70. 71.) und er leitet daraus ab die Werthe der Integrale N. 75. des §. 25., jedoch in nachstehender Form

4) $\int_{-\infty}^{\infty} Cos \frac{x^2}{4w} \cdot Cos\, \mu x \cdot dx = 2\sqrt{w} \cdot [a \cdot Cos\, \mu^2 w + b \cdot Sin\, \mu^2 w]$,

5) $\int_{-\infty}^{\infty} Sin \frac{x^2}{4w} \cdot Cos\, \mu x \cdot dx = 2\sqrt{w} \cdot [b \cdot Cos\, \mu^2 w - a \cdot Sin\, \mu^2 w]$.

Multiplicirt man nun jede dieser beiden Gleichungen mit C_μ, — setzt man dann statt μ nach und nach 0, 1, 2, 3, ꝛc. ꝛc. bis s, wenn C_s der letzte der Koeffizienten in der Reihe 3.) zur Rechten ist, oder bis ins Unendliche, wenn die eben gedachte Reihe eine unendliche ist, — und addirt man zuletzt alle diese Gleichungen, so erhält man zur Linken Integrale, unter deren Integralzeichen $dx \cdot Cos \frac{x^2}{4w}$ oder $dx \cdot Sin \frac{x^2}{4w}$ mit der Reihe $C_0 + C_1 \cdot Cos\, x + C_2 \cdot Cos\, 2x + C_3 \cdot Cos\, 3x + \cdots$ multiplicirt erscheint, während die Integrale zwischen den Grenzen $x = -\infty$ und $x = +\infty$ genommen werden sollen, so daß x nach und nach alle Werthe von $-\infty$ an, durch Null hindurch bis zu $+\infty$ hin vorstellt. — Ist daher F_x der eben gedachten Reihe gleich für jeden dieser Werthe von x, d. h. gilt die Gleichung 3.) für jeden reellen Werth von x, so erhält man die Gleichungen

$$6) \quad \int_{-\infty}^{\infty} Cos\frac{x^2}{4w}\cdot F_x\cdot dx = 2\sqrt{w}\cdot[aH+bK],$$

$$7) \quad \int_{-\infty}^{\infty} Sin\frac{x^2}{4w}\cdot F_x\cdot dx = 2\sqrt{w}\cdot[bH-aK],$$

wo statt der Integrale zur Linken auch die doppelten, zwischen $x=0$ und $x=\infty$ genommenen Integrale gesetzt werden können, weil die Funktionen unter dem Integralzeichen sich nicht ändern, wenn $-x$ statt x gesetzt wird. — Aus diesen Gleichungen 6.) und 7.) findet man nun sogleich die durch H und K bezeichneten Reihen 1.) und 2.), in die Integrale

$$8) \quad \int_0^{\infty} Cos\frac{x^2}{4w}\cdot F_x\cdot dx \quad \text{und} \quad 9) \quad \int_0^{\infty} Sin\frac{x^2}{4w}\cdot F_x\cdot dx$$

ausgedrückt.

Um aber diese letzteren Integrale umzuformen, wird nun die obere Grenze ∞ in der Form $(4r+1)\pi$ und r positiv ganz aber unendlich-groß gedacht*) und dann jedes dieser Integrale 8.) und 9.) in die unendliche Reihe

$$\int_0^{\pi}+\int_{\pi}^{3\pi}+\int_{3\pi}^{5\pi}+\cdots+\int_{(4r-1)\pi}^{(4r+1)\pi} \quad \text{für} \quad r=\infty$$

zerlegt, — hierauf jedes dieser Integrale z. B. $\int_{(2q-1)\pi}^{(2q+1)\pi}$ (dadurch, daß man $2q\pi+x$ statt x setzt) in ein anderes verwandelt, welches zwischen $x=-\pi$ und $x=+\pi$ genommen ist, während man das allererste (zwischen $x=0$ und $x=\pi$ genommene) als die Hälfte desselben, aber zwischen $x=-\pi$ und $x=+\pi$ genommenen Integrals ansehen kann. Dann können alle unendlich-vielen Integrale (da sie alle zwischen denselben Grenzen $x=-\pi$ und $x=+\pi$ genommen sind) in ein einziges zusammengefaßt werden, welches zwischen

---

*) Damit dies erlaubt ist, muß natürlich nachgewiesen werden, daß $\int_{(4r+1)\pi}^{(4r+1)\pi+c}(\ldots)\cdot dx = 0$ oder vielmehr $=\frac{1}{\infty}$ wird, für jeden positiven Werth von c, sobald man $r=\infty$ sich denkt.

$x = -\pi$ und $x = +\pi$ genommen und zu gleicher Zeit das Doppelte desselben Integrals ist, wenn es zwischen $x = 0$ und $x = \pi$ genommen wird. — In diesem letzteren Integral ist nun der Ausdruck unter dem Integralzeichen das Produkt aus F_x multiplicirt mit einer unendlichen Reihe und namentlich ist in dem aus 8.) auf diesem Wege hervorgegangenen Integral diese Reihe so, daß sie in zwei Reihen zerlegt werden kann, die bezüglich $r+1$ und r Glieder haben, während r unendlich-groß und positiv ganz gedacht worden ist. Diese beiden Reihen, nachdem man den gemeinschaftlichen Faktor herausgerückt hat, sind (weil $w = \frac{2\pi}{n}$ gedacht worden ist)

10) $$\tfrac{1}{2} + Cos\, nx + Cos\, 2nx + Cos\, 3nx + \cdots + Cos\, rnx$$

und

11) $$Cos\, \tfrac{1}{2}nx + Cos\, \tfrac{3}{2}nx + Cos\, \tfrac{5}{2}nx + \cdots + Cos\, \frac{2r-1}{2}nx;$$

und diese Reihen summirt, geben bezüglich, wenn man der Kürze wegen $\frac{1}{2}nx = y$ setzt,

$$\frac{Sin(2r+1)y}{2\,Sin\, y} \quad \text{und} \quad \frac{Sin(2r+1)y}{Sin\, y} \cdot Cos\, y - \tfrac{1}{2}\, Cos(2r+1)y,$$

so daß nun zuletzt das Integral 8.)

$$\begin{aligned} = \frac{2}{n}\int_0^{\frac{1}{2}n\pi} \frac{Sin\, ky}{Sin\, y} \cdot F_{2y:n} \cdot Cos\, \frac{y^2}{2n\pi} \cdot dy \\ + \frac{2}{n}\int_0^{\frac{1}{2}n\pi} \frac{Sin\, ky}{Sin\, y} \cdot F_{2y:n} \cdot Cos\left(\tfrac{1}{2}n\pi + \frac{y^2}{2n\pi}\right) Cos\, y \cdot dy \\ - \frac{2}{n}\int_0^{\frac{1}{2}n\pi} Cos\, ky \cdot F_{2y:n} \cdot Cos\left(\tfrac{1}{2}n\pi + \frac{y^2}{2n\pi}\right) \cdot dy \end{aligned}$$

findet, wo k ungerade *) und unendlich-groß ist, während

---

*) Es ist höchst wichtig, daß k hier allemal ungerade ist, obgleich unendlich-groß. Die §§. 67. 68. nämlich lassen sehen, daß diese letzteren drei Integrale ganz andere Werthe haben, wenn k, obgleich unendlich-groß aber gerade gedacht wird.

die Werthe dieser letztern drei Integrale aus den §§. 67. 68. entnommen werden können.

Ganz analoges findet sich für das Integral 9.).

Es versteht sich dabei von selbst, daß, wenn man in den Gleichungen 6.) und 7.), nachdem die Integrale zur Linken auf die eben beschriebene Weise ausgewerthet sind, statt n irgend eine kleine Zahl, etwa 1 setzt, ferner F_x sehr einfach annimmt, etwa $=1$, so daß $C_0 = 1$ und $C_\mu = 0$ für $\mu > 0$ wird, — dann H und K unmittelbar bekannt seyn werden, so daß dieselben Gleichungen zu gleicher Zeit zur Bestimmung der Konstanten a und b, d. h. der Werthe der Integrale

$\int_0^\infty \frac{Cos\, z}{\sqrt{z}} \cdot dz$ und $\int_0^\infty \frac{Sin\, z}{\sqrt{z}} \cdot dz$ dienen werden, im Falle man solche als unbekannt vorausgesetzt hat.

Siebentes Kapitel.

Die Fourier'schen Integrale.

§. 71.

Man kann in der Gleichung III. des §. 57. die Faktoren $Cos\, ax$ und $Sin\, ax$ unter die Integralzeichen (nach z) schreiben und dann in beiden Reihen die gleichvielten Glieder addiren. Denkt man nun daran, daß

$$Cos\, az \cdot Cos\, ax + Sin\, az \cdot Sin\, ax = Cos\, a(z-x)$$

ist, so erhält man die gedachte Gleichung in dieser Form:

$$\text{I.} \qquad \varphi_x = \frac{1}{\pi} \cdot S\left[\int_{-\pi}^{\pi} \varphi_z \cdot Cos\, a(z-x) \cdot dz\right]^{*)},$$

wenn von dem allerersten Gliede (für $a = 0$) nur die Hälfte genommen wird. — Dabei gilt diese Gleichung für alle Werthe von x, welche zwischen $-\pi$ und $+\pi$ liegen, aber nicht nothwendig an diesen Grenzen selbst.

Verfährt man aber genau eben so mit der Formel VI. des §. 60., so geht sie über in

$$\text{II.} \qquad \varphi_x = \frac{1}{a} \cdot S\left[\int_{-a}^{a} \varphi_z \cdot Cos\, b\frac{\pi}{a}(z-x) \cdot dz\right],$$

wenn von dem allerersten Gliede (für $b = 0$) nur die Hälfte genommen wird, während die Gleichung für alle Werthe von x

*) Man vergesse nicht die hier ein für allemal feststehende Bezeichnung, nach welcher jeder kleine deutsche Buchstabe nach und nach die Werthe 0, 1, 2, 3, 4, 5, etc. etc. annimmt, das Zeichen S aber die Summe der dadurch hervorgehenden Glieder bedeutet.

gilt, welche zwischen $-a$ und $+a$ liegen, aber nicht nothwendig mehr an diesen Grenzen selbst.

§. 72.

Denkt man sich nun $b\frac{\pi}{a} = \mu$, ferner $\frac{\pi}{a} = d\mu$ und $a = \infty$, so geht die II. sogleich über in

$$\text{III.} \qquad \varphi_x = \frac{1}{\pi} \cdot \int_0^\infty d\mu \cdot \left(\int_{-\infty}^\infty \varphi_z \cdot Cos\,\mu(z-x) \cdot dz \right),$$

wo von dem allerersten Gliede der jetzigen, durch $\int_0^\infty d\mu \cdot F_\mu$ ausgedrückten Summe von unendlich-vielen unendlich-kleinen Gliedern, nicht mehr bloß die Hälfte genommen zu werden braucht, weil solches jetzt ohnehin unendlich-klein ist; während die Gleichung für jeden Werth von x gilt, der zwischen $-\infty$ und $+\infty$ liegt, also für jeden reellen endlichen, wenn auch an sich noch so großen Werth von x.

Nimmt man rechts das Integral nach μ, von $\mu = -\infty$ bis $\mu = +\infty$, so erhält man, da die Differenzial-Funktion sich nicht ändert, wenn $-\mu$ statt μ geschrieben wird, das Doppelte, so daß man die Gleichung III. auch so schreiben kann, nämlich:

$$\text{IV.} \qquad \varphi_x = \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{-\infty}^\infty d\mu \cdot \left(\int_{-\infty}^\infty \varphi_z \cdot Cos\,\mu(z-x) \cdot dz \right),$$

welche Gleichung für jeden reellen Werth von x gilt.

Diese Gleichungen III. und IV. werden die Fourier'schen Integrale (im engern Sinne) genannt.

§. 73.

Weil

$$Cos\,\mu(z-x) = Cos\,\mu z \cdot Cos\,\mu x + Sin\,\mu z \cdot Sin\,\mu x$$

ist, so zerlegt sich das Integral in III. in zwei Integrale, und man hat

$$\text{III}^b.\quad \varphi_x = \frac{1}{\pi}\cdot\int_0^\infty\left(Cos\,\mu x\cdot\int_{-\infty}^\infty \varphi_z\cdot Cos\,\mu z\cdot dz\right)\cdot d\mu$$
$$+\frac{1}{\pi}\cdot\int_0^\infty\left(Sin\,\mu x\cdot\int_{-\infty}^\infty \varphi_z\cdot Sin\,\mu z\cdot dz\right)\cdot d\mu.$$

Ist nun $\varphi_{-x} = \varphi_x$, so wird das zweite dieser Integrale der Null gleich (nach VIII. Th. §. 88.) und man hat dann

$$\text{V.}\quad \varphi_x = \varphi_{-x} = \frac{2}{\pi}\cdot\int_0^\infty\left(Cos\,\mu x\cdot\int_0^\infty \varphi_z\cdot Cos\,\mu z\cdot dz\right)\cdot d\mu.$$

Ist aber $\varphi_{-x} = -\varphi_x$, so wird das erstere dieser Integrale $= 0$, und man hat

$$\text{VI.}\quad \varphi_x = -\varphi_{-x} = \frac{2}{\pi}\cdot\int_0^\infty\left(Sin\,\mu x\cdot\int_0^\infty \varphi_z\cdot Sin\,\mu z\cdot dz\right)\cdot d\mu$$

und alle diese Gleichungen gelten für jeden reellen endlichen, wenn auch an sich noch so großen Werth von x.

Anmerkg. Es versteht sich dabei von selbst, daß diese Formeln III.—VI. nicht anwendbar sind, sobald eines der Integrale mit unendlichen Grenzen nicht convergent seyn sollte.

§. 74.

Da alle diese Folgerungen mit dem Resultate III. des §. 72. stehen oder fallen, so ist es interessant, das Doppel-Integral zur Rechten in III. vorzunehmen und auszuwerthen, um zu sehen, ob und wann solches wirklich den Werth $\pi\cdot\varphi_x$ annimmt, den es nach der III. haben soll.

Um dies zu bewerkstelligen kann man zunächst versuchen, die doppelte Integration in umgekehrter Ordnung auszuführen. Wenn man aber dann auch sogleich

$$\int\varphi_z\cdot Cos\,\mu(z-x)\cdot d\mu = \frac{\varphi_z}{z-x}\cdot Sin\,\mu(z-x)$$

erhält, so kommt man doch für $\mu = \infty$ auf $Sin\,\infty$, — und wenn auch Poisson und nach ihm Rabe, $Sin\,\infty = 0$ genommen haben, so dürfen wir hier doch diesen Irrthum nicht theilen.

Der nächste Versuch, den man nun machen kann, ist, daß man das viel allgemeinere Integral

1) $$H = \int_0^\infty \left(e^{-c\mu} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_z \cdot Cos\,\mu(z-x) \cdot dz\right) \cdot d\mu$$

betrachtet und auswerthet, welches für $c = 0$ in das Fragliche übergeht. Integrirt man aber hier zuerst nach μ, so erhält man (nach §. 4. N. 9.)

2) $$\int_0^\infty e^{-c\mu} \cdot \varphi_z \cdot Cos\,\mu(z-x) \cdot d\mu = \varphi_z \cdot \frac{c}{(z-x)^2+c^2},$$

so lange nur c, wenn auch noch so klein, noch positiv ist.

Dadurch geht die 1.) über in

3) $$H = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_z \cdot \frac{c}{(z-x)^2+c^2} \cdot dz,$$

sobald nur c positiv ist, wenn auch noch so klein.

Dieses Integral (zur Rechten von 3.) würde nun offenbar mit c zugleich bis in's Unendliche abnehmen, wenn nicht der Nenner $(z-x)^2+c^2$ für $c = \frac{1}{\infty}$ und $z = x \pm \varepsilon$, wo $\varepsilon = 0$ $\left(\text{oder } \frac{1}{\infty}\right)$ ist, ebenfalls unendlich-klein würde. Zerlegt man daher dieses Integral in drei Theile, indem man den ersten von $z = -\infty$ bis zu $z = x-\varepsilon$, den andern von $z = x-\varepsilon$ bis zu $z = x+\varepsilon$, den dritten aber von $z = x+\varepsilon$ bis zu $z = +\infty$ nimmt, so wird das erste und das dritte dieser Theil-Integrale, wenn sie (wie hier vorausgesetzt wird) convergent sind, mit c zugleich unendlich-klein werden, während der mittlere Theil, nämlich

4) $$\int_{x-\varepsilon}^{x+\varepsilon} \varphi_z \cdot \frac{c}{(z-x)^2+c^2} \cdot dz = \varphi_x \cdot \int_{x-\varepsilon}^{x+\varepsilon} \frac{c}{(z-x)^2+c^2} \cdot dz$$

werden wird, wenn φ_z von $z = x-\varepsilon$ an bis zu $z = x+\varepsilon$ hin, während $\varepsilon = \frac{1}{\infty}$ gedacht worden ist, nur unmerklich sich ändert, d. h. als constant und $= \varphi_x$ angesehen und eben

deshalb außerhalb des Integralzeichens gesetzt werden kann. Weil aber

$$\int \frac{1}{(z-x)^2+c^2}\cdot dz = \frac{1}{c}\cdot\frac{1}{Tg}\frac{z-x}{c},$$

also

$$5)\quad \int_{x-\varepsilon}^{x+\varepsilon} \frac{c}{(z-x)^2+c^2}\cdot dz = Arc\,tg.\frac{\varepsilon}{c} - Arc\,tg.\frac{-\varepsilon}{c}$$

$$= 2\,Arc\,tg.\frac{\varepsilon}{c} = \pi$$

wird, so oft $\frac{\varepsilon}{c} = \infty$, d. h. $c = \frac{\varepsilon}{\infty}$ gedacht wird, so ergiebt sich für $c = \frac{\varepsilon}{\infty}$, wo $\varepsilon = \frac{1}{\infty}$ ist,

$$6)\quad H \text{ d. h. jetzt } \int_0^\infty d\mu\cdot\left(\int_{-\infty}^{\infty}\varphi_z\cdot Cos\,\mu(z-x)\cdot dx\right) = \pi\cdot\varphi_x,$$

welche Gleichung von der Formel III. des §. 72. nicht verschieden ist *).

Weil aber auch dieses Verfahren, namentlich hinsichtlich der Anwendung der Formel 2.) für $c = \frac{\varepsilon}{\infty}$, wo schon $\varepsilon = \frac{1}{\infty}$ ist, nicht so ganz strenge zu seyn scheint, so versuche man noch einmal das erstere Verfahren (ohne den Faktor $e^{-c\mu}$ anzuhängen), d. h. man integrire gerade zu, um

$$7)\quad N = \int_0^\infty d\mu\cdot\left(\int_{-\infty}^{\infty}\varphi_z\cdot Cos\,\mu(z-x)\cdot dz\right)$$

auszuwerthen, zuerst nach μ, aber statt sogleich zwischen den Grenzen $\mu = 0$ und $\mu = \infty$, zunächst zwischen den Grenzen $\mu = 0$ und $\mu = k$, indem man k in der Rechnung fortführt und zuletzt erst $k = \infty$ nimmt. Man erhält dann

$$8)\quad \int_0^k \varphi_z\cdot Cos\,\mu\cdot(z-x)\cdot d\mu = \frac{\varphi_z}{z-x}\cdot Sin\,k(z-x)$$

---

*) Das Integral 5.) ist übrigens wiederum eines von denen, welche Cauchy singuläre Integrale genannt hat.

und hat nun den gesuchten Werth N zu finden aus der Gleichung

$$9)\qquad N=\int_{-\infty}^{\infty}\varphi_z\cdot\frac{Sin\,k(z-x)}{z-x}\cdot dz\quad \text{für}\quad k=\infty,$$

oder, wenn man $z=x+y$ setzt und x beliebig reell und endlich, wenn auch noch so groß sich denkt,

$$10)\qquad N=\int_{-\infty}^{\infty}\varphi_{x+y}\cdot\frac{Sin\,ky}{y}\cdot dy\quad \text{für}\quad k=\infty.$$

Zerlegt man aber dieses Integral in zwei Theile, so daß der erstere von $y=-\infty$ bis $y=0$, der andere aber von $y=0$ bis $y=+\infty$ geht, so erhält man, wenn in dem ersteren Theil $-y$ statt y gesetzt wird,

$$11)\qquad N=\int_{0}^{\infty}\varphi_{x-y}\cdot\frac{Sin\,ky}{y}\cdot dy+\int_{0}^{\infty}\varphi_{x+y}\cdot\frac{Sin\,ky}{y}\cdot dy,$$

wenn jedes dieser Integrale für $k=\infty$ genommen wird. Die Formel 7. des §. 68. zeigt aber, daß das erstere dieser Integrale $=\frac{\pi}{2}\cdot\varphi_{x-0}$, das andere dagegen $=\frac{\pi}{2}\cdot\varphi_{x+0}$ ist d. h. also: wenn zufällig bei $x=\alpha$ die Form φ_x in eine neue Form φ_x' übergehen sollte, so ist für $x=\alpha$ das erstere Integral $=\frac{\pi}{2}\cdot\varphi_\alpha$, das andere dagegen $=\frac{\pi}{2}\cdot\varphi_\alpha'$.

Aus dieser Untersuchung geht also unzweifelhaft hervor, daß der Werth N unseres Integrals wirklich $=\pi\cdot\varphi_x$, daß also die Gleichung III. eine richtige ist, so lange φ_x um x herum stetig gedacht wird. Sollte aber bis zu einem bestimmten Werth α von x hin, die Form φ_x, dagegen von $x=\alpha$ an eine andere Form φ_x' an die Stelle von φ_x treten, so würde man für diesen Werth α von x finden:

$$\text{VII.}\qquad \int_0^\infty d\mu\cdot\left(\int_{-\infty}^{\infty}\varphi_z\cdot Cos\,\mu(z-\alpha)\cdot dz\right)=\frac{\pi}{2}(\varphi_\alpha+\varphi_\alpha')\ ^{*)}.$$

*) Genau dasselbe geht auch aus dem anderen Verfahren (NN. 1.—4.) hervor, in so ferne die Gleichung 4.) nun so geschrieben werden muß, nämlich (für $x=\alpha$)

§. 75.

Nimmt man in N. 7. des §. 74. das Integral nach z, statt zwischen den Grenzen $-\infty$ und $+\infty$, jetzt zwischen den Grenzen g und h, wo $g<h$ gedacht wird, so erhält man, wenn zuerst nach μ integrirt wird, und wenn man genau wie im §. 74. verfährt,

$$\int_0^\infty d\mu \cdot \left(\int_g^h \varphi_z \cdot Cos\,\mu(z-x)\cdot dz\right) = \int_g^h \varphi_z \cdot \frac{Sin\,k(z-x)}{z-x}\cdot dz$$
$$= \int_{g-x}^{h-x} \varphi_{x+y}\cdot \frac{Sin\,ky}{y}\cdot dy \quad \text{für} \quad k=\infty;$$

und dieses Integral ist (nach N. 8. des §. 68.) der Null gleich, sobald $g-x$ und $h-x$ beide positiv oder beide negativ sind, d. h. so lange x außerhalb des Raumes von g bis h liegt, d. h. so lange entweder $x<g<h$ oder $x>h>g$ ist.

Dagegen ist dasselbe Integral (nach N. 9. des §. 68.) $=\pi\cdot\varphi_x$, so oft x innerhalb der Grenzen g und h liegt, d. h. so oft $g<x<h$ ist; während dasselbe Integral $=\frac{\pi}{2}\cdot\varphi_x$ wird, sowohl für $x=g$, als auch für $x=h$ (das erstere nach §. 68. N. 7., das andere nach §. 68. N. 10.). — Sollte endlich bei $x=\alpha$ die Form φ_x in eine neue Form $\varphi_x{}'$ übergehen, so würde dasselbe Integral für $x=\alpha$, wenn $g<\alpha<h$ ist, $=\frac{\pi}{2}(\varphi_\alpha+\varphi_\alpha{}')$, — für $x=\alpha=g$

$$\int_{\alpha-\varepsilon}^{\alpha+\varepsilon} \varphi_z\cdot\frac{c}{(z-\alpha)^2+c^2}\cdot dz$$
$$=\int_{\alpha-\varepsilon}^{0}\varphi_z\cdot\frac{c}{(z-\alpha)^2+c^2}\cdot dz+\int_0^{\alpha+\varepsilon}\varphi_z{}'\cdot\frac{c}{(z-\alpha)^2+c^2}\cdot dz,$$

während nun das erstere dieser Integrale zur Rechten

$$=\varphi_\alpha\cdot\frac{\pi}{2}$$

das andere dagegen $=\varphi_\alpha{}'\cdot\frac{\pi}{2}$

gefunden wird, wenn man jenes Verfahren hier ebenfalls weiter fortsetzt.

aber, $=\frac{\pi}{2}\cdot\varphi_{\alpha}'$, so wie für $x=\alpha=h$, $=\frac{\pi}{2}\cdot\varphi_{\alpha}$ seyn; — wie alles deutlich hervorgeht, wenn man das Verfahren anwendet, welches im §. 74. zu der N. 11. geführt hat, und dann noch die NN. 7. und 10. des §. 68. in Anwendung bringt. — Man hat also sonach

$$\text{VIII.} \int_0^\infty d\mu\cdot\left(\int_g^h \varphi_z\cdot Cos\,\mu(z-x)\cdot dz\right)=\left\{\begin{matrix}0\\ \frac{\pi}{2}\cdot(\varphi_x+\varphi_x')\end{matrix}\right.$$

je nachdem $x\left\{\begin{matrix}\text{außerhalb}\\ \text{innerhalb}\end{matrix}\right\}$ der Grenzen g und h liegt, während $\frac{\pi}{2}(\varphi_x+\varphi_x')$ in $\pi\cdot\varphi_x$ übergeht, so oft für den fraglichen Werth von x die Stetigkeit der Form φ_x nicht unterbrochen wird, also $\varphi_x'=\varphi_x$ ist. — Ferner ist

$$\text{VIII.}_1 \quad \text{dasselbe Doppel-Integral} = \left\{\begin{matrix}\frac{\pi}{2}\cdot\varphi_g & & x=g\\ & \text{für} & \\ \frac{\pi}{2}\cdot\varphi_h & & x=h\end{matrix}\right.$$

wo φ_g' statt φ_g gesetzt werden muß, wenn die Funktion φ_x bei $x=g$ in die neue Form φ_x' übergeht.

§. 76.

Ganz auf demselben Wege findet man

$$\int_0^\infty d\mu\cdot\left(\int_g^h \varphi_z\cdot Cos\,\mu(z+x)\cdot dz\right)=\int_g^h \varphi_z\cdot\frac{Sin\,k(z+x)}{z+x}\cdot dz$$

$$=\int_{g+x}^{h+x}\varphi_{y-x}\cdot\frac{Sin\,ky}{y}\cdot dy \quad \text{für } k=\infty,$$

welches letztere Integral (nach N. 8. des §. 68.) der Null gleich ist, wenn $-x$ außerhalb des Raumes von g bis h liegt; während dasselbe Integral, so lange $-x$ innerhalb des Raumes von g bis h liegt, $=\pi\cdot\varphi_{-x}$ ist [oder $=\frac{\pi}{2}\cdot(\varphi_{-x}+\varphi_{-x}')$, wenn φ_{-x} eben in die neue Form φ_{-x}'

übergeht]. — Für $x = -g$ oder $x = -h$ endlich, wird solches Integral bezüglich $= \frac{\pi}{2} \cdot \varphi_{-g}$, oder $= \frac{\pi}{2} \cdot \varphi_{-h}$, während φ_{-g}' statt φ_{-g} gesetzt werden muß, wenn gerade bei steigend gedachten Werthen von x, für $x = -g$ die Form φ_x in die Form φ_x' übergehen sollte.

Man hat also

$$\text{IX.} \quad \int_0^\infty d\mu \cdot \left(\int_g^h \varphi_z \cdot Cos\,\mu(z+x) \cdot dz\right) = \begin{cases} 0 \\ \frac{\pi}{2} \cdot (\varphi_{-x} + \varphi_{-x}') \end{cases},$$

je nachdem $-x \begin{Bmatrix} \text{außerhalb} \\ \text{innerhalb} \end{Bmatrix}$ der Grenzen g und h liegt, wo $\pi \cdot \varphi_{-x}$ statt $\frac{\pi}{2}(\varphi_{-x} + \varphi_{-x}')$ gesetzt wird, so oft für den gerade fraglichen Werth von x, $\varphi_{-x}' = \varphi_{-x}$ ist. — Ferner

$$\text{IX.}_1. \quad \text{dasselbe Doppel-Integral} = \begin{cases} \frac{\pi}{2} \cdot \varphi_{-g} & x = -g \\ & \text{für} \\ \frac{\pi}{2} \cdot \varphi_{-h} & x = -h \end{cases},$$

wo φ_{-g}' statt φ_{-g} zu stehen kommt, so oft gerade bei $x = -g$ die Form φ_x in die Form φ_x' übergeht.

Es versteht sich dabei, daß alle Resultate nur unter der Voraussetzung gelten, daß die vorkommenden bestimmten Integrale mit unendlichen Grenzen, allemal convergent sind.

§. 77.

Suchen wir nun die Werthe der Doppel-Integrale

$$1) \quad \int_0^\infty d\mu \cdot (Cos\,\mu x \cdot \int_g^h \varphi_z \cdot Cos\,\mu z \cdot dz) = J$$

und

$$2) \quad \int_0^\infty d\mu \cdot (Sin\,\mu x \cdot \int_g^h \varphi_z \cdot Sin\,\mu z \cdot dz) = L$$

unter der Voraussetzung, daß g und h positiv sind und $g < h$ ist, oder daß $g = 0$ ist, und daß sie convergent sind.

Man findet aber sogleich, wenn man addirt und subtrahirt,

3) $$J+L=\int_0^\infty d\mu\cdot\int_g^h \varphi_z\cdot Cos\,\mu(z-x)\cdot dz,$$

4) $$J-L=\int_0^\infty d\mu\cdot\int_g^h \varphi_z\cdot Cos\,\mu(z+x)\cdot dz.$$

Da nun das erstere dieser Integrale zur Rechten (nach §. 75.) für alle Werthe von x, welche zwischen g und h liegen $=\pi\cdot\varphi_x$ [oder $=\frac{\pi}{2}(\varphi_x+\varphi_x')$, wenn φ_x gerade in φ_x' übergeht], das andere Integral aber (nach §. 76.) für dieselben Werthe von x (eben weil $-x$ dann negativ ist, also nicht zwischen g und h liegt) der 0 gleich ist, — so hat man für diese Werthe von x,

$$J+L=\pi\cdot\varphi_x,\qquad J-L=0,$$

also $$J=L=\frac{\pi}{2}\cdot\varphi_x \quad\text{oder}\quad =\frac{\pi}{4}(\varphi_x+\varphi_x').$$

Man hat also für alle Werthe von x, welche zwischen g und h liegen,

X. $$\int_0^\infty d\mu\cdot\left(Cos\,\mu x\cdot\int_g^h \varphi_z\cdot Cos\,\mu z\cdot dz\right)=\frac{\pi}{2}\cdot\varphi_x,$$

XI. $$\int_0^\infty d\mu\cdot\left(Sin\,\mu x\cdot\int_g^h \varphi_z\cdot Sin\,\mu z\cdot dz\right)=\frac{\pi}{2}\cdot\varphi_x,$$

wo, wenn für $x=\alpha$ (welches zwischen g und h liegt) φ_x in φ_x' übergehen sollte, $\frac{1}{2}(\varphi_\alpha+\varphi_\alpha')$ statt φ_x (zur Rechten in X. und XI.) gesetzt werden muß, so oft man den Werth dieser Integrale für $x=\alpha$ haben will.

Für $x=g$ wird das Integral $J+L$ (in 3.) (nach §. 75.) $=\frac{\pi}{2}\cdot\varphi_g$, das Integral $J-L$ (in 4.) dagegen $=0$ (nach §. 76.); folglich werden für $x=g$ die Integrale X. und XI. bloß $=\frac{\pi}{4}\cdot\varphi_g$, wo, wenn für diesen Werth von x, die Form φ_x in eine neue Form φ_x' übergehen sollte, φ_g' statt φ_g gesetzt werden müßte.

Sollte aber g nicht positiv, sondern $=0$ seyn, so würde für $x=g=0$ das Integral $J+L$ (in 3.) jetzt $=\frac{\pi}{2}\cdot\varphi_0$, dagegen das andere Integral $J-L$ (in 4.) (eben weil jetzt $-x$ auch $=0=g$ ist) (nach §. 76.) ebenfalls $=\frac{\pi}{2}\cdot\varphi_0$ werden, so daß dann (für $x=g=0$) das Integral X., $=\frac{\pi}{2}\cdot\varphi_0$, das Integral XI. dagegen jetzt der Null gleich werden würde. Die XI. wird nun offenbar eine identische Gleichung $(0=0)$, während die X. übergeht in

$$\text{X}^a.\quad \int_0^\infty \left(d\mu\cdot\int_0^h \varphi_z\cdot Cos\,\mu z\cdot dz\right)=\frac{\pi}{2}\cdot\varphi_0.$$

Für $x=h$ werden die Integrale X. und XI., jedes $=\frac{\pi}{4}\cdot\varphi_h$.

Für alle positiven Werthe von x, welche außerhalb des Raumes von g bis h fallen, d. h. welche $<g$ oder $>h$ sind, wird das Integral $J+L$ (in 3.) (nach §. 75.) der Null gleich; weil aber dann auch $-x$ außerhalb des Raumes von g bis h liegt, so ist nun auch das andere Integral $J-L$ (in 4.) der Null gleich (nach §. 76.), und daher sind für alle diese positiven Werthe von x die Integrale X. und XI., jedes für sich, der Null gleich.

§. 78.

Nimmt man in X. und XI. $g=0$ und $h=+\infty$, so gehen diese Gleichungen (wenn die bestimmten Integrale mit unendlich-großen Grenzen convergent vorausgesetzt werden) über in

$$\text{XII.}\quad \int_0^\infty d\mu\cdot\left(Cos\,\mu x\cdot\int_0^\infty \varphi_z\cdot Cos\,\mu z\cdot dz\right)=\frac{\pi}{2}\cdot\varphi_x,$$

$$\text{XIII.}\quad \int_0^\infty d\mu\cdot\left(Sin\,\mu x\cdot\int_0^\infty \varphi_z\cdot Sin\,\mu z\cdot dz\right)=\frac{\pi}{2}\cdot\varphi_x$$

und letztere gelten für alle positiven Werthe von x, und die

XII. auch noch für $x = 0$; während jedoch der Werth dieser Integrale, für $x = \alpha$, wo α positiv, $= \frac{\pi}{4}(\varphi_\alpha + \varphi_\alpha')$ seyn würde, wenn gleichzeitig bei $x = \alpha$ die Funktion φ_x in eine neue Form φ_x' übergehen sollte.

Weil aber die Differenzial-Funktionen der Integrale (nach μ) in XII. und XIII. ihre Zeichen nicht ändern, wenn man $-\mu$ statt μ setzt, so folgt, daß wenn man dieselben Integrale von $\mu = -\infty$ bis zu $\mu = +\infty$ nimmt, dann der doppelte Werth sich ergiebt; man hat daher

XIV. $$\int_{-\infty}^{\infty} d\mu \cdot \left(Cos\,\mu x \cdot \int_0^\infty \varphi_z \cdot Cos\,\mu z \cdot dz\right) = \pi \cdot \varphi_x,$$

XV. $$\int_{-\infty}^{\infty} d\mu \cdot \left(Sin\,\mu x \cdot \int_0^\infty \varphi_z \cdot Sin\,\mu z \cdot dz\right) = \pi \cdot \varphi_x$$

für alle positiven Werthe von x, während die XIV. auch noch für $x = 0$ gilt, und wo zur Rechten statt φ_x geschrieben werden muß $\frac{1}{2}(\varphi_x + \varphi_x')$, wenn für den fraglichen Werth von x die Form φ_x gerade in φ_x' übergehen sollte.

§. 79.

Sollte $\varphi_{-x} = \varphi_x$ seyn, so gilt die Formel XIV. auch noch für alle negativen Werthe von x; weil sie auf beiden Seiten ein und dasselbe giebt, wenn $-x$ statt x gesetzt wird.

Sollte dagegen $\varphi_{-x} = -\varphi_x$ seyn, so würde es die Gleichung XV. seyn, welche nun auch noch für alle negativen Werthe von x gilt, weil jede Seite das entgegengesetzte Vorzeichen annimmt, wenn $-x$ statt x gesetzt wird. — Und weil dann auch $\varphi_0 = -\varphi_0 = 0$ seyn muß, so gilt dann dieselbe Gleichung XV. auch noch für $x = 0$, in so ferne sie dann in $0 = 0$ übergeht.

Setzt man also in der XIV. $\frac{\varphi_x + \varphi_{-x}}{2}$ statt φ_x, so daß sie für jeden reellen Werth von x gilt; — setzt man gleichzeitig $\frac{\varphi_x - \varphi_{-x}}{2}$ statt φ_x in XV., so daß die letztere auch

für alle reellen Werthe von x gelten muß, und addirt man beide Resultate, — denkt man dabei daran, daß (wenn $-z$ statt z gesetzt wird) man findet

$$\int_0^\infty \varphi_{-z} \cdot Cos\,\mu z \cdot dz = \int_{-\infty}^0 \varphi_z \cdot Cos\,z \cdot dz$$

und

$$\int_0^\infty \varphi_{-z} \cdot Sin\,\mu z \cdot dz = -\int_{-\infty}^0 \varphi_z \cdot Sin\,\mu z \cdot dz,$$

— so ergiebt sich aus diesem Verfahren sogleich wieder die III. des §. 72., also auch die IV. ebendaselbst.

§. 80.

Aber eben so findet man auch jetzt sogleich

XVI. $$\int_{-\infty}^{\infty} d\mu \cdot \left(\int_{-\infty}^{\infty} \varphi_z \cdot e^{\mu(z-x)\cdot i} \cdot dz\right) = 2\pi \cdot \varphi_x$$

und daß diese Formel für jeden reellen Werth von x gilt.

Denn da $e^{\mu(z-x)\cdot i} = Cos\,\mu(z-x) + i \cdot Sin\,\mu(z-x)$ ist, so zerlegt sich das Integral zur Linken sogleich in zwei Integrale, von denen das erstere (nach §. 72. IV.) $= 2\pi \cdot \varphi_x$, das andere aber, nämlich

$$i \cdot \int_{-\infty}^{\infty} d\mu \cdot \left(\int_{-\infty}^{\infty} \varphi_z \cdot Sin\,\mu(z-x) \cdot dz\right)$$

deshalb (nach VIII. Th. §. 88.) der Null gleich ist, weil das erste Integral (nach z) eine Funktion von μ seyn muß, welche ihren Werth in den entgegengesetzten umändert, so oft $-\mu$ statt μ gesetzt wird, so daß bei der nachfolgenden Integration nach μ, die Summe der negativen Theile die der positiven vernichtet.

Anmerkg. Fourier hat zugleich mit den Fourier'schen Reihen, diese Integrale in seiner Théorie de la chaleur (à Paris 1822.) mitgetheilt. Er hat sie zunächst dazu benutzt, um diejenigen linearen Partialgleichungen in einer, der Natur der Sache angemessenen Form zu integriren, zu denen die verschiedenen Probleme über die Verbreitung der Wärme führen. Die Verbreitung des Lichtes, der Elektricität, 2c. 2c., die Betrachtung

einer schwingenden Seite, u. s. w. führen zu ähnlichen Partial-gleichungen und deshalb auch zu analogen Anwendungen der Fourier'schen Reihen und Integrale.

Man macht aber auch von den Fourier'schen Integralen eine Anwendung auf die Auswerthung einer größeren Anzahl einfacher bestimmter Integrale. In so ferne nämlich in jeder der nächst vorhergehenden Formeln III.—XVI. ein Doppel-Integral ausgewerthet sich sieht, so darf man nur statt φ_z irgend eine solche Funktion von z setzen, für welche das erstere (bestimmte) Integral (nach z nämlich) bereits ausgewerthet ist, um sogleich ein einfaches bestimmtes Integral (nach μ nämlich) ausgewerthet zu haben. Folgende Beispiele mögen dies erläutern.

§. 81.

Erstes Beispiel. Nehmen wir zunächst $\varphi_x = 1$, so wird

$$\int \varphi_z \cdot Cos\,\mu(z-x) \cdot dz = \int Cos\,\mu(z-x) \cdot dz = \frac{1}{\mu} \cdot Sin\,\mu(z-x);$$

und es läßt sich daher jetzt keine der Formeln III.—XVI. anwenden, in welcher eine der Grenzen des innern Integrals (nach z) unendlich-groß ist, weil $Sin\,\infty$ unbestimmt und in der Rechnung nicht zulässig ist. — Die Gleichung VIII. des §. 75. dagegen giebt

$$1)\qquad \int_0^\infty \frac{Sin\,\mu(h-x)}{\mu} \cdot d\mu - \int_0^\infty \frac{Sin\,\mu(g-x)}{\mu} \cdot d\mu = \pi$$

für jeden Werth von x, welcher zwischen g und h liegt. Für $x = g$ selbst giebt derselbe §. 75. nur die Hälfte, d. h.

$$2)\qquad \int_0^\infty \frac{Sin\,(h-g)\mu}{\mu} \cdot d\mu = \tfrac{1}{2}\pi,$$

welches genau die N. 51. des §. 18. ist, weil hier $h-g$ positiv ist. — Aus dieser N. 2. folgt aber wieder die N. 1. unmittelbar.

Die übrigen Behauptungen des §. 75. bewähren sich nun alle für $\varphi_x = 1$. — Denkt man sich z. B. α zwischen g

und h, und $\varphi_x = 1$ von $x = g$ an bis $x = \alpha$, dagegen von $x = \alpha$ an bis $x = h$ hin $\varphi_x = \varphi_x{}' = 0$; so hat man (nach §. 75.) jetzt

$$\int_g^h \varphi_z \cdot Cos\,\mu(z-x)\cdot dz = \int_g^\alpha Cos\,\mu(z-x)\cdot dz + \int_\alpha^h 0\cdot dz$$

$$= \frac{Sin\,\mu(\alpha-x)}{\mu} - \frac{Sin\,\mu(g-x)}{\mu};$$

und die Formel VIII. des §. 75. giebt daher jetzt für $x = \alpha$

3) $$-\int_0^\infty \frac{Sin\,\mu(g-\alpha)}{\mu}\cdot dx = \frac{\pi}{2}(\varphi_\alpha + \varphi_\alpha{}') = \frac{\pi}{2}$$

und dies stimmt genau wieder mit der N. 51. des §. 18., in so ferne jetzt $g-\alpha$ negativ ist.

Die X. des §. 77. giebt für $\varphi_z = 1$,

4) $$\int_0^\infty \frac{Sin\,h\mu\cdot Cos\,x\mu}{\mu}\cdot d\mu - \int_0^\infty \frac{Sin\,g\mu\cdot Cos\,x\mu}{\mu}\cdot d\mu = \frac{\pi}{2}$$

für jeden Werth von x, welcher zwischen g und h liegt. Diese Gleichung geht für $g = 0$ in

5) $$\int_0^\infty \frac{Sin\,h\mu\cdot Cos\,x\mu}{\mu}\cdot d\mu = \frac{\pi}{2}$$

über, so lange x zwischen 0 und h liegt, d. h. so lange $x<h$ und positiv ist.

Da aber die Gleichung 5.) auch für jeden Werth von x gilt, der (wie in N. 4.) zwischen g und h liegt, so kann man die 4.) von der 5.) subtrahiren und man erhält:

6) $$\int_0^\infty \frac{Sin\,g\mu\cdot Cos\,x\mu}{\mu}\cdot d\mu = 0,$$

wenn x zwischen g und h liegt, d. h. wenn x positiv, beliebig groß und $x>g$ ist.

Man findet also

7) $$\int_0^\infty \frac{Sin\,h\mu\cdot Cos\,x\mu}{\mu}\cdot d\mu = \left.\begin{matrix}\frac{1}{2}\pi\\ 0\end{matrix}\right\}$$ je nachdem $x \lessgtr h$. *)

*) Verwandelt man $Sin\,h\mu\cdot Cos\,x\mu$ in die Summe

Daß für $x > h$ das Integral $= 0$ wird, folgt aber auch unmittelbar aus dem Schlusse des §. 77., welcher zeigt, daß das Integral X. allemal den Werth 0 annimmt, so oft x außerhalb des Raumes von g bis h liegt und positiv ist.

Dächte man sich $\varphi_x = 1$ von $x = g$ bis $x = \alpha$, dagegen φ_x übergehend in $\varphi_x' = 0$ von $x = \alpha$ bis $x = h$, während $g < \alpha < h$ gedacht wird, so giebt die X. für $x = \alpha$

$$\int_0^\infty d\mu \cdot \left(Cos\,\alpha\mu \cdot \int_g^\alpha Cos\,\mu z \cdot dz \right) = \frac{\pi}{4}(\varphi_\alpha + \varphi_\alpha') = \frac{\pi}{4}$$

d. h.

$$\int_0^\infty \frac{Cos\,\alpha\mu \cdot Sin\,\alpha\mu}{\mu} \cdot d\mu - \int_0^\infty \frac{Cos\,\alpha\mu \cdot Sin\,g\mu}{\mu} \cdot d\mu = \frac{\pi}{4}$$

und weil das zweite dieser Integrale (nach N. 7.) der Null gleich ist, so giebt dies

$$8) \qquad \int_0^\infty \frac{Sin\,\alpha\mu \cdot Cos\,\alpha\mu}{\mu} \cdot d\mu = \frac{\pi}{4},$$

welches (da man $g = 0$ und $h = \infty$ nehmen konnte) für jeden positiven Werth von α gilt *).

Die Gleichung XI. führt für $\varphi_x = 1$ zu ähnlichen Resultaten.

Die Gleichungen XII.—XV. lassen sich für $\varphi_x = 1$ nicht anwenden.

$\frac{1}{2} Sin\,(h+x)\mu + \frac{1}{2} Sin\,(h-x)\mu$, so erhält man das obige Integral gleich der Summe

$$\frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{Sin\,(h+x)\mu}{\mu} \cdot d\mu + \frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{Sin\,(h-x)\mu}{\mu} \cdot d\mu$$

dieser beiden Integrale, während die letzteren beiden einander gleich sind, so lange $x < h$, dagegen einander zwar noch gleich sind, aber entgegengesetzte Vorzeichen haben, sobald $x > h$ ist. — So gelangt man hier zu demselben (obigen) Resultat.

*) Da $Sin\,\alpha\mu \cdot Cos\,\alpha\mu = \frac{1}{2} Sin\,2\alpha\mu$ ist, so folgt dasselbe Resultat auch unmittelbar aus §. 18. N. 51.

§. 82.

Zweites Beispiel. Nimmt man $\varphi_x = e^{-ax}$ und a positiv, so hat man (nach §. 4. NN. 8. und 9.)

$$\int_0^\infty \varphi_z \cdot Cos\,\mu z \cdot dz = \frac{a}{a^2+\mu^2} \quad \text{und} \quad \int_0^\infty \varphi_z \cdot Sin\,\mu z \cdot dz = \frac{\mu}{a^2+\mu^2};$$

und deshalb ist auch (wenn man $Cos(\mu z - \mu x)$ zerlegt)

$$\int_0^\infty \varphi_z \cdot Cos\,\mu(z-x) \cdot dz = \frac{a}{a^2+\mu^2} \cdot Cos\,\mu x + \frac{\mu}{a^2+\mu^2} \cdot Sin\,\mu x.$$

Weil man aber diese Integrale zwischen den Grenzen $z = -\infty$ und $z = \infty$ nicht kennt, und auch nicht $\varphi_{-z} = \varphi_z$ und auch nicht $\varphi_{-z} = -\varphi_z$ ist, so lassen sich die Formeln III.—VII. nicht anwenden; eben so wenig die Formeln VIII.—XI., so lange nicht $g = 0$ und $h = \infty$ ist, welches letztere eben die Formeln XII.—XV. voraussetzen. Diese letzteren geben aber, wenn x positiv ist,

1) $$\int_0^\infty \frac{a \cdot Cos\,x\mu}{a^2+\mu^2} \cdot d\mu = \frac{\pi}{2} \cdot e^{-ax}$$

und

2) $$\int_0^\infty \frac{\mu \cdot Sin\,x\mu}{a^2+\mu^2} \cdot d\mu = \frac{\pi}{2} \cdot e^{-ax},$$

welches genau die Resultate NN. 68. 69. des §. 23. sind.

§. 83.

Drittes Beispiel. Nimmt man $\varphi_z = e^{-az^2}$ und a positiv, so hat man (nach N. 63. des §. 22.)

1) $$\int_0^\infty \varphi_z \cdot Cos\,\mu z \cdot dz = \int_0^\infty e^{-az^2} \cdot Cos\,\mu z \cdot dz$$

$$= \tfrac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a}} \times e^{-\frac{\mu^2}{4a}}$$

und das Doppelte erhält man, wenn dasselbe Integral zwischen den Grenzen $-\infty$ und ∞ genommen wird.

Die Gleichung XII. giebt daher sogleich:

$$\int_0^\infty \tfrac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a}} \times e^{-\frac{\mu^2}{4a}} \cdot Cos\, x\mu \cdot d\mu = \frac{\pi}{2} \cdot e^{-ax^2}$$

d. h.

2) $$\int_0^\infty e^{-\frac{\mu^2}{4a}} \cdot Cos\, x\mu \cdot d\mu = \sqrt{a\pi} \cdot e^{-ax^2},$$

welche neue Gleichung abermals die 1.) ist, nur $\frac{1}{4a}$ statt a gesetzt. Es führt also dasmal das Fourier'sche Integral, auf dieselbe Formel zurück, von der man ausgegangen ist.

Wäre aber die Gleichung 1.) noch nicht bekannt gewesen, sondern hätte man erst die Methode des §. 22. angewandt, um das gedachte Integral 1.) zu finden; — hätte man also

3) $$\int_0^\infty e^{-az^2} \cdot Cos\, \mu z \cdot dz = y$$

gesetzt, daraus die Differenzial-Gleichung

4) $$dy_\mu + \frac{\mu}{2a} \cdot y = 0$$

abgeleitet, — diese lineare Differenzial-Gleichung der ersten Ordnung integrirt und dadurch

5) $$y = c \cdot e^{-\frac{\mu^2}{4a}}$$

erhalten, wo c eine noch zu bestimmende Konstante ist, — so würde man zur Bestimmung dieser Konstante c erhalten haben (für $\mu = 0$ aus der 5. und 3.)

6) $$c = \int_0^\infty e^{-az^2} \cdot dz,$$

wo c noch von a abhängig ist. — Wäre nun auch dieses letztere Integral noch nicht bekannt, so könnte man statt der Gleichung 1.) jetzt die 5.) nehmen, nämlich

7) $$\int_0^\infty e^{-az^2} \cdot Cos\, \mu z \cdot dz = c \cdot e^{-\frac{\mu^2}{4a}},$$

und dann ergäbe die Anwendung der Formel XII. statt der 2.) jetzt

8) $$c \cdot \int_0^\infty e^{-\frac{\mu^2}{4a}} \cdot Cos\, x\mu \cdot d\mu = \frac{\pi}{2} \cdot e^{-ax^2}.$$

Da nun diese Gleichung 8.) mit der 7.) zusammenfällt, sobald man in der 7.) zuerst x statt μ, dann μ, $d\mu$, statt bezüglich z, dz, ferner $\frac{1}{4a}$ statt a schreibt, so würde, wenn c von a unabhängig wäre, so daß c in 7.) denselben Werth behielte wie c in 8.), die Vergleichung beider Resultate in 7.) und 8.) eine Gleichung zwischen c, also eine Gleichung zur Bestimmung der Konstante c geben.

Man kann aber statt der Konstante c sehr leicht eine neue Konstante k einführen, welche wirklich von a unabhängig ist. Setzt man nämlich $z \cdot \sqrt{a} = v$, so erhält man

9) $$c = \int_0^\infty e^{-az^2} \cdot dz = \frac{1}{\sqrt{a}} \cdot \int_0^\infty e^{-z^2} \cdot dz = \frac{k}{\sqrt{a}},$$

wenn

10) $$\int e^{-z^2} \cdot dz = k$$

gesetzt wird. Führt man nun diese neue Konstante k an die Stelle von c ein, so gehen die Gleichungen 7.) und 8.) über in

11) $$\int_0^\infty e^{-az^2} \cdot Cos\,\mu z \cdot dz = \frac{k}{\sqrt{a}} \cdot e^{-\frac{\mu^2}{4a}}$$

und

12) $$\frac{k}{\sqrt{a}} \cdot \int_0^\infty e^{-\frac{\mu^2}{4a}} \cdot Cos\,x\mu \cdot d\mu = \frac{\pi}{2} \cdot e^{-ax^2},$$

wo überall k von a unabhängig ist. Substituirt man nun in 11.) wie oben, zuerst x statt μ, dann μ, $d\mu$ statt z, dz, ferner $\frac{1}{4a}$ statt a, so erhält man aus der Verbindung der neuen Gleichung mit der 12.) sogleich

13) $$2k^2 \cdot e^{-ax^2} = \frac{\pi}{2} \cdot e^{-ax^2} \quad \text{d. h.} \quad k = \tfrac{1}{2}\sqrt{\pi},$$

d. h. aus 10.) und 9.) und 6.)

14) $$\int_0^\infty e^{-z^2} \cdot dz = \tfrac{1}{2}\sqrt{\pi},$$

15) $\int_0^\infty e^{-az^2}\cdot dz = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a}}$,

welches die Resultate NN. 58. und 60. des §. 20. sind.

Anmerkg. 1. Wollte man $Sin\,ax$, $Cos\,ax$ bezüglich statt φ_x setzen, so würde man mittelst der Fourier'schen Integrale erhalten

$$\int_0^\infty \frac{a\cdot Cos\,x\mu}{a^2-\mu^2}\cdot d\mu = \frac{\pi}{2}\cdot Sin\,ax$$

und

$$\int_0^\infty \frac{\mu\cdot Sin\,x\mu}{a^2-\mu^2}\cdot d\mu = -\frac{\pi}{2}\cdot Cos\,ax;$$

allein diese Resultate sind ganz unbrauchbar, weil die Integrale zur Linken unterbrochene sind, also gar keinen Werth haben. Höchstens könnte man noch untersuchen, ob diese Gleichungen vielleicht richtig sind, wenn die Integrale zur Linken im Sinne der Hauptwerthe des Cauchy (S. §. 29.) verstanden werden, welche Untersuchung jedoch für uns von keinem praktischen Nutzen zu seyn scheint, weshalb wir sie hier übergehen.

Anmerkg. 2. Die Anwendung der Fourier'schen Integrale zur Auswerthung bestimmter Integrale, ist überhaupt nicht von besonderer Wichtigkeit, da sie nicht als „Methode" angesehen werden kann. Wollte man sie auf eine Methode zurückführen, so würde man zu der Methode des §. 24. (welche wir dort die sechste genannt haben) geleitet, d. h. zu der Methode, nach welcher ein einfaches Integral in ein Doppel-Integral verwandelt, nachgehends aber dieses in umgekehrter Ordnung integrirt wird. — In der That erhält man nämlich den Werth eines Fourier'schen (Doppel-) Integrals, wie wir gesehen haben, durch Integration in umgekehrter Ordnung, während in den letztern Anwendungen das (Doppel-) Integral in der anfänglichen Ordnung aufgefaßt und nur die erstere Integration wirklich ausgeführt, die andere aber angezeigt wird.

Dagegen wollen wir diese Gelegenheit nicht vorbeigehen lassen, um zu zeigen, wie die Fourier'schen Reihen (des

vorhergehenden Kapitels) zur Auswerthung der Integrale nach der (siebenten) Methode der §§. 25.—27. benutzt werden können.

Sind z. B. auszuwerthen die beiden Integrale

$$\int_0^\infty \frac{e^{ax}+e^{-ax}}{e^{\pi x}-e^{-\pi x}}\cdot Sin\, bx\cdot dx \quad \text{und} \quad \int_0^\infty \frac{e^{ax}-e^{-ax}}{e^{\pi x}-e^{-\pi x}}\cdot Cos\, bx\cdot dx,$$

so kann man damit beginnen, daß man nach dem Verfahren des vorhergehenden Kapitels die Funktionen

$$\frac{e^{ax}+e^{-ax}}{e^{\pi x}-e^{-\pi x}} \quad \text{und} \quad \frac{e^{ax}-e^{-ax}}{e^{\pi x}-e^{-\pi x}}$$

in Reihen verwandelt, die nach dem Sinus der Vielfachen von a fortläuft, so daß man erhält

$$1)\quad \frac{e^{ax}+e^{-ax}}{e^{\pi x}-e^{-\pi x}}$$

$$=\frac{\pi}{2}\left(\frac{1}{2x}-\frac{x}{1^2+x^2}Sin\, a+\frac{x}{2^2+x^2}Sin\, 2a-\frac{x}{3^2+x^2}Sin\, 3a+\text{in inf.}\right)$$

und

$$2)\quad \frac{e^{ax}-e^{-ax}}{e^{\pi x}-e^{-\pi x}}$$

$$=\frac{\pi}{2}\left(\frac{1}{1^2+x^2}Sin\, a-2\frac{1}{2^2+x^2}Sin\, 2a+3\frac{1}{3^2+x^2}Sin\, 3a-\text{ in inf.}\right),$$

welche Gleichungen für jeden Werth von a gelten, der zwischen $-\pi$ und $+\pi$ liegt.

Hierauf multiplicirt man diese Reihen bezüglich mit $Sin\, bx$ und $Cos\, bx$, und nimmt dann die Integrale zwischen $x=0$ und $x=\infty$. Man wird dann zurückgeführt auf lauter Integrale von der Form

$$\int_0^\infty \frac{x\cdot Sin\, bx}{a^2+x^2}\cdot dx \quad \text{und} \quad \int_0^\infty \frac{Cos\, bx}{a^2+x^2}\cdot dx,$$

welche kurz vorher (im §. 82.) oder früher (im §. 23.) gefunden worden sind. Man erhält dann, wenn zuletzt die unendlichen Reihen wieder summirt werden,

$$104)\quad \int_0^\infty \frac{e^{ax}+e^{-ax}}{e^{\pi x}-e^{-\pi x}}\cdot Sin\, bx\cdot dx=\tfrac{1}{2}\cdot\frac{e^b-e^{-b}}{e^b+2\, Cos\, a+e^{-b}}$$

$$105)\quad \int_0^\infty \frac{e^{ax}-e^{-ax}}{e^{\pi x}-e^{-\pi x}}\cdot Cos\,bx\cdot dx = \frac{Sin\,a}{e^b+2\,Cos\,a+e^{-b}},$$

wenn nur b beliebig positiv oder Null ist, a dagegen zwischen $-\pi$ und $+\pi$ liegt.

Die Gleichung 104.) gilt auch noch für $a=\pi$, so wie für $a=-\pi$.

In diesen Gleichungen 104. und 105. stecken übrigens noch einige interessante specielle Fälle. Für $a=0$ z. B. ergiebt sich sogleich (aus 104.)

$$106)\quad \int_0^\infty \frac{Sin\,bx}{e^{\pi x}-e^{-\pi x}}\cdot dx = \tfrac{1}{4}\cdot\frac{e^{\frac{1}{2}b}-e^{-\frac{1}{2}b}}{e^{\frac{1}{2}b}+e^{-\frac{1}{2}b}},\quad \text{wenn } b \geqq 0;$$

und für $a=\pi$ (aus 104.)

$$107)\quad \int_0^\infty \frac{e^{\pi x}+e^{-\pi x}}{e^{\pi x}-e^{-\pi x}}\cdot Sin\,bx\cdot dx = \tfrac{1}{2}\cdot\frac{e^{\frac{1}{2}b}+e^{-\frac{1}{2}b}}{e^{\frac{1}{2}b}-e^{-\frac{1}{2}b}},\quad \text{wenn } b>0.$$

Zieht man die 106.) doppelt genommen, von der 107. ab, so erhält man:

$$108)\quad \int_0^\infty \frac{e^{\frac{1}{2}\pi x}-e^{-\frac{1}{2}\pi x}}{e^{\frac{1}{2}\pi x}+e^{-\frac{1}{2}\pi x}}\cdot Sin\,bx\cdot dx = \frac{2}{e^b-e^{-b}},\quad \text{wenn } b>0.$$

Eben so findet sich aber auch aus der 105.) für $a=\frac{\pi}{2}$

$$109)\quad \int_0^\infty \frac{Cos\,bx\cdot dx}{e^{\frac{1}{2}\pi x}+e^{-\frac{1}{2}\pi x}} = \frac{1}{e^b+e^{-b}},\quad \text{wenn } b \gtreqless 0.$$

§. 84.

Dirichlet hat die von uns im §. 24. mitgetheilte (sechste) Integrations-Methode, — nach welcher in einem auszuwerthenden Integral $\int_a^b F_x\cdot dx$ ein Faktor von F_x (gewöhnlich die Einheit) durch ein bestimmtes Integral ausgedrückt, also das vorgelegte Integral in ein Doppel-Integral verwandelt, letzteres aber dadurch ausgewerthet wird, daß man die Integration in umgekehrter Ordnung vornimmt, — Dirichlet also hat diese Methode auf eine sehr elegante und fruchtbare Weise dadurch

erweitert, daß er in $\int_a^b 1 \cdot F_x \cdot dx$ statt der 1 ein Integral $\int_p^q \varphi_\mu \cdot d\mu$ setzt, welches nur so lange $= 1$ ist, als x zwischen den Grenzen a und b liegt, und welches für andere Werthe von x (die außerhalb des Raumes von a bis b liegen) den Werth 0 hat. Man hat dann, wenn α und β beliebig weitere Grenzen sind, so daß a und b zwischen α und β liegen,

$$\int_a^b F_x \cdot dx = \int_a^b \left(F_x \cdot \int_p^q \varphi_\mu \cdot d\mu\right) \cdot dx = \int_\alpha^\beta F_x \cdot \left(\int_p^q \varphi_\mu \cdot d\mu\right) \cdot dx,$$

in so ferne die Differenzial-Funktion dieses letzteren Integrals nach x, für alle Werthe von x, von $x = \alpha$ bis $x = a$ hin und dann wieder von $x = b$ an bis zu $x = \beta$ hin, unserer Voraussetznng zufolge, der Null gleich ist.

Sind dann a und b beliebig reell, so kann man auch

$$\int_a^b F_x \cdot dx = \int_{-\infty}^{\infty} \left(F_x \cdot \int_p^q \varphi_\mu \cdot d\mu\right) \cdot dx$$

nehmen; — sind aber a und b beide positiv, so kann man auch die Grenzen 0 und ∞ dafür nehmen, so daß man hat:

$$\int_a^b F_x \cdot dx = \int_0^\infty \left(F_x \cdot \int_p^q \varphi_\mu \cdot d\mu\right) \cdot dx.$$

Durch dieses höchst sinnreiche Verfahren kann man auch statt der Integrale zwischen selbst noch unbestimmten (veränderlichen) Grenzen a und b, andere Integrale einführen, die zwischen den völlig bestimmten Grenzen $-\infty$ und $+\infty$, oder zwischen den völlig bestimmten Grenzen 0 und ∞ genommen sind; und hierin besteht der wesentlichste Vortheil dieser Erweiterung, von welcher Dirichlet einige höchst interessante Anwendungen, besonders auch auf die Bestimmung der Größe der Anziehung eines Ellipsoides auf einen (innerhalb oder) außerhalb desselben liegenden Punkt gemacht hat (S. d. Abhandl. der Berliner Akad. d. Wissensch. aus dem Jahre 1835.).

Solcher Integrale $\int_p^q \varphi_\mu \cdot d\mu$, welche für eine gewisse Reihe von Werthen von x, der Einheit, für die übrigen Werthe

von x aber der Null gleich sind, liefern nun die Fourier'schen Integrale in beliebiger Menge.

So hat man im §. 77. gefunden, daß die anfänglich daselbst durch J und L bezeichneten Integrale X. und XI., $=\frac{\pi}{2}\cdot\varphi_x$, oder $=0$ sind, je nachdem x zwischen den Grenzen f und g oder außerhalb dieses Raumes liegt. Dividirt man also durch $\frac{\pi}{2}\cdot\varphi_x$, so hat man aus jenen Formeln X. und XI. sogleich

$$1)\quad \frac{2}{\pi\cdot\varphi_x}\cdot\int_0^\infty d\mu\cdot\left(Cos\,\mu x\cdot\int_f^g \varphi_z\cdot Cos\,\mu z\cdot dz\right)=\begin{Bmatrix}1\\0\end{Bmatrix},$$

$$2)\quad \frac{2}{\pi\cdot\varphi_x}\cdot\int_0^\infty d\mu\cdot\left(Sin\,\mu x\cdot\int_f^g \varphi_z\cdot Sin\,\mu z\cdot dz\right)=\begin{Bmatrix}1\\0\end{Bmatrix},$$

je nachdem x $\begin{Bmatrix}\text{innerhalb}\\\text{außerhalb}\end{Bmatrix}$ des Raumes von f bis g liegt. — Und aus N. 1. kann man auch noch ableiten:

$$3)\quad \frac{1}{\pi\cdot\varphi_x}\cdot\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\mu x\cdot i}\cdot\int_f^g \varphi_z\cdot Cos\,\mu z\cdot dz=\begin{Bmatrix}1\\0\end{Bmatrix},$$

je nachdem x $\begin{Bmatrix}\text{innerhalb}\\\text{außerhalb}\end{Bmatrix}$ des Raumes von f bis g liegt *).

In allen diesen Gleichungen kann aber statt φ_x jede beliebige Funktion von x gesetzt werden und zwar auch eine unstetige, wenn nur die Integrale mit unendlich-großen Grenzen convergent sind. — So haben wir z. B. im §. 81. N. 7. aus diesem Fourier'schen Integral unter anderem auch gefunden

---

*) Weil nämlich $e^{-\mu x\cdot i}=Cos\,\mu x-i\cdot Sin\,\mu x$ ist, so zerlegt sich das Integral zur Linken (nach μ) in die Differenz zweier Integrale (nach μ), von denen das zweite (nach VIII. Th. §. 88.) der Null gleich, das erstere aber (ebenfalls nach VIII. Th. §. 88.) das Doppelte von dem oben in N. 1. stehenden Integrale (nach μ) giebt. — Nur müssen die bestimmten Integrale mit unendlich-großen Grenzen convergent vorausgesetzt werden.

4) $\frac{2}{\pi} \cdot \int_0^\infty \frac{Sin\, h\mu \cdot Cos\, x\mu}{\mu} \cdot d\mu = \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \end{Bmatrix}$, je nachdem $x \lessgtr h$.

Weil aber die Anwendung der (sechsten) Methode des §. 24. und eben deshalb auch die Anwendung des eben beschriebenen Verfahrens, stets zu Doppel-Integralen führt, und weil ferner dasselbe Verfahren auch wiederum bei der Umformung solcher Doppel- oder mehrfachen Integrale selbst, in Anwendung gebracht werden kann, — so wollen wir hier erst dann Anwendungen dieses Verfahrens des Dirichlet mittheilen, nachdem wir vorher erst eine gründlichere Theorie der Doppel- und der vielfachen Integrale selbst gehabt haben werden, welche nun im nächsten Kapitel folgen soll.

Vierte Abhandlung.

Von der Umformung der Doppel-, drei- und mehrfachen Integrale.

Achtes Kapitel.

Von der Umformung der Doppel-Integrale und der mehrfachen Integrale überhaupt.

§. 85.

Der Begriff eines bestimmten Doppel-Integrals ist ebenfalls ein bei verschiedenen Schriftstellern mehrfach schwankender.

1) Denkt man sich nämlich ein unendlich-kleines Produkt der zweiten Ordnung von der Form

$$f_{x,y} \cdot dx \cdot dy$$

und denkt man sich die Summe aus den unendlich mal unendlich-vielen Gliedern, welche alle aus diesem Produkt hervorgehen, wenn man dem x und dem y unabhängig von einander, alle, um bezüglich die unendlich-kleinen, positiv gedachten dx und dy von einander verschiedenen Werthe beilegt, welche zugleich einer oder mehreren gegebenen Bedingungen genügen, z. B. welche 0 und positiv sind und noch den Bedingungen genügen, die in dieser Ungleichung $g \leqq x+y \leqq h$ ausgesprochen sind, — so bezeichnet man diese Summe durch

$$\iint\limits_{g \leqq x+y \leqq h} f_{x,y} \cdot dx \cdot dy$$

(wo g und h gegeben seyn mögen) und nennt solches ein bestimmtes Doppel-Integral oder ein bestimmtes zweifaches Integral, wobei man jedoch (in diesem Beispiel) noch besonders im Gedächtniß behalten muß, daß x und y keine negativen Werthe annehmen sollen.

2) Ein andermal versteht man unter einem bestimmten Doppel-Integral oder bestimmten zweifachen Integral die Aufeinanderfolge zweier einfachen bestimmten Integrale, wie sie in dem Zeichen

a) $\int_{\mathfrak{x}}^{\mathfrak{X}}\left(\int_{\mathfrak{y}}^{\mathfrak{Y}} f_{x,y} \cdot dy\right) \cdot dx,$

oder in diesem anderen Zeichen

b) $\int_{\mathfrak{y}}^{\mathfrak{Y}}\left(\int_{\mathfrak{x}}^{\mathfrak{X}} f_{x,y} \cdot dx\right) \cdot dy$

jedesmal entschieden ausgesprochen ist; dabei können in a) die Grenzen $\mathfrak{y}$ und $\mathfrak{Y}$ noch Funktionen von x, in b) aber $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{X}$ noch Funktionen von y seyn, während natürlich auch $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{X}$ von y, oder $\mathfrak{y}$ und $\mathfrak{Y}$ von x ganz unabhängig seyn können. Treten beide letzteren Voraussetzungen ein, so sind die beiden Doppel-Integrale a.) und b.) einander gleich (nach VIII. Th. §. 95. N. 3.); außerdem aber muß in jedem besonderen Falle eine besondere Untersuchung erst entscheiden, ob und unter welchen Voraussetzungen beide Doppel-Integrale a.) und b.) einander gleich oder um welchen Ausdruck sie von einander verschieden sind.

3) Man begreift sogleich, daß ein bestimmtes Doppel-Integral im Sinne der N. 2.) auch allemal ein solches im Sinne der N. 1.) ist, weil z. B. in a.) das erste Integral (nach y) jedesmal die Summe aller $f_{x,y} \cdot dx \cdot dy$ ist, in denen x irgend einen beliebigen der ihm zukommenden, zwischen $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{X}$ liegenden konstanten Werth hat, während die Werthe von y, von $\mathfrak{y}$ bis zu $\mathfrak{Y}$ alle, um das unendlich-kleine dy von einander verschieden sind, wie auch $\mathfrak{y}$ und $\mathfrak{Y}$ gedacht oder gegeben seyn mögen, von diesem Werth von x abhängig oder unabhängig; — die zweite Integration (nach x) drückt dann von dieser Summe wieder die Summe aller ihrer Werthe aus, wenn man in allen Gliedern der ersteren Summe nun noch statt x alle zwischen $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{X}$ liegenden, um das unendlich-kleine dx von einander verschiedenen Werthe setzt.

Sind z. B. $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{X}$ von y, und $\mathfrak{y}$ und $\mathfrak{Y}$ von x ganz unabhängig, so daß die Ausdrücke a.) und b.) allemal einander gleich sind, so kann man die Uebereinstimmung des Begriffes in N. 2.) mit dem Begriffe in N. 1.) dadurch ausdrücken, daß man schreibt

c) $$\begin{cases} \iint\limits_{\mathfrak{x} \leqq x \leqq \mathfrak{X},\ \mathfrak{y} \leqq y \leqq \mathfrak{Y}} f_{x,y} \cdot dx \cdot dy = \int_{\mathfrak{x}}^{\mathfrak{X}} \left(\int_{\mathfrak{y}}^{\mathfrak{Y}} f_{x,y} \cdot dy \right) \cdot dx \\ \text{oder} \\ \iint\limits_{\mathfrak{x} \leqq x \leqq \mathfrak{X},\ \mathfrak{y} \leqq y \leqq \mathfrak{Y}} f_{x,y} \cdot dx \cdot dy = \int_{\mathfrak{y}}^{\mathfrak{Y}} \left(\int_{\mathfrak{x}}^{\mathfrak{X}} f_{x,y} \cdot dx \right) \cdot dy. \end{cases}$$

4) Dagegen ist es häufig nicht möglich ein bestimmtes Doppel-Integral im Sinne der N. 1.), durch zwei auf einander folgende einfache Integrale auszudrücken. — Nehmen wir das in N. 1. angeführte Beispiel, so wird man finden

d) $$\iint\limits_{g \leqq x+y \leqq h} f_{x,y} \cdot dx \cdot dy = \int_0^g \left(\int_{g-x}^{h-x} f_{x,y} \cdot dy \right) \cdot dx + \int_g^h \left(\int_0^{h-x} f_{x,y} \cdot dy \right) \cdot dx$$

oder auch

e) $$\iint\limits_{g \leqq x+y \leqq h} f_{x,y} \cdot dx \cdot dy = \int_0^g \left(\int_{g-y}^{h-y} f_{x,y} \cdot dx \right) \cdot dy + \int_g^h \left(\int_0^{h-y} f_{x,y} \cdot dx \right) \cdot dy,$$

so daß das bestimmte Doppel-Integral zur Linken, im Sinne der N. 1.) gedacht, sich wohl ausgedrückt sieht durch die Summe zweier Theile, wovon jeder durch zwei auf einander folgende einfache bestimmte Integrale ausgedrückt wird, dagegen nie durch ein einziges solches bestimmtes Doppel-Integral im Sinne der N. 2.), ausgedrückt werden kann*).

---

*) Man kann dies letztere, so wie vieles andere noch durch entsprechende Figuren deutlich machen. Sind nämlich x und y als Koordinaten-Werthe angesehen, welche sich auf rechtwinkliche (und horizontal gedachte) Koordinaten-Axen OX und OY (Fig. 1.) beziehen, so kann man sich $z = f_{x,y}$ z. B. als die Höhe einer an der Stelle M, deren Koordinaten-Werthe x und y beliebig und von einander unabhängig gedacht sind, auf die Ebene XOY errichteten Senkrechten denken, die von M bis zu einer durch die

5) Wir werden nun hier das Doppel-Integral stets im Sinne der N. 1. nehmen, und wir stellen solches hier-

---

Gleichung $z = f_{x,y}$ gegebenen Fläche reicht; und dann ist $f_{x,y} \cdot dx \cdot dy$ der Inhalt eines Parallelepidums vom Querschnitt $dx \cdot dy$ und von der Höhe $f_{x,y}$ und

$$\int\int f_{x,y} \cdot dx \cdot dy,$$

im Sinne der N. 1. genommen, würde dann den Inhalt des Körpers ausdrücken, für welchen alle Werthe, die x und y nach und nach annehmen sollen, alle Punkte der Grundfläche desselben in der Ebene XOY bilden, während dieser Körper oben von der (in der Regel krummen) Fläche $z = f_{x,y}$, rings herum aber von, auf XOY senkrechten ebenen oder cylinderförmigen Wänden begrenzt wird.

Oder man denkt sich $f_{x,y}$ als die Dichtigkeit des Rechtecks $dx \cdot dy$ an der Stelle, die durch die Koordinaten-Werthe x und y gegeben ist; dann ist $f_{x,y} \cdot dx \cdot dy$ die Masse desselben Rechtecks und

$$\int\int f_{x,y} \cdot dx \cdot dy,$$

im Sinne der N. 1.) gedacht, ist dann die Masse der ganzen Fläche, so weit ihre durch x und y gegebenen Punkte den gemachten Bedingungen genügen, z. B. den Bedingungen, daß x und y 0 oder positiv sind, während dabei stets

$$g \overline{\overline{<}} x+y \overline{\overline{<}} h$$

bleibt, wie wir in N. 1. beispielsweise angenommen haben.

So ist also das Doppel-Integral des in N. 1. gegebenen Beispiels

$$\int\int_{g \overline{\overline{<}} x+y \overline{\overline{<}} h} f_{x,y} \cdot dx \cdot dy,$$

unter der zuletzt gemachten Voraussetzung, die Masse der Fläche $ABCD$, welche von den beiden parallelen Linien AB und CD begrenzt ist, während $OA = OB = g$ nnd $OC = OD = h$ genommen worden ist, — weil die Koordinaten-Werthe x und y aller in diesem Parallel-Trapez $ABCD$ liegenden Punkte M, der Bedingung $g \overline{\overline{<}} x+y \overline{\overline{<}} h$ genügen, in so ferne alle Punkte der Linie AB durch die Gleichung $y = -x+g$, und alle Punkte der Linie CD durch die Gleichung $y = -x+h$ gegeben sind.

Will man nun die Masse dieses Parallel-Trapezes $ABCD$ durch zweimal auf einander folgende einfache Integration berechnen, so muß man letzteres erst in ein Parallelogramm $ACEB$ und in das Dreieck BED zer-

mit als Definition fest. — Auch werden wir bei diesen neuen Zeichen

$$\iint f\cdot dx\cdot dy,$$

die in dem Sinne der N. 1. aufgefaßt werden sollen, die Faktoren dx und dy stets positiv uns denken, worauf wir deshalb besonders aufmerksam machen, weil nach der (im VIII. Th. §. 84.) eingeführten Bezeichnung des bestimmten einfachen Integrals $\int_a^b f\cdot dx$, der Faktor dx allemal negativ gedacht ist, so oft $b<a$ vorausgesetzt wird.

6) Dann aber steht durch das vorhergehende fest, daß ein Doppel-Integral häufig nicht durch zwei auf einander folgende einfache Integrationen berechnet werden kann, sondern öfter erst in zwei oder mehr Theile zerlegt gedacht werden muß, deren jeder durch zweimal auf einander folgende einfache Integration sich berechnen läßt.

Anmerkg. Wie häufig ein Doppel-Integral in dem Sinne, wie wir es so eben ein für allemal definirt haben, sogleich und ohne Weiteres auch durch bloße zwei einfache Integrationen berechnet werden kann, mag noch an dem Beispiel

$$\iint_{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\overline{\underline{<}}1} f_{x,y}\cdot dx\cdot dy$$

beobachtet werden. Denken wir uns auch hier wieder $f_{x,y}$ als die Dichtigkeit der durch x und y gegebenen Stelle, so drückt dies Doppel-Integral die Masse der durch die Gleichung

---

legen. Dann findet sich die Masse des Parallelogramms ACEB durch das erste Doppel-Integral in d.) zur Rechten ausgedrückt, die Masse des Dreiecks BED aber durch das zweite Doppel-Integral in d.) zur Rechten.

Zerlegt man lieber das Parallel-Trapez ABCD in das Parallelogramm ABDF und in das Dreieck AFC, so findet sich die Masse eines jeden dieser beiden Theile ausgedrückt durch bezüglich die Doppel-Integrale, welche in e.) zur Rechten zu sehen sind.

$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ gegebenen Ellipse ABCD (Fig. 2.) aus, in welcher $OA = OB = a$ und $OC = OD = b$ ist. Dieselbe Masse wird aber auch ausgedrückt durch

$$\int_{-a}^{+a}\left(\int_{\mathfrak{y}}^{\mathfrak{Y}} f_{x,y}\cdot dy\right)\cdot dx$$

wenn man $\mathfrak{Y} = +\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}$ und $\mathfrak{y} = -\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}$ nimmt; und eben so wird dieselbe Masse auch ausgedrückt durch

$$\int_{-b}^{+b}\left(\int_{\mathfrak{x}}^{\mathfrak{X}} f_{x,y}\cdot dx\right)\cdot dy,$$

wenn $\mathfrak{X} = +\frac{a}{b}\sqrt{b^2-y^2}$ und $\mathfrak{x} = -\frac{a}{b}\sqrt{b^2-y^2}$ genommen werden.

§. 86.

Es entsteht nun zunächst die Frage:

Wenn man in einem Doppel-Integral

1) $A = \iint f_{x,y}\cdot dx\cdot dy$

neue Veränderliche einführt, z. B. statt x und y die neuen Veränderlichen u und v; — wie wird sich solches umformen? — d. h. welches neue Doppel-Integral von der Form

2) $\iint F_{u,v}\cdot du\cdot dv$

wird denselben Werth A geben, wenn man die Summe aller unendlich mal unendlich-vielen Werthe nimmt, welche aus $F_{u,v}\cdot du\cdot dv$ dadurch hervorgehen, daß man statt u und v alle, bezüglich um die unendlich-kleinen und *positiv gedachten* du und dv verschiedenen Werthe setzt, welche den Bedingungen entsprechen, die aus den zu 1.) gegebenen Bedingungen für die neuen Veränderlichen hervorgehen? —

Um diese Frage bequem zu beantworten, denke man sich wieder x und y als rechtwinkliche Koordinaten und $f_{x,y}$ als die Dichtigkeit der durch x und y gegebenen Stelle, so daß dann das gegebene Doppel-Integral A die Masse einer begrenz-

ten Ebene vorstellt. Die beiden neuen Veränderlichen seyen durch die Gleichungen

3) $x = x_{u,v}$ und 4) $y = y_{u,v}$

eingeführt, so daß $x_{u,v}$ und $y_{u,v}$ gegebene Funktionen von u und v bezeichnen, die man erhält, wenn man die beiden, zwischen x, y, u und v gegebenen Gleichungen nach x und nach y auflößt, in welchen Funktionen natürlich weder x noch y selbst vorkommt. Denkt man sich nun v aus 3.) und 4.) eliminirt, so daß man eine Gleichung

5) $\varphi_{x,y,u} = 0$

zwischen x, y und u hat, so drückt diese Gleichung eine Kurve MN aus (Fig. 3.), welche für jeden andern Werth von u eine andere wird, und für den Werth $u+du$ von u, durch M'N' vorgestellt seyn mag. — Diese Kurven MN, für alle um du von einander verschiedenen Werthe von u gedacht, zerschneiden also die Fläche (deren Masse durch das Doppel-Integral $\int\int f_{x,y} \cdot dx \cdot dy$ ausgedrückt ist) in unendlich-viele unendlich-dünne (in der Regel krummlinige) Streifen.

Denkt man sich nachgehends aus den Gleichungen 3.) und 4.) den anderen Veränderlichen u eliminirt, so daß man eine Gleichung

6) $\psi_{x,y,v} = 0$

zwischen x, y und v erhält, so stellt diese Gleichung 6.) zu den um dv wachsenden Werthen von v, eine Reihe von Kurven vor, von denen die zu v und $v+dv$ gehörigen in der Figur durch PQ und P'Q' vorgestellt seyn mögen. Diese beiden Systeme von Kurven zerschneiden die Fläche in unendlich mal unendlich-viele Vierecke 1234, welche als Parallelogramme angesehen werden können *), und deren 4 Eckpunkte 1, 2, 3 und 4

---

*) Weil ∂y_x aus der Gleichung $\varphi_{x,y,u} = 0$ genommen, für die beiden Werthe u und $u+du$ von u, nur um ein unendlich-kleines Glied sich ändert; und weil dasselbe auch noch gilt, wenn ∂y_x aus der Gleichung $\psi_{x,y,v} = 0$ genommen wird.

bezüglich aus 3.) und 4.) berechnet werden können und durch bezüglich

$x_{u,v}$, $y_{u,v}$ für den Punkt 1,

$x_{u+du,v}$, $y_{u+du,v}$ für den Punkt 2,

$x_{u,\,v+dv}$, $y_{u,\,v+dv}$ für den Punkt 3

und $x_{u+du,v+dv}$, $y_{u+du,v+dv}$ für den Punkt 4

bezeichnet sind. — Der Inhalt dieses Parallelogramms 1234 ist das Doppelte des Dreiecks 123. — Nun bleibt aber der Inhalt dieses Dreiecks 123 übrig, wenn man von dem Trapez 232′3′ die Summe der beiden Trapeze 212′1′ und 131′3′ subtrahirt, während

$$232'3' = \tfrac{1}{2}(x_{u,\,v+dv} - x_{u+du,\,v})[y_{u,\,v+dv} + y_{u+du,\,v}]$$

$$212'1' = \tfrac{1}{2}(x_{u,v} - x_{u+du,\,v})[y_{u,v} + y_{u+du,\,v}]$$

$$131'3' = \tfrac{1}{2}(x_{u,\,v+dv} - x_{u,v})[y_{u,\,v+dv} + y_{u,v}]$$

ist und die ersten (in den runden Klammern eingeschlossenen) Faktoren in diesen 3 Produkten bezüglich

$$(\partial x_v \cdot dv - \partial x_u \cdot du), \quad -\partial x_u \cdot du \quad \text{und} \quad \partial x_v \cdot dv,$$

die zweiten Faktoren aber in denselben Produkten bezüglich

$$2y_{u,v} + \partial y_u \cdot du + \partial y_v \cdot dv, \quad 2y_{u,v} + \partial y_u \cdot du \quad \text{und} \quad 2y_{u,v} + \partial y_v \cdot dv$$

sind. — Multiplicirt man nun und subtrahirt man, so ergiebt sich das 4seitige Element

$$1234, = +(\partial x_v \cdot \partial y_u - \partial x_u \cdot \partial y_v) \cdot du \cdot dv,$$

während man dasselbe Resultat mit dem entgegengesetzten Vorzeichen erhält, wenn man die andere noch mögliche Lage der Figur sich denkt.

Man hat also in jedem Falle das Element

$$1234, = \pm(\partial x_u \cdot \partial y_v - \partial y_u \cdot \partial x_v) \cdot du \cdot dv,$$

wo man das (+) oder (—) Zeichen so nimmt, daß der Inhalt des Elements als positiv sich ergiebt *).

---

*) Man bekommt dieses allgemeinere Resultat sogleich, wenn man die

Bezeichnet man nun noch durch $f_{(u,v)}$ das, was aus $f_{x,y}$ wird, wenn man statt x und y bezüglich ihre Werthe in u und v aus 3.) und 4.) substituirt, so hat man

$$\text{I.} \qquad \int\!\!\int f_{x,y}\cdot dx\cdot dy = \int\!\!\int \pm f_{(u,v)}\cdot(\partial x_u\cdot\partial y_v - \partial x_v\cdot\partial y_u)\cdot du\cdot dv,$$

wenn rechts u und v alle, bezüglich um du und dv verschiedenen Werthe bekommen, welche allen Werthen von x und y entsprechen.

Erstes Beispiel. Es sey das bestimmte Doppel-Integral

$$1) \qquad \int\!\!\int_{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2} \gtreqless 1} x^2 y\cdot dx\cdot dy$$

— wo aber x und y nie negativ vorausgesetzt werden — durch Einführung der, mittelst der Gleichungen

$$\frac{x}{a} = u \quad \text{und} \quad \frac{y}{b} = v$$

gegebenen neuen Veränderlichen u und v umzuformen. — Es ist jetzt (in diesem Beispiel)

$$\partial x_u = a, \quad \partial x_v = 0, \quad \partial y_u = 0 \quad \text{und} \quad \partial y_v = b;$$

deshalb wird jetzt

$$\partial x_u\cdot\partial y_v - \partial x_v\cdot\partial y_u = ab,$$

und die Gleichung I. giebt daher dieses vorgelegte bestimmte Doppel-Integral 1.)

$$2)\cdots \qquad = \int\!\!\int_{u^2+v^2 \gtreqless 1} a^3b^2u^2v\cdot du\cdot dv \quad \text{d. h.} \quad = a^3b^2\cdot\int\!\!\int_{u^2+v^2 \gtreqless 1} u^2v\cdot du\cdot dv,$$

wo aber auch u und v nie negativ werden können, wenn, wie wir dies hiermit thun, a und b positiv vorausgesetzt werden. Während man aber das in 1.) vorgelegte Doppel-Integral ansehen kann, als drücke es die Masse der Fläche der durch die Gleichung $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2} = 1$ gegebenen Viertels-Ellipse

---

allgemeinen Formeln anwendet, welche den Inhalt eines Dreiecks ausdrücken, dessen drei Ecken durch ihre Koordinaten-Werthe gegeben sind.

aus, wenn die Dichtigkeit an jeder durch x und y gegebenen Stelle desselben durch x^2y vorgestellt ist, — drückt das bestimmte Doppel-Integral

$$\iint_{u^2+v^2 \overline{\gtrless} 1} u^2v \cdot du \cdot dv$$

die Masse der Viertels-Kreisfläche aus, deren Radius die Einheit ist und in welcher jede durch u und v gegebene Stelle die Dichtigkeit u^2v hat. Und unsere Umformung lehrt uns, daß die erstere Masse gefunden wird, wenn man die letztere noch mit a^3b^2 multiplicirt.

Und in der That ist die erstere Masse auch

$$3) \ldots \quad = \int_0^a \left(\int_0^{\mathfrak{y}} x^2y \cdot dy\right) \cdot dx, \quad \text{wenn} \quad \mathfrak{y} = +\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2},$$

und die letztere Masse auch

$$4) \ldots \quad = \int_0^1 \left(\int_0^{\mathfrak{Y}} u^2v \cdot dv\right) \cdot du, \quad \text{wenn} \quad \mathfrak{Y} = +\sqrt{1-u^2}$$

ist. In 3.) giebt nun $\int x^2y \cdot dy$ zunächst $\frac{1}{2}x^2y^2$; also findet sich

$$\int_0^{\mathfrak{y}} x^2y \cdot dy = \tfrac{1}{2}x^2\mathfrak{y}^2 = \tfrac{1}{2}\frac{b^2}{a^2}x^2(a^2-x^2).$$

Wird nun dieses erste bestimmte Integral in 3.) noch einmal nach x integrirt, so erhält man bei der allgemeinen Integration (nach x) zunächst

$$\frac{1}{6}b^2x^3 - \frac{1}{10}\frac{b^2}{a^2}x^5;$$

wird daher nun dasselbe Integral zwischen den Grenzen 0 und a genommen, so erhält man als Werth des Ausdrucks in 3.) sofort

$$5) \ldots \quad \frac{1}{15}a^3b^2,$$

und dies ist die Masse der Viertels-Ellipse.

In 4.) dagegen hat man zuerst

$$\int_0^{\mathfrak{Y}} u^2v \cdot dv = \left[\tfrac{1}{2}u^2v^2\right]_{\mathfrak{Y} \div 0} = \tfrac{1}{2}u^2\mathfrak{Y}^2 = \tfrac{1}{2}u^2(1-u^2).$$

Wird nun dies erste bestimmte Integral (nach v) noch einmal integrirt (nach u), so erhält man als Werth des allgemeinen Integrals

$$\frac{1}{6}u^3 - \frac{1}{10}u^5;$$

und letzteres Integral zwischen den Grenzen 0 und 1 genommen, giebt als Werth des Ausdrucks in 4.)

6)... $$\frac{1}{15};$$

und dies ist die Masse der Viertels-Kreisfläche, deren Radius 1 und deren Dichtigkeit an der durch u und v gegebenen Stelle durch u^2v ausgedrückt ist.

Und so zeigt sich in der That der Werth aus 5.) als das a^3b^2fache des Werthes in 6.).

Zweites Beispiel. Es sey das Doppel-Integral

1) $$\int\int_{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2} \overline{\overline{<}} 1} f \cdot dx \cdot dy,$$

wo a und b wieder positiv gedacht werden, wo dagegen x und y sowohl positiv, als auch Null und negativ seyn sollen, — dadurch umzuformen, daß man r und θ als neue Veränderliche einführt mittelst der Gleichungen

2) $x = r \cdot Cos\,\theta$ und 3) $y = r \cdot Sin\,\theta$

(so daß, wenn x und y als rechtwinkliche Koordinatenwerthe gedacht werden, r und θ als Polar-Koordinaten gedacht werden können).

Es sind hier statt u und v, die Buchstaben r und θ gesetzt; an die Stelle der

$$\partial x_u, \quad \partial x_v, \quad \partial y_u, \quad \partial y_v$$

treten also jetzt ∂x_r, ∂x_θ, ∂y_r, ∂y_θ,

während aus den Gleichungen 2.) und 3.) sich ergiebt

$$\partial x_r = Cos\,\theta, \qquad \partial x_\theta = -r \cdot Sin\,\theta$$

$$\partial y_r = Sin\,\theta, \qquad \partial y_\theta = r \cdot Cos\,\theta.$$

Die Gleichung I. giebt daher jetzt

4) $\int\int f \cdot dx \cdot dy = \int\int f \cdot r \cdot dr \cdot d\theta,$

und es fragt sich nun noch, welchen Umfang in diesem neuen Doppel-Integral die Werthe von r und θ haben müssen.

Es geht aber die Bedingung $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2} \overline{\gtrless} 1$, wenn man statt x und y dieselben Werthe aus 2.) und 3.) setzt, jetzt in diese andere über, nämlich in

5) $$r^2 \cdot \left(\frac{Cos\,\theta^2}{a^2}+\frac{Sin\,\theta^2}{b^2}\right) \overline{\gtrless} 1,$$

während die anderen Bedingungen, daß x und y reell seyn sollen, den Gleichungen 2.) und 3.) gemäß offenbar dadurch erfüllt sind, daß man r von Null an nur positiv nimmt und dem θ nach und nach alle positiven Werthe giebt, die zwischen 0 und 2π liegen.

Diese letzteren Bedingungen in Verbindung mit der Gleichung

6) $$\int\int_{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2} \overline{\gtrless} 1} f \cdot dx \cdot dy = \int\int_{r^2 \cdot \left(\frac{Cos\,\theta^2}{a^2}+\frac{Sin\,\theta^2}{b^2}\right) \overline{\gtrless} 1} f \cdot r \cdot dr \cdot d\theta$$

lösen daher die Aufgabe dieses zweiten Beispiels vollständig.

Anmerkg. 1. Will man aber jetzt eine ganz andere Frage stellen, nämlich: Wie läßt sich dieses Doppel-Integral zur Rechten in der Gleichung 6.), in auf einander folgenden einfachen bestimmten Integralen ausdrücken, — so wird man unterscheiden müssen, ob man zuerst nach θ oder zuerst nach r integriren will.

Soll zuerst nach r integrirt werden, so giebt die untergeschriebene Ungleichung

$$r^2 \cdot \left(\frac{Cos\,\theta^2}{a^2}+\frac{Sin\,\theta^2}{b^2}\right) \overline{\gtrless} 1$$

für den größten, zu jedem Werth von θ gehörigen Werth von r, wenn solcher durch R bezeichnet wird,

7) $$R = \left(\frac{Cos\,\theta^2}{a^2}+\frac{Sin\,\theta^2}{b^2}\right)^{-\frac{1}{2}},$$

und man hat dann ohne Weiteres

8) $$\iint\limits_{r^2\cdot\left(\frac{Cos\,\theta^2}{a^2}+\frac{Sin\,\theta^2}{b^2}\right)\overline{\overline{<}}1} f\cdot r\cdot dr\cdot d\theta = \int_0^{2\pi}\left(\int_0^R f\cdot r\cdot dr\right)\cdot d\theta,$$

wodurch auch diese neue Frage beantwortet ist.

Soll aber zuerst nach θ integrirt werden, so sind die Grenzwerthe dieser Integration offenbar Funktionen von r, die zunächst aus der Ungleichung

9) $$r^2\cdot\left(\frac{Cos\,\theta^2}{a^2}+\frac{Sin\,\theta^2}{b^2}\right)\overline{\overline{<}}1$$

gefunden werden müssen. Diese Ungleichung giebt aber, wenn wir $a>b$ voraussetzen,

10) $$Sin\,\theta^2 \overline{\overline{<}} \frac{b^2}{r^2}\cdot\frac{a^2-r^2}{a^2-b^2},$$

und die hierzu gehörigen Werthe von $Sin\,\theta$ sind nicht alle reell oder doch nicht alle $\overline{\overline{<}}1$ (also dann die Werthe von θ selbst nicht reell), wenn nicht r zwischen a und b liegt.

Für jeden solchen Werth von r aber, der zwischen a und b liegt, erhält man für θ vier Grenzwerthe, von denen der kleinste durch θ_r bezeichnet seyn mag, so daß die drei übrigen durch

$$\pi-\theta_r,\qquad \pi+\theta_r \quad\text{und}\quad 2\pi-\theta_r$$

ausgedrückt sind, während θ_r durch die Gleichung

11) $$Sin\,\theta_r = +\frac{b}{r}\sqrt{\frac{a^2-r^2}{a^2-b^2}}$$

gegeben ist und die der Bedingung 9.) entsprechenden Werthe von θ, zwischen 0 und θ_r, dann wieder zwischen $\pi-\theta_r$ und $\pi+\theta_r$, endlich zwischen $2\pi-\theta_r$ und 2π liegen. — Die Summe folgender drei Theile

$$\int_b^a\left(\int_0^{\theta_r} f\cdot r\cdot d\theta\right)\cdot dr+\int_b^a\left(\int_{\pi-\theta_r}^{\pi+\theta_r} f\cdot r\cdot d\theta\right)\cdot dr$$
$$+\int_b^a\left(\int_{2\pi-\theta_r}^{2\pi} f\cdot r\cdot d\theta\right)\cdot dr$$

giebt daher den Theil des Doppel=Integrals in 6.) zur Rechten, in welchem r alle Werthe hat, die zwischen a und b liegen, während noch der letztere dieser drei Summanden, in dem Falle, daß die Funktion f nicht θ selbst, sondern nur $Cos\,\theta$ und $Sin\,\theta$ enthält, und den wir hier voraussetzen wollen, — wenn man $\theta = 2\pi + \theta'$ setzt (zuletzt aber wieder θ statt θ', und $d\theta$ statt $d\theta'$ schreibt) — noch in

$$\int_b^a \left(\int_{-\theta_r}^{0} f \cdot r \cdot d\theta\right) \cdot dr$$

sich umformt und dann mit dem erstern derselben drei Summanden in

$$\int_b^a \left(\int_{-\theta_r}^{+\theta_r} f \cdot r \cdot d\theta\right) \cdot dr$$

zusammengefaßt werden kann.

Für alle die Werthe von r endlich, welche kleiner als $b (< a)$ sind, sind die Werthe von θ durch die Bedingung

$$r^2 \cdot \left(\frac{Cos\,\theta^2}{a^2} + \frac{Sin\,\theta^2}{b^2}\right) \overline{\overline{<}}\, 1 \quad \text{oder} \quad b^2 \cdot Cos\,\theta^2 + a^2 \cdot Sin\,\theta^2 \overline{\overline{<}}\, \frac{a^2 b^2}{r^2}$$

nicht weiter beschränkt, da jetzt dieser Bedingung durch jeden Werth von θ genügt wird, in so ferne der größte Werth des Ausdrucks $b^2 \cdot Cos\,\theta^2 + a^2 \cdot Sin\,\theta^2$, höchstens a^2 ist, und (bei $r < b$) a^2 noch immer $< \frac{a^2 b^2}{r^2}$ seyn wird. Dieser andere Theil des Doppel=Integrals in 6.) zur Rechten ist daher

$$= \int_0^b \left(\int_0^{2\pi} f \cdot r \cdot d\theta\right) \cdot dr.$$

Man hat deshalb auch noch:

$$12) \quad \iint\limits_{r^2 \cdot \left(\frac{Cos\,\theta^2}{a^2} + \frac{Sin\,\theta^2}{b^2}\right) \overline{\overline{<}}\, 1} f \cdot r \cdot dr \cdot d\theta = \int_0^b \left(\int_0^{2\pi} f \cdot r \cdot d\theta\right) \cdot dr$$

$$+ \int_b^a \left(\int_{-\theta_r}^{+\theta_r} f \cdot r \cdot d\theta\right) \cdot dr + \int_b^a \left(\int_{\pi-\theta_r}^{\pi+\theta_r} f \cdot r \cdot d\theta\right) \cdot dr,$$

so daß jetzt das Doppel=Integral in drei Theile zerlegt werden

mußte, um jeden Theil durch zwei auf einander folgende einfache Integrationen ausdrücken zu können *).

Anmerkg. 2. Wie wichtig aber die geschickte Einführung neuer Veränderlichen bei der Auswerthung von Doppel-Integralen werden kann, läßt das nachstehende einfache Beispiel erkennen.

Soll nämlich der Inhalt einer Ellipse (Fig. 2.) gefunden werden, deren halbe Axen a und b sind, so ist solcher ausgedrückt durch das Doppel-Integral

$$\int\int_{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\overline{\gtrless}1} 1\cdot dy\cdot dx, \quad \text{also auch durch} \quad \int_{-a}^{a}\left(\int_{\mathfrak{y}}^{\mathfrak{Y}} 1\cdot dy\right)\cdot dx,$$

wo $\mathfrak{Y} = \frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}$ und $\mathfrak{y} = -\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}$ ist. Das erste Integral (nach y) giebt nun, wenn solches zwischen den Grenzen $y = \mathfrak{y}$ und $y = \mathfrak{Y}$ genommen wird, $\frac{2b}{a}\sqrt{a^2-x^2}$ und dieses muß nun allgemein nach x integrirt, letzteres Integral aber zwischen den Grenzwerthen $x = -a$ und $x = +a$ genommen werden. Diese allgemeine Integration nach x erfordert aber die Auffindung von $\int\sqrt{a^2-x^2}\cdot dx$ und daher mühsamere Rechnungen.

Führt man dagegen neue Veränderliche r und θ ein und zwar nicht wie oben, mittelst der Gleichungen $x = r\cdot Cos\,\theta$ und $y = r\cdot Sin\,\theta$, sondern jetzt lieber mittelst der Gleichungen $\frac{x}{a} = r\cdot Cos\,\theta$ und $\frac{y}{b} = r\cdot Sin\,\theta$, so daß $\partial x_\theta = -ar\cdot Sin\,\theta$,

---

*) Man kann das gegebene Doppel-Integral 1.) so ansehen, als drücke es die Masse der Ellipse ABCD (Fig. 2.) aus, in welcher $OA = OB = a$ und $OC = OD = b$ ist, während f die Dichtigkeit der durch $OP = x$ und $PM = y$ gegebenen Stelle M vorstellt. In der Gleichung 12.) drückt dann das erste der Doppel-Integrale zur Rechten die Masse des Kreises CEDF aus; das zweite der zur Rechten in 12.) stehenden Doppel-Integrale wird dann die Masse des sichelförmigen Stückes CFDBC ausdrücken, während das dritte (der zur Rechten stehenden Doppel-Integrale) die Masse des anderen sichelförmigen Stücks CEDAC ausdrücken wird.

$\partial x_r = a \cdot Cos\,\theta$, $\partial y_\theta = br \cdot Cos\,\theta$ und $\partial y_r = b \cdot Sin\,\theta$ wird, so hat man

$$\partial x_r \cdot \partial y_\theta - \partial y_r \cdot \partial x_\theta = abr,$$

und unser Doppel-Integral geht daher über in

$ab \cdot \iint_{r^2 \overline{\gtrless} 1} r \cdot dr \cdot d\theta$, also in $ab \cdot \int_0^{2\pi} \left(\int_0^1 r \cdot dr\right) \cdot d\theta$ und die Rechnung wird nun so: $\int r \cdot dr = \frac{1}{2} r^2$, $\int_0^1 r \cdot dr = \frac{1}{2}$, $\int \left(\int_0^1 r \cdot dr\right) \cdot d\theta = \frac{1}{2}\theta$, endlich $\int_0^{2\pi} \left(\int_0^1 r \cdot dr\right) \cdot d\theta = \pi$, so daß fast ohne alle Rechnung der Inhalt der Ellipse $= ab\pi$ sich ergiebt *).

Daß aber hier zuletzt die Rechnung so einfach wurde, liegt offenbar vorzüglich in dem Umstande, daß in den neuen einfachen Integralen die Grenzen alle konstant d. h. von demjenigen Veränderlichen unabhängig geworden sind, nach welchem die nachfolgende Integration erfolgen soll **).

---

*) Dieselben hier eingeführten neuen Veränderlichen müßte man auch im obigen zweiten Beispiel einführen, wenn die Grenzen der neuen Integrale constant werden sollten und die Rechnung die bequemste.

**) Fragt man sich, welches hier die Kurven MN und PQ (Fig. 3.) sind, durch welche bei Einführung der neuen Veränderlichen r und θ, mittelst der Gleichungen $\frac{x}{a} = r \cdot Cos\,\theta$ und $\frac{y}{b} = r \cdot Sin\,\theta$ die Fläche der Ellipse in neue unendlich-kleine Elemente zerlegt wird, wie solches der §. 86. beschreibt, — so muß man aus diesen letztern beiden Gleichungen zuerst θ, dann r eliminiren. Man erhält dann zuerst $\frac{x^2}{a^2r^2} + \frac{y^2}{b^2r^2} = 1$; und dies ist die Gleichung einer Ellipse, deren halben Axen ar und br von 0 an wachsen, so wie r von 0 an stetig um dr wächst. Bei der anderen Elimination erhält man $\frac{ay}{bx} = Tg\,\theta$ und dies ist die Gleichung einer geraden Linie, welche mit der Axe OX einen Winkel θ' bildet, dessen trigonometrische Tangente $= \frac{b}{a} \cdot Tg\,\theta$ ist, und welcher dadurch von 0 an bis 2π wächst, daß θ von 0 an stets um $d\theta$ wachsend gedacht wird,

Um auch noch ein Beispiel zu geben, in welchem die gedachte Umformung keinen ähnlichen Vortheil bringt, wollen wir noch den durch das Doppel-Integral

1) $$\iint 1 \cdot dx \cdot dy \quad {\scriptstyle a \overline{\overline{<}} x \overline{\overline{<}} b,\; y^2 - px \overline{\overline{<}} 0}$$

ausgedrückten Inhalt des Stückes ABDCA der Parabel (Fig. 6.–8.) betrachten, deren Parameter p ist, während OX ihr Hauptdurchmesser und $OA = a$, so wie $OB = b$ seyn soll und AC und BD auf OX senkrecht stehen (so daß y nur positiv gedacht wird, eben so wie x).

Es sey F der Brennpunkt dieser Parabel, also $OF = \frac{1}{4}p$; führen wir nun den Winkel $MOX = \varphi$, so wie $FM = r$ als neue Koordinaten ein, statt der alten $OP = x$ und $PM = y$, so hat man

$$x = \tfrac{1}{4}p + r \cdot Cos\,\varphi \quad \text{und} \quad y = r \cdot Sin\,\varphi,$$

so daß, da φ nie $> \pi$, also $Sin\,\varphi$ nie negativ wird, r mit y zugleich nur positiv werden kann. Die Bedingung $a \overline{\overline{<}} x \overline{\overline{<}} b$ geht nun über in diese $a - \frac{1}{4}p \overline{\overline{<}} r \cdot Cos\,\varphi \overline{\overline{<}} b - \frac{1}{4}p$; während die andere Bedingung $y^2 - px \overline{\overline{<}} 0$ jetzt übergeht in

$$r^2 \cdot Sin\,\varphi^2 - p(\tfrac{1}{4}p + r \cdot Cos\,\varphi) \overline{\overline{<}} 0,$$

d. h. in

$$\left[r \cdot Sin\,\varphi + \tfrac{1}{2}p \cdot \frac{1 - Cos\,\varphi}{Sin\,\varphi}\right] \cdot \left[r \cdot Sin\,\varphi - \tfrac{1}{2}p \cdot \frac{1 + Cos\,\varphi}{Sin\,\varphi}\right] \overline{\overline{<}} 0,$$

d. h. weil der erstere dieser Faktoren stets positiv ist, in

$$r \cdot Sin\,\varphi - \tfrac{1}{2}p \cdot \frac{1 + Cos\,\varphi}{Sin\,\varphi} \overline{\overline{<}} 0 \quad \text{oder} \quad r \overline{\overline{<}} \frac{\frac{1}{2}p}{1 - Cos\,\varphi}.$$

Und weil ferner

$$\partial x_r = Cos\,\varphi, \qquad \partial y_r = Sin\,\varphi$$

$$\partial x_\varphi = -r \cdot Sin\,\varphi \quad \text{und} \quad \partial y_\varphi = r \cdot Cos\,\varphi$$

---

bis $\theta = 2\pi$ geworden ist. Die Zertheilung der Fläche geschieht also hier durch stetig auf einander folgende concentrische Ellipsen einerseits, und andererseits durch unendlich-viele durch O hindurchgehende gerade Linien.

wird, so hat man wiederum

$$\partial x_r \cdot \partial y_\varphi - \partial y_r \cdot \partial x_\varphi = r;$$

und man findet daher

$$\iint\limits_{a \gtreqless x \gtreqless b,\ y^2 - px \gtreqless 0} 1 \cdot dx \cdot dy = \iint\limits_{\substack{\frac{a-\frac{1}{4}p}{Cos\,\varphi} \gtreqless r \gtreqless \frac{b-\frac{1}{4}p}{Cos\,\varphi},\\ r \gtreqless \frac{\frac{1}{2}p}{1-Cos\,\varphi}}} r \cdot dr \cdot d\varphi,$$

wodurch die verlangte Umformung bewirkt ist.

Wollte man nun aber dieses gefundene Doppel-Integral (zur Rechten) auswerthen, so müßte man die drei Fälle unterscheiden

A.) wenn $a-\frac{1}{4}p$ negativ und $b-\frac{1}{4}p$ positiv,

B.) wenn diese Differenzen $a-\frac{1}{4}p$ und $b-\frac{1}{4}p$ beide positiv und

C.) wenn dieselben Differenzen beide negativ sind.

Betrachtung des Falles A. (Fig. 6.)

In diesem Falle ist der zweiten Bedingung gemäß

$$R = \frac{\frac{1}{2}p}{1-Cos\,\varphi}$$

der größeste Werth, den r für irgend einen Werth von φ erreichen kann; es kann aber auch $r = 0$ werden. Sucht man daher die beiden Werthe φ' und φ'' von φ, für welche dieser größeste Werth R bezüglich der Grenze $\frac{b-\frac{1}{4}p}{Cos\,\varphi}$ oder der Grenze $\frac{a-\frac{1}{4}p}{Cos\,\varphi}$ von r (aus der erstern Bedingung) gleich wird, so wird man φ' und φ'' bestimmt sehen durch die Gleichungen

$$Cos\,\varphi' = \frac{b-\frac{1}{4}p}{b+\frac{1}{4}p} \quad \text{und} \quad Cos\,\varphi'' = \frac{a-\frac{1}{4}p}{a+\frac{1}{4}p}$$

(wo $\varphi' < \frac{1}{2}\pi$ und $\varphi'' > \frac{1}{2}\pi$ gefunden wird).

Von $\varphi = \varphi'$ an bis zu $\varphi = \varphi''$ hin wird r alle Werthe haben können von 0 bis R hin. — Für alle Werthe

von φ dagegen, welche zwischen 0 und φ' liegen, wird r den größesten Werth R nie erreichen können, weil $r \cdot Cos\varphi \overline{\gtrless} b - \frac{1}{4}p$ werden muß; für diese Werthe von φ wird also der größte Werth, den r annehmen kann, jetzt

$$R' = \frac{b - \frac{1}{4}p}{Cos\varphi}$$

seyn, während auch hier $r = 0$ der kleinste ist. — Für alle Werthe von φ endlich, welche zwischen φ'' und π liegen, wird

$$R'' = \frac{a - \frac{1}{4}p}{Cos\varphi}$$

der größeste, wie 0 der kleinste Werth seyn, den r annehmen kann. Unser Doppel-Integral $\int\int r \cdot dr \cdot d\varphi$ wird also jetzt ausgedrückt seyn, durch die Summe

$$\int_{\varphi'}^{\varphi''}\left(\int_0^R r \cdot dr\right) \cdot d\varphi + \int_0^{\varphi'}\left(\int_0^{R'} r \cdot dr\right) \cdot d\varphi + \int_{\varphi''}^{\pi}\left(\int_0^{R''} r \cdot dr\right) \cdot d\varphi,$$

von welcher der erstere Summand den Inhalt CFDC, der andere Summand den Inhalt des Dreiecks FBDF, der dritte Summand endlich den Inhalt des Dreiecks FCAF (Fig. 6.) ausdrückt.

Betrachtung des Falles B. (Fig. 7.)

In diesem Falle kann r nicht Null werden, sondern der kleinste, zu einem Werth φ gehörige Werth von r ist jetzt der vorhin durch R'' bezeichnete, während φ nur alle Werthe haben kann von $\varphi = 0$ an bis zu $\varphi = \varphi''$ hin, unter φ'' den obigen Werth verstanden. Man hat daher jetzt

$$\int\int r \cdot dr \cdot d\varphi = \int_{\varphi'}^{\varphi''}\left(\int_{R''}^{R} r \cdot dr\right) \cdot d\varphi + \int_0^{\varphi'}\left(\int_{R''}^{R'} r \cdot dr\right) \cdot d\varphi,$$

von welcher Summe der erstere Theil den Inhalt CEDC, der andere Theil aber den Inhalt AEDBA liefert (Fig. 7.).

Betrachtung des Falles C. (Fig. 8.)

In diesem Falle müssen alle Werthe von φ, $> \frac{1}{2}\pi$ seyn, damit $Cos\varphi$ stets negativ ist, weil außerdem der Bedingung

$\frac{a-\frac{1}{4}p}{Cos\varphi} < r < \frac{b-\frac{1}{4}p}{Cos\varphi}$ nicht genügt wäre; auch verlangt diese Bedingung jetzt, daß φ von $\varphi = \varphi'$ an bis $\varphi = \pi$ hin sich erstreckt. Endlich ist dasmal R' der kleinste Werth, den r haben kann. Daher wird dasmal

$$\int\int r \cdot dr \cdot d\varphi = \int_{\varphi'}^{\varphi''} \left(\int_{R'}^{R} r \cdot dr\right) \cdot d\varphi + \int_{\varphi''}^{\pi} \left(\int_{R'}^{R''} r \cdot dr\right) \cdot d\varphi,$$

von welcher Summe der erstere Summand den Inhalt CED, der andere Summand aber den Inhalt ACBE liefert (Fig. 8.).

Dieses Beispiel wird aber vorzüglich dazu beitragen, dem Anfänger den Unterschied zwischen einem Doppel-Integral und zwei auf einander folgenden bestimmten einfachen Integralen noch deutlicher zu machen.

Anmerkg. 3. Um in dieser wichtigen Untersuchung über die Einführung neuer Veränderlichen in gegebene Doppel- oder mehrfache Integrale, nichts zu versäumen, was beitragen kann, dem Anfänger mehr Licht zu geben, fügen wir hier auch noch folgende Betrachtung hinzu.

Der einfachste hierher gehörige Fall ist der, wo ein einfaches Integral

1) $$\int_{a \leqq x \leqq b} f \circ dx$$

durch Einführung eines neuen Veränderlichen u mittelst der Gleichung

2) $$x = \varphi_u \quad (= x_u)$$

umgeformt werden soll.

Man hat hier $dx = \varphi_{u+du} - \varphi_u$ d. h.

3) $$dx = \partial\varphi_u \cdot du \quad (= \partial x_u \cdot du),$$

und man erhält daher sofort

4) $$\int_{a \gtreqless x \lesseqgtr b} f \cdot dx = \int_{a \gtreqless \varphi_u \lesseqgtr b} (f \cdot \partial x_u) \cdot du,$$

wenn dem u alle um du verschiedenen Werthe gegeben werden,

welche der Funktion φ_u nach und nach alle Werthe zukommen lassen, die zwischen a und b liegen.

Wenn nun erstens die aus $x = \varphi_u$ zu allen wachsenden Werthen von x (von $x = a$ an bis zu $x = b$ hin) gehörigen Werthe von u, ebenfalls stets wachsen, so ist du mit dx zugleich stets positiv, und die Gleichung 4.) kann dann so geschrieben werden, nämlich

$$5) \qquad \int_a^b f \cdot dx = \int_\alpha^\beta (f \cdot \partial x_u) \cdot du,$$

wenn α der Werth von u aus der Gleichung $a = \varphi_u$ und wenn eben so $b = \varphi_\beta$ ist.

Wenn aber zweitens die zu den stets wachsend gedachten Werthen von x gehörigen Werthe von u (aus der Gleichung 2.) stets abnehmen, so ist (in der Gleichung 3.) du negativ, so lange dx positiv gedacht wird, und eben so ist nun $\partial\varphi_u$ d. h. ∂x_u stets negativ. Will man daher nun die Gleichung 4.) anwenden, aber du sich positiv denken, wie wir dies in unserer Bezeichnung des voranstehenden §. 85. stets vorausgesetzt haben, so muß rechts noch ein (—) Zeichen vorgesetzt werden, und daher wird die Gleichung 4.) nur dann in beiden Fällen wahr bleiben, wenn sie so geschrieben wird, nämlich

$$(\odot)\ldots \qquad \int_{a \overset{=}{<} x \overset{=}{<} b} f \cdot dx = \int_{a \overset{=}{<} \varphi_u \overset{=}{<} b} (\pm f \cdot \partial x_u) \cdot du,$$

so daß hier zur Rechten du stets positiv gedacht, dagegen das (—) Zeichen genommen wird, so lange ∂x_u negativ ist. — Nimmt man hier wieder α und β aus den Gleichungen $a = \varphi_\alpha$ und $b = \varphi_\beta$, so ist der jetzigen Voraussetzung zufolge, $\alpha > \beta$ und deshalb bleibt die Gleichung 5.) bei unserer im VIII. Th. §. 84. angenommenen Bezeichnung auch jetzt noch immer wahr, in so ferne nach jener Bezeichnung $du = \frac{\beta - \alpha}{n}$, $n = \infty$, folglich du stets negativ genommen werden muß.

So sehen wir den Satz VIII. Th. §. 97. hier auf's Neue in seinem dortigen Umfange wieder gefunden.

Nun können aber drittens die zu allen stets wachsend gedachten Werthen von x, gehörigen Werthe von u (aus der Gleichung 2.) Anfangs mit dx zugleich wachsen von α an bis sie ein Maximum m erreicht haben, dann aber bis zu $u = \beta$ hin wiederum stets abnehmen. Bei dieser Voraussetzung ist du mit dx und ∂x_u zugleich positiv, so lange u von α an bis zu m hin wächst; es sind aber du und ∂x_u negativ, während dx positiv gedacht wird, so lange u von m an bis zu β hin wiederum abnimmt. Will man daher auch in diesem Falle die Gleichung ($\odot$) gelten lassen, und dabei in dem Zeichen zur Rechten (in $\odot$) du stets positiv sich denken, wie wir dies bei der Bezeichnung des hiesigen §. 85. N. 1. und N. 5. angenommen haben, so muß man (in $\odot$) das (+) Zeichen gelten lassen, so lange ∂x_u positiv ist, also von $u = \alpha$ an bis zu $u = m$ hin, dann aber das (—) Zeichen nehmen, während u von $u = m$ an bis zu $u = \beta$ hin genommen wird. Allein in diesem Falle müßte man auch jeden Werth von u der nicht einen der äußersten Grenzwerthe α oder β überschreitet, doppelt einsetzen, einmal während ∂x_u positiv und noch einmal während ∂x_u negativ ist.

Deshalb mußten wir im VIII. Th. §. 97., wo der durch die hiesige Gleichung 5.) ausgesprochene Lehrsatz aufgestellt ist (bei der im VIII. Th. §. 84. eingeführten Bezeichnungsweise) zur Bedingung machen, daß der (dortige) Satz nur gilt, so lange die zu den stetig wachsenden Werthen von x, gehörigen Werthe von u ebenfalls stets wachsen, oder doch stets abnehmen.

Nennen wir x_m den zu dem größten Werth m von u, gehörigen Werth von x, so ist klar, daß (wenigstens) zu jedem Werth von u, der nicht kleiner als eine der Grenzen α oder β ist, zwei reelle Werthe von x gehören, wovon der eine kleiner, der andere größer als x_m ist. Also ist in dem jetzt gedachten Fall die Funktion x_u zweiförmig, und deshalb ist nun auch ∂x_u zweiförmig und zwar so, daß für alle von $u = \alpha$ bis $u = m$ hin wachsenden Werthe von x, die eine der Formen,

— für alle von $u = m$ an bis zu $u = \beta$ hin abnehmenden Werthe von u dagegen, die andere der beiden Formen der Funktion ∂x_u genommen werden muß.

Sollte also die Gleichung (⊙) auch in dem hier gedachten dritten Fall noch gelten, so müßte man nicht nur von $u = m$ an bis zu $u = \beta$ hin, das Vorzeichen (+) in das andere (—) übergehen lassen, sondern auch statt ∂x_u eine ganz andere Funktion nehmen als vorher, wo u von α an bis zu m hin gewachsen ist.

Ohne auf noch andere Fälle einzugehen, können wir doch aus den hier bereits angestellten Betrachtungen Folgendes entnehmen:

A. Es würde gut gethan seyn, im Falle man den Satz §. 97. des VIII. Th. nach der Bezeichnungsweise des hiesigen §. 85. durch die Gleichung (⊙) ausdrücken wollte, denselben doch ebenfalls nur unter der Bedingung gelten zu lassen, daß u aus $x = \varphi_u$ oder $x = x_u$ für die Werthe von x, die zwischen a und b liegen, weder ein Maximum noch ein Minimum hat.

B. Das (±) Zeichen in der zusammengesetzteren Gleichung I. des §. 86., nämlich in der Gleichung

I. $$\iint f \cdot dx \cdot dy = \iint \pm f \cdot (\partial x_u \cdot \partial y_v - \partial y_u \cdot \partial x_v) \cdot du \cdot dv$$

entsteht ebenfalls nur dadurch, daß man sich nach der Bezeichnungsweise des §. 85. du und dv stets positiv denkt, während der in Klammern eingeschlossene Faktor, — je nachdem die Werthe von u und v mit denen von x und y zugleich wachsen (oder doch u und v gleichzeitig abnehmen) oder die Werthe von u oder v abnehmen, während die übrigen alle gleichzeitig wachsen, — bald positiv, bald negativ seyn wird, so daß im erstern Falle das (+), im anderen Falle aber das (—) Zeichen genommen werden muß, damit der Gesammt-Faktor von f, wie er zur Linken positiv gedacht wird (nämlich $dx \cdot dy$) auch zur Rechten positiv bleibe.

C. Man wird wohl thun auch diese Gleichung I. des §. 86.

nur unter der Voraussetzung zuzulassen, daß die zwischen x, y, u und v gegebenen Gleichungen zu jedem Paar reeller Werthe von u und v, nur ein einziges Paar reeller Werthe von x und y liefern (innerhalb der jedesmal noch besonders gegebenen Grenzen).

§. 87.

Wir verstehen von nun an unter einem bestimmten dreifachen Integral

$$\int\int\int f_{x,y,z} \cdot dx \cdot dy \cdot dz$$

die Summe der unendlich mal unendlich-vielen Produkte $f \cdot dx \cdot dy \cdot dz$, welche aus dem allgemeinen Produkt hervorgehen, wenn man in selbigem statt x, y und z nach und nach und unabhängig von einander alle, um bezüglich die unendlich-kleinen und positiv gedachten dx, dy, dz verschiedenen Werthe von x, y und z setzt, von gewissen Grenzwerthen an bis zu gewissen Grenzwerthen hin, oder alle die Werthe setzt, welche gewissen, dem Integralzeichen untergesetzten Bedingungen genügen.

Auf ähnliche Weise werden bestimmte vierfache, fünffache, vielfache Integrale definirt.

Ein solches bestimmtes dreifaches Integral läßt sich häufig durch drei auf einander folgende einfache Integrationen zwischen bestimmten Grenzen ausdrücken, zuweilen aber auch nur in zwei oder mehr solche Theile zerlegen, die durch drei solche auf einander folgende einfache Integrationen ausgedrückt werden können.

Aehnliches gilt von allen bestimmten vielfachen Integralen*).

§. 88.

Es ist gegeben ein dreifaches Integral

1) $$\int\int\int f_{x,y,z} \cdot dx \cdot dy \cdot dz;$$

---

*) Bei jedem dreifachen Integral, wie das obige, kann man sich vorstellen: es drücke die Masse des Körpers aus, dessen Dichtigkeit an der, durch die rechtwinklichen Koordinaten-Werthe x, y, z gegebenen Stelle $= f_{x,y,z}$ ist.

man soll solches dadurch umformen, daß man statt x, y, z drei neue Veränderliche u, v, w einführt, mittelst drei gegebener Gleichungen, die, wenn sie nach x, y und z aufgelöst werden, die Form

2) $x = x_{u,v,w}$, 3) $y = y_{u,v,w}$, 4) $z = z_{u,v,w}$

annehmen mögen, wo $x_{u,v,w}$, $y_{u,v,w}$, $z_{u,v,w}$ gegebene Funktionen von u, v und w sind, die natürlich weder x, noch y, noch z enthalten.

Um eine leichte und bequeme Auflösung dieser Aufgabe zu erhalten, denke man sich, als stelle das gegebene dreifache Integral die Masse eines Körpers vor, welcher an jeder, durch die rechtwinklichen Koordinaten-Werthe x, y, z gegebenen Stelle die Dichtigkeit $f_{x,y,z}$ hat.

Eliminirt man nun aus den drei Gleichungen 2.—4.) zunächst v und w, so daß man die Gleichung

5) $\varphi_{x,y,z,u} = 0$

erhält, so giebt diese Gleichung für die um du wachsenden Werthe von u eine unendliche Menge von Flächen, welche den Körper in unendlich-viele, unendlich-dünne Lappen zerschneiden. — Eliminirt man aber aus denselben Gleichungen 2.—4.) erst u und w, dann u und v, so bekommt man noch zwei analoge Gleichungen

6) $\psi_{x,y,z,v} = 0$ und 7) $\chi_{x,y,z,w} = 0$,

und die aus diesen Gleichungen für die bezüglich um dv und dw wachsenden Werthe von v und w hervorgehenden zwei Reihen von Flächen, zerlegen in Verbindung mit der erstgedachten Reihe von Flächen, den vorgedachten Körper in unendlich-viele unendlich-kleine parallelepipedalische*) Körperchen, von denen

*) Daß in diesen von 6 Flächen begrenzten Körperchen, je zwei einander gegenüberliegende begrenzende Flächen an diesem, durch x, y, z gegebenen Punkt M, mit einander parallel laufen, beweist sich am einfachsten dadurch, daß man sich überzeugt, wie die aus den Gleichungen 5.), nämlich

eines in der Fig. 4.) zu sehen ist. Dieses (rechtwinkliche oder schiefwinkliche) Parallelepipedum wird nun durch die Diagonal-Ebene 1367 in zwei congruente dreiseitige Prismen zerlegt; und jedes solche Prisma ist das dreifache der Pyramide 1235, so daß das ganze parallelepipedalische Körperchen das 6fache dieser letztgenannten Pyramide 1235 ist, deren Eckpunkte bezüglich die Koordinatenwerthe

1...	$x,$	$y,$	$z,$
2...	$x+\partial x_u \cdot du,$	$y+\partial y_u \cdot du,$	$z+\partial z_u \cdot du,$
3...	$x+\partial x_v \cdot dv,$	$y+\partial y_v \cdot dv,$	$z+\partial z_v \cdot dv,$
5...	$x+\partial x_w \cdot dw,$	$y+\partial y_w \cdot dw,$	$z+\partial z_w \cdot dw$

haben, wenn hier unter x, y und z die Funktionen in 2.—4.) zur Rechten, verstanden werden *).

Nun berechnet sich aber der Inhalt dieser Pyramide, von deren vier Eckpunkten die Koordinaten-Werthe bekannt sind, nach den Principien der analytischen Geometrie ohne Weiteres und man erhält diesen Inhalt

$$=\pm\tfrac{1}{6}(\partial x_u \cdot \partial y_v \cdot \partial z_w - \partial x_u \cdot \partial z_v \cdot \partial y_w + \partial y_u \cdot \partial z_v \cdot \partial x_w - \partial y_u \cdot \partial x_v \cdot \partial z_w + \partial z_u \cdot \partial x_v \cdot \partial y_w - \partial z_u \cdot \partial y_v \cdot \partial x_w)$$

oder $$= \pm D[\partial x_u \cdot \partial y_v \cdot \partial z_w],$$

wenn man durch $D[\partial x_u \cdot \partial y_v \cdot \partial z_w]$ die vorstehende aus 6 analogen, mit abwechselnden Vorzeichen versehenen Gliedern be-

---

aus $\varphi_{x,y,z,u} = 0$ und $\varphi_{x,y,z,u+du} = 0$ hervorgehenden ∂z_x und ∂z_y, von denen die Lage der Tangential-Ebenen abhängt, nur um unendlich wenig von einander verschieden sind.

*) So lange in diesen Funktionen 2.—4.) v und w dieselben bleiben und nur u in $u+du$ übergeht, so lange drücken dieselben Funktionen $x_{u+du,v,w}$, $y_{u+du,v,w}$, $z_{u+du,v,w}$ die Koordinatenwerthe des Punktes aus, der in den durch die Gleichungen

$$\varphi_{x,y,z,u+du} = 0, \quad \psi_{x,y,z,v} = 0 \quad \text{und} \quad \chi_{x,y,z,w} = 0$$

gegebenen Flächen liegt. — Ganz analog bei den 2 übrigen Punkten der dreiseitigen Pyramide 1235.

stehende Summe bezeichnet. Und man hat daher, wenn $f_{(u,v,w)}$ das bezeichnet, was aus $f_{x,y,z}$ wird, sobald man statt x, y und z ihre Werthe (aus 2.–4.) setzt,

II. $\int\int\int f_{x,y,z} \cdot dx \cdot dy \cdot dz = \int\int\int \pm f_{(u,v,w)} \cdot D[\partial x_u \cdot \partial y_v \cdot \partial z_w] \cdot du \cdot dv \cdot dw$ *),

---

*) Wenn man die drei einfachen Gleichungen

$$\partial x_u \cdot p + \partial x_v \cdot q + \partial x_w \cdot r = s$$

$$\partial y_u \cdot p + \partial y_v \cdot q + \partial y_w \cdot r = s'$$

$$\partial z_u \cdot p + \partial z_v \cdot q + \partial z_w \cdot r = s''$$

nach den drei Unbekannten p, q, r algebraisch auflöst, so erhält man nachdem alle Bruchsbrüche weggeschafft sind, denselben hier oben durch $\pm D[\partial x_u \cdot \partial y_v \cdot \partial z_w]$ bezeichneten Ausdruck als gemeinschaftlichen Nenner der für p, q, r gefundenen Werthe, so daß der obige Ausdruck D nichts anders ist, als was Gauß die Determinante dieser drei letztern einfachen Gleichungen genannt hat.

Daß $\pm\frac{1}{6}D[\partial x_u \cdot \partial y_v \cdot \partial z_w]$ wirklich der Inhalt der gedachten Pyramide ist, kann übrigens so nachgewiesen werden: Fällt man nämlich von allen vier Punkten 1, 2, 3 und 5 Linien 11′, 22′, 33′ und 55′ senkrecht auf die Ebene XOY, so ergeben sich vier abgestumpfte dreiseitige Prismen; und der Inhalt der Pyramide bleibt nun übrig, wenn man von einer dieser letztern die Summe der drei übrigen subtrahirt, oder wenn umgekehrt, von der Summe dreier derselben die vierte subtrahirt wird. Nun wird aber der Inhalt eines dreiseitigen abgestumpften Prisma gefunden, wenn man den senkrechten Querschnitt mit dem dritten Theile der Summe der drei parallelen Kanten multiplicirt, und diese Kanten 11′, 22′, 33′, 55′ haben hier bezüglich die Länge z, $z+\partial z_u \cdot du$, $z+\partial z_v \cdot dv$ und $z+\partial z_w \cdot dw$. — Dabei kann die Rechnung dadurch abgekürzt werden, daß man durch den von x, y, z bestimmten Punkt eine neue Koordinaten-Ebene mit der XOY parallel gelegt sich denkt, wodurch dieselben Kanten bezüglich 0, $\partial z_u \cdot du$, $\partial z_v \cdot dv$ und $\partial z_w \cdot dw$ werden.

Der Inhalt des senkrechten Querschnitts eines jeden dieser vier abgestumpften Prismen wird auch dadurch einfacher gefunden, daß man durch denselben Punkt (x, y, z) noch zwei andere neue, mit XOZ und YOZ parallele Koordinaten-Ebenen legt, wodurch die vier Eckpunkte 1′, 2′, 3′ und 5′ dieser vier senkrechten dreiseitigen Querschnitte bezüglich diese einfacheren Koordinatenwerthe haben, nämlich

während rechts statt u, v, w alle, bezüglich um die unendlich-kleinen du, dv, dw wachsenden Werthe gesetzt werden müssen, die allen zu setzenden Werthen von x, y und z entsprechen.

Erstes Beispiel. Will man die Masse eines Ellipsoides finden, dessen Dichtigkeit an der durch x, y, z gegebenen Stelle durch $f_{x,y,z}$ vorgestellt ist, so ist solche zunächst

$$1) \qquad = \iiint_{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\overline{\overline{<}}1} f_{x,y,z}\cdot dx\cdot dy\cdot dz,$$

wenn $a\overline{\overline{>}}b\overline{\overline{>}}c$ die drei halben Axen dieses Ellipsoids sind. — Führt man dann die gewöhnlichen Polar-Koordinaten θ, φ und r ein, wo (Fig. 5.) θ der Winkel ist, den die Ebene MOX mit der Ebene YOX bildet, während W. MOX $= \varphi$ und OM $=$ r ist (wenn M den durch OP $=$ x, PQ $=$ y und QM $=$ z gegebene Punkt des Körpers vorstellt) — so hat man, weil W. MPQ $= \theta$ ist,

$$2)\ x = r\cdot Cos\varphi,\quad 3)\ y = r\cdot Sin\varphi\cdot Cos\theta,\quad 4)\ z = r\cdot Sin\varphi\cdot Sin\theta,$$

also auch

$$\partial x_\theta = 0,\qquad \partial x_\varphi = -r\cdot Sin\varphi,\qquad \partial x_r = Cos\varphi,$$

$$\partial y_\theta = -r\cdot Sin\varphi\cdot Sin\theta,\qquad \partial y_\varphi = r\cdot Cos\varphi\cdot Cos\theta,$$

$$\partial y_r = Sin\varphi\cdot Cos\theta,$$

$$\partial z_\theta = r\cdot Sin\varphi\cdot Cos\theta,\qquad \partial z_\varphi = r\cdot Cos\varphi\cdot Sin\theta,$$

endlich $\partial z_r = Sin\varphi\cdot Sin\theta.$

Daher wird nun auch (weil $\partial x_\theta = 0$ ist)

$$D[\partial x_\theta\cdot\partial y_\varphi\cdot\partial z_r] = \partial y_\theta\cdot\partial z_\varphi\cdot\partial x_r - \partial y_\theta\cdot\partial x_\varphi\cdot\partial z_r + \partial z_\theta\cdot\partial x_\varphi\cdot\partial y_r$$
$$-\partial z_\theta\cdot\partial y_\varphi\cdot\partial x_r = -r^2\cdot Sin\varphi.$$

Die fragliche Masse des Ellipsoides wird also jetzt

$$5)\ldots \qquad = \iiint_{r^2\cdot\left(\frac{Cos\varphi^2}{a^2}+\frac{Sin\varphi^2\cdot Cos\theta^2}{b^2}+\frac{Sin\varphi^2\cdot Sin\theta^2}{c^2}\right)\overline{\overline{<}}1} f\cdot r^2\cdot Sin\varphi\cdot dr\cdot d\varphi\cdot d\theta.$$

0, 0; $\partial x_u\cdot du$, $\partial y_u\cdot du$; $\partial x_v\cdot dv$, $\partial y_v\cdot dv$; $\partial x_w\cdot dw$, $\partial y_w\cdot dw$.

Die weitere Rechnung ist nun leicht vollends auszuführen.

Wären nun (in der Aufgabe) die Veränderlichen x, y, z bloß positiv vorausgesetzt, d. h. sollte nur die Masse eines 8ten Theils des Ellipsoides gefunden werden, so folgt aus den Gleichungen 2.–4.), daß man r bloß positiv oder Null, φ bloß von 0 bis $\frac{1}{2}\pi$, und θ auch nur von 0 bis $\frac{1}{2}\pi$ nehmen dürfe, so daß dann die Masse dieses 8ten Theils des Ellipsoids auch

$$6)\cdots \quad = \int_0^{\frac{1}{2}\pi}\left(\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\left(\int_0^{R} f_{(\theta,\varphi,r)}\cdot r^2\cdot Sin\,\varphi\cdot dr\right)\cdot d\varphi\right)\cdot d\theta$$

seyn wird, wo

$$R = +\left(\frac{Cos\,\varphi^2}{a^2}+\frac{Sin\,\varphi^2\cdot Cos\,\theta^2}{b^2}+\frac{Sin\,\varphi^2\cdot Sin\,\theta^2}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}} \quad \text{ist *).}$$

---

*) Eliminirt man aus den 3 Gleichungen 2.–4.) zuerst θ und φ, dann θ und r, zuletzt aber φ und r, so erhält man bezüglich

$$\text{I.} \qquad \frac{x^2}{a^2r^2}+\frac{y^2}{b^2r^2}+\frac{z^2}{c^2r^2} = 1,$$

$$\text{II.} \qquad \frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2} = \frac{x^2}{a^2\cdot Cos\,\varphi^2},$$

$$\text{III.} \qquad \frac{bz}{cy} = Tg\,\theta;$$

und dies sind (nach §. 88.) die Gleichungen für die drei Reihen stetig auf einander folgenden Flächen, welche den Körper in die neuen Elemente zerschneiden, deren Inhalt durch

$$\pm D\left[\partial x_r\cdot\partial y_\varphi\cdot\partial z_\theta\right]\cdot dr\cdot d\varphi\cdot d\theta$$

ausgedrückt ist. — Die Gleichung I. giebt aber, wenn man r stetig wachsen läßt, eine Reihe von ellipsoidischen Flächen, deren halben Axen bezüglich ar, br und cr sind. — Die Gleichung II. giebt dagegen für die stetig wachsenden Werthe von φ, eine Reihe von conischen Flächen, welche alle ihre gemeinschaftliche Spitze im Anfangspunkte O der Koordinaten x, y, z haben und welche durch Ebenen, die auf OX senkrecht stehen, in Ellipsen geschnitten werden, deren halben Axen bezüglich $\frac{bx}{a\cdot Cos\,\varphi}$ und $\frac{cx}{a\cdot Cos\,\varphi}$ sind. — Die Gleichung III. endlich stellt nach den verschiedenen Werthen von θ, eine Reihe von Ebenen vor, welche alle durch die Axe OX gehen

Sollen aber x, y, z alle reellen Werthe erhalten können, welche der gemachten Bedingung genügen, so zeigen die Gleichungen 2.—4.) (zwischen x, y, z, r, φ und θ), daß dann θ von 0 bis 2π, φ von 0 bis π, und r von 0 bis R und bloß positiv genommen werden dürfen. — Die Masse des ganzen Ellipsoids ist daher

$$7)\cdots \quad = \int_0^{2\pi}\left(\int_0^{\pi}\left(\int f_{(\theta,\varphi,r)}\cdot r^2\cdot Sin\,\varphi\cdot dr\right)\cdot d\varphi\right)\cdot d\theta.$$

Zweites Beispiel. Führt man, um dasselbe dreifache Integral

$$1)\cdots \quad \iiint_{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\overline{\gtrless}1} f_{x,y,z}\cdot dx\cdot dy\cdot dz$$

zu berechnen, andere Veränderliche r, φ, θ so ein, daß ist

$$2)\quad \frac{x}{a} = r\cdot Cos\,\varphi, \qquad 3)\quad \frac{y}{b} = r\cdot Sin\,\varphi\cdot Cos\,\theta$$

$$\text{und}\qquad 4)\quad \frac{z}{c} = r\cdot Sin\,\varphi\cdot Sin\,\theta,$$

so wird man dasselbe dreifache Integral erhalten

$$5)\cdots \quad = abc\cdot\iiint_{r^2\overline{\gtrless}1} f\cdot r^2\cdot Sin\,\varphi\cdot d\theta\cdot d\varphi\cdot dr$$

und solches wird daher seyn, wenn x, y, z bloß positiv genommen werden sollen, d. h. wenn man nur die Masse eines 8ten Theils des Ellipsoids haben will,

$$= abc\cdot\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\left(\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\left(\int_0^1 f\times r^2\cdot Sin\,\varphi\cdot dr\right)\cdot d\varphi\right)\cdot d\theta;$$

dagegen ist dasselbe gegebene dreifache Integral

$$\iiint_{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\overline{\gtrless}1} f_{x,y,z}\cdot dx\cdot dy\cdot dz,$$

---

und mit der Koordinaten-Ebene XOY einen Winkel θ' machen, so daß $Tg\,\theta' = \frac{c}{b}\cdot Tg\,\theta$ ist.

wenn x, y, z auch negativ gedacht werden sollen, d. h. wenn man die Masse des ganzen Ellipsoids haben will,

$$= abc \cdot \int_0^{2\pi}\left(\int_0^{\pi}\left(\int_0^1 f\times r^2 \cdot Sin\varphi \cdot dr\right)\cdot d\varphi\right)\cdot d\theta \text{ *)}.$$

Anmerkung. Man wird aber auch hier das berücksichtigen müssen, was in der Anmerkung 3. zu §. 86. deutlich zu machen versucht worden ist; d. h. man wird die allgemeine Gleichung II. des §. 86. nur dann gelten lassen, wenn zu beliebigen, den Grenzbedingungen entsprechenden Werthen von u, v und w (oder θ, φ und r der Beispiele) nur ein einziges System von (reellen) Werthen von x, y, z sich ergiebt, d. h. wenn $x_{u,v,w}$, $y_{u,v,w}$ und $z_{u,v,w}$ als einförmige Funktionen von u, v und w angesehen werden können.

§. 89.

Soll ein vierfaches Integral

1) $\int\int\int\int f_{x,y,z,s}\cdot dx\cdot dy\cdot dz\cdot ds$

dadurch umgeformt werden, daß man vier neue Veränderliche u, v, w, t einführt mittelst vier Gleichungen, die nach x, y, z, s aufgelöst durch

2) $x = x_{u,v,w,t}$, 3) $y = y_{u,v,w,t}$,

4) $z = z_{u,v,w,t}$ und 5) $s = s_{u,v,w,t}$

ausgedrückt seyn mögen, — so findet sich

---

*) Ist die Dichtigkeit f konstant und $=\varrho$, so hat man die Masse des ganzen Ellipsoids hieraus fast ohne alle Rechnung. Denn es findet sich $\int r^2\cdot dr = \frac{1}{3}r^3$; das erste bestimmte Integral (nach r) ist also $=\frac{1}{3}Sin\varphi$, — das zweite Integral (nach φ) wird nun, im Allgemeinen $=-\frac{1}{3}Cos\varphi$, und zwischen den Grenzen 0 und π genommen, offenbar $=\frac{2}{3}$; das dritte Integral endlich giebt im Allgemeinen $\int\frac{2}{3}\cdot d\theta = \frac{2}{3}\theta$, und zwischen den Grenzen 0 und 2π genommen, $=\frac{4}{3}\pi$, so daß die Masse des ganzen Ellipsoids $=\frac{4}{3}\varrho abc\pi$, und der Inhalt desselben $=\frac{4}{3}abc\pi$ wird.

III. $\iiiint f \cdot dx \cdot dy \cdot dz \cdot ds$

$$= \iiiint \pm f \cdot D[\partial x_u \cdot \partial y_v \cdot \partial z_w \cdot \partial s_t] \cdot du \cdot dv \cdot dw \cdot dt,$$

wo unter $D[\partial x_u \cdot \partial y_v \cdot \partial z_w \cdot \partial s_t]$ ein aus 24 mit abwechselnden Vorzeichen versehenen Gliedern zusammengesetzter Ausdruck verstanden wird, dessen Glieder alle aus

$$\partial x_u \cdot \partial y_v \cdot \partial z_w \cdot \partial s_t$$

erhalten werden, wenn man in diesem Produkt, x, y, z und s (im Kreise geschrieben) auf alle mögliche Arten anordnet, während die ∂ und die u, v, w, t in ihren Stellen stets unverändert bleiben *). Dabei werden unter x, y, z und s die in den Gleichungen 2.–5.) zur Rechten stehenden Funktionen von u, v, w und t verstanden, und diese Funktionen selbst als einförmig vorausgesetzt, oder doch so vorausgesetzt, daß sie in Bezug auf die reellen Werthe, die sie für x, y, z und s liefern, als einförmige gelten können.

Ganz analoge Resultate ergeben sich für die Umformung beliebig vielfacher Integrale durch Einführung von eben so viel neuen Veränderlichen.

§. 90.

Um aber diese letzteren Behauptungen zu erweisen, kann man nicht, wie wir in den §§. 86. und 88. für ein Doppel-Integral und für ein dreifaches Integral es gemacht haben, eine

---

*) Lößt man die vier Gleichungen vom ersten Grade

$$\partial x_u \cdot n + \partial x_v \cdot p + \partial x_w \cdot q + \partial x_t \cdot r = h,$$

$$\partial y_u \cdot n + \partial y_v \cdot p + \partial y_w \cdot q + \partial y_t \cdot r = h',$$

$$\partial z_u \cdot n + \partial z_v \cdot p + \partial z_w \cdot q + \partial z_t \cdot r = h'',$$

$$\partial s_u \cdot n + \partial s_v \cdot p + \partial s_w \cdot q + \partial s_t \cdot r = h'''$$

nach den vier Unbekannten n, p, q und r algebraisch auf, so erhält man denselben Ausdruck D als gemeinschaftlichen Nenner der gefundenen Werthe der Unbekannten, d. h. dieser Ausdruck D ist die **Determinante** dieser vier einfachen Gleichungen.

bequeme geometrische Darstellung benutzen, und man muß daher nun zu rein analytischen Hilfsmitteln seine Zuflucht nehmen. — Damit jedoch diese letzteren gehörig deutlich werden, wollen wir zunächst die Umformung bloß für ein Doppel-Integral, nachher aber für ein dreifaches Integral, also die wiederholte Auflösung der in den §§. 86. und 88. gegebenen Aufgaben, auf rein analytischem Wege noch einmal vornehmen.

I. Das Doppel-Integral

1) $\int\int f \cdot dx \cdot dy$

ist entweder an sich durch $\int(\int f \cdot dy) \cdot dx$ auszudrücken, oder es läßt sich doch aus zwei oder mehr solchen Theilen zusammensetzen, wo zuerst ein einfaches bestimmtes Integral (nach y), hierauf aber noch ein einfaches bestimmtes Integral (nach x) genommen wird. Wir können daher jeden solchen Theil $\int(\int f \cdot dy) \cdot dx$ einzeln betrachten.

Sind nun zwei neue Veränderliche u und v statt der alten x und y eingeführt mittelst der Gleichungen

2) $x = x_{u,v}$ und 3) $y = y_{u,v}$,

so kann man aus diesen Gleichungen u eliminiren, so daß man erhält

4) $y = \varphi_{x,v}$

und dann bei der ersten Integration nach y, statt y den neuen, durch die Gleichung 4.) gegebenen Veränderlichen v einführen. Dadurch erhält man (nach VIII. Th. §. 97.)

5) $\int f \cdot dy = \int f \cdot \partial\varphi_v \cdot dv$

und daher, wenn man jetzt nach x integrirt,

$$\int(\int f \cdot dy) \cdot dx = \int(\int f \cdot \partial\varphi_v \cdot dv) \cdot dx.$$

Nun kann man aber die Ordnung im Integriren umkehren, wenn man auch, wie wir in der Anmerkung 1. zu §. 86. gesehen haben, zuweilen mehrere solche Integrale statt eines einzigen

wird nehmen müssen. Dadurch aber wird unser gegebenes Doppel-Integral 1.) auf solche von der Form

6)... $\int(\int f\cdot\partial\varphi_v\cdot dx)\cdot dv$

zurückgebracht.

Führt man nun bei der ersten Integration (nach x), statt des Veränderlichen x lieber den durch die Gleichung 2.) gegebenen neuen Veränderlichen u ein, so erhält man

7) $\int f\cdot\partial\varphi_v\cdot dx = \int f\cdot\partial\varphi_v\cdot\partial x_u\cdot du$;

demnach ist unser Doppel-Integral 6.) jetzt

8)... $= \int(\int f\cdot\partial\varphi_v\cdot\partial x_u\cdot du)\cdot dv$.

Unser gegebenes Doppel-Integral 1.) ist daher jetzt zurückgeführt auf ein oder auf mehrere andere von der Form

$$\int(\int f\cdot\partial\varphi_v\cdot\partial x_u\cdot du)\cdot dv;$$

also auf das Doppel-Integral

9)... $\int\int(f\cdot\partial\varphi_v\cdot\partial x_u)\cdot du\cdot dv$,

welchem letzteren das gegebene gleich ist, wenn der Umfang der Werthe von u und v den für $\int\int f\cdot dx\cdot dy$ gegebenen Bedingungen gemäß festgestellt wird.

Nun ist aber

10) $\varphi_{x,v} = y_{u,v}$,

wenn man in letzterer Funktion statt u die für u aus der Gleichung 2.) sich ergebende Funktion $\psi_{x,v}$ setzt, welche gleichzeitig die Gleichung

11) $x = x_{\psi,v}$ oder $x = x_{u,v}$,

wenn unter u diese Funktion $\psi_{x,v}$ verstanden wird, zu der identischen Gleichung $x = x$ macht. Die 11.), wenn sie nach v differenziirt wird, giebt daher

12) $0 = \partial x_u\cdot\partial\psi_v + \partial x_v$,

während die 10.), nach v differenziirt,

13) $\partial\varphi_v = \partial y_u \cdot \partial\psi_v + \partial y_v$

giebt. Eliminirt man nun $\partial\psi_v$ aus diesen letztern beiden Gleichungen, so ergiebt sich

14) $\partial\varphi_v = -\frac{\partial y_u \cdot \partial x_v}{\partial x_u} + \partial y_v$,

wodurch das Doppel-Integral in 9.) in

15) $\int\int f \cdot (\partial x_u \cdot \partial y_v - \partial y_u \cdot \partial x_v) \cdot du \cdot dv$

übergeht und dies ist dasselbe Resultat, was wir auch schon im §. 86. mittelst geometrischer Betrachtungen gefunden haben. — Denkt man sich du, dv bloß positiv, so muß auch noch das ($\pm$) Zeichen vorgesetzt werden, in so ferne in den Gleichungen 5.) und 7.), du und auch dv negativ seyn können und dann auch in 15.) so genommen werden müßten.

Die Art und Weise aber, wie hier $\partial\varphi_v \cdot \partial x_u$ durch Elimination von $\partial\psi_v$ aus den Gleichungen 12.) und 13.) gefunden wird, läßt sehen, warum in dem Endresultat 15.), der eingeklammerte Faktor von f, gerade die Determinante der beiden einfachen Gleichungen

$h = \partial x_u \cdot p + \partial x_v \cdot q$ und $h' = \partial y_u \cdot p + \partial y_v \cdot q$

seyn muß, in welchen p und q die beiden Unbekannten sind.

II. Gehen wir jetzt zur wiederholten Behandlung der Aufgabe des §. 88., nämlich zur Umformung des dreifachen Integrals

1) $\int\int\int f \cdot dx \cdot dy \cdot dz$

oder des Integrals

$\int(\int(\int f \cdot dz) \cdot dy) \cdot dx$,

welches entweder mit dem vorhergehenden identisch oder doch einer der Theile ist, in welche sich das allgemeinere dreifache Integral nach §. 85. N. 4. zerlegen kann. Wir setzen dabei dieselben Gleichungen

2) $x = x_{u,v,w}$, 3) $y = y_{u,v,w}$ und 4) $z = z_{u,v,w}$,

wie im §. 88. voraus. — Eliminirt man nun aus diesen drei Gleichungen 2.–4.), sowohl u als auch v, so erhält man

5) $z = \varphi_{x,y,w}$, wo $\varphi_{x,y,w} = z_{u,v,w}$ ist,

wenn in letzterem Ausdruck unter u und v die Funktionen ψ und ψ' von x, y und w verstanden werden, welche aus den Gleichungen 2.) und 3.) hervorgehen, sobald man solche nach u und v auflöst, d. h. sobald man die Funktionen ψ und ψ' von x, y und w setzt, welche die Gleichungen 2.) und 3.), wenn solche unter u und v daselbst verstanden werden, zu identischen Gleichungen $x = x$ und $y = y$ machen. — Differenziirt man daher die Gleichungen 2., 3. und 5. unter dieser Voraussetzung (daß nämlich u und v bezüglich diese Funktionen ψ und ψ' vorstellen) nach allem w, so erhält man

aus 2.)... 6) $0 = \partial x_u \cdot \partial \psi_w + \partial x_v \cdot \partial \psi'_w + \partial x_w$,

aus 3.)... 7) $0 = \partial y_u \cdot \partial \psi_w + \partial y_v \cdot \partial \psi'_w + \partial y_w$,

aus 5.)... 8) $\partial \varphi_w = \partial z_u \cdot \partial \psi_w + \partial z_v \cdot \partial \psi'_w + \partial z_w$.

Führt man aber in 1.) bei der ersten Integration (nach z), statt z jetzt zunächst den durch die Gleichung 5.) gegebenen neuen Veränderlichen w ein, so erhält man

9) $\int f \cdot dz = \int f \cdot \partial \varphi_w \cdot dw$,

wo $\partial \varphi_w$ der Ausdruck ist, der auch in der Gleichung 8.) vorkommt. Also reducirt sich das Doppel-Integral

10) $\int (\int f \cdot dz) \cdot dy = \int (\int f \cdot \partial \varphi_w \cdot dw) \cdot dy$

zunächst auf dieses andere

11) $\int (\int f \cdot \partial \varphi_w \cdot dy) \cdot dw$.

Führt man nun bei dieser jetzigen ersten Integration (nach y), statt y den neuen Veränderlichen v ein, gegeben durch die Gleichung

12) $y = \varphi'_{x,v,w}$,

welche aus den Gleichungen 2.) und 3.) hervorgeht, wenn man aus selbigen u eliminirt, so daß man

13) $\varphi'_{x,v,w} = y_{u,v,w}$

hat, sobald man hier zur Rechten unter u diejenige Funktion χ von x, v und w versteht, welche die Gleichung 2.) zu der identischen Gleichung $x = x$ macht, so daß letztere nach v differenziirt,

14) $$0 = \partial x_u \cdot \partial \chi_v + \partial x_v$$

giebt, während die Gleichung 13.), eben so differenziirt,

15) $$\partial \varphi'_v = \partial y_u \cdot \partial \chi_v + \partial y_v$$

liefert.

Nun wird aber das erste Integral (nach y) in 11.), nämlich

16) $$\int f \cdot \partial \varphi_w \cdot dy, = \int f \cdot \partial \varphi_w \cdot \partial \varphi'_v \cdot dv;$$

(nach VIII. Th. §. 97.), wo $\partial \varphi'_v$ der in der Gleichung 15.) vorkommende Ausdruck ist. Unser dreifaches Integral reducirt sich also nun (nach 11.) auf ein oder mehrere Integrale von der Form

17) $$\int(\int(\int f \cdot \partial \varphi_w \cdot \partial \varphi'_v \cdot dv) \cdot dw) \cdot dx;$$

also auch durch Verwechslung der Ordnung der Integrationen, nach und nach auf ein oder mehrere Integrale von der Form

18) $$\int(\int(\int f \cdot \partial \varphi_w \cdot \partial \varphi'_v \cdot dx) \cdot dv) \cdot dw.$$

Führt man nun bei der jetzigen ersten Integration (nach x), statt x den neuen, durch die Gleichung 2.), nämlich $x = x_{u,v,w}$ gegebenen Veränderlichen u ein, so bekommt man unser dreifaches Integral reducirt auf

19) $$\int\int\int(f \cdot \partial \varphi_w \cdot \partial \varphi'_v \cdot \partial x_u) \cdot du \cdot dv \cdot dw$$

und es kommt daher jetzt nur noch darauf an, das Produkt $\partial \varphi_w \cdot \partial \varphi'_v \cdot \partial x_u$ in Differenzial-Koeffizienten der in 2.–4.) zur Rechten vorkommenden Funktionen von u, v und w auszudrücken.

Weil aber $\partial \varphi_w$ aus den Gleichungen 6.–8.) durch Elimination von $\partial \psi_w$ und $\partial \psi'_w$ gefunden wird, und $\partial \varphi'_v$ wiederum aus den beiden Gleichungen 14.) und 15.) gefunden werden muß (dadurch, daß man aus diesen letztern beiden, $\partial \chi_v$

eliminirt), so überzeugt man sich bald aus der Theorie der einfachen Gleichungen in der Elementar-Algebra, daß das Produkt $\partial\varphi_w \cdot \partial\varphi'_v \cdot \partial x_u$ nichts anders ist, als die im §. 88. durch $\pm D[\partial x_u \cdot \partial y_v \cdot \partial z_w]$ bezeichnete Determinante.

III. Gehen wir jetzt zu dem Problem des §. 89., nämlich zur Umformung des vierfachen Integrals

1) $$\iiiint f \cdot dx \cdot dy \cdot dz \cdot ds$$

über, während die vier neuen Veränderlichen durch die vier Gleichungen

2) $x = x_{u,v,w,t}$, 3) $y = y_{u,v,w,t}$,

4) $z = z_{u,v,w,t}$ und 5) $s = s_{u,v,w,t}$

gegeben sind. — Die erste Integration nach s giebt, wenn man statt s den neuen Veränderlichen t einführt,

6) $$\int f \cdot ds = \int f \cdot \partial\varphi_t \cdot dt,$$

wenn

7) $$\varphi_{x,y,z,t} = s_{u,v,w,t}$$

ist, sobald man unter u, v, w die Funktionen ψ, ψ' und ψ'' von x, y, z und t versteht, welche die Gleichungen 2.—4.) identisch machen, so daß man hat (aus 2.—4. und 7., wenn nach t differenziirt wird),

8) $$0 = \partial x_u \cdot \partial\psi_t + \partial x_v \cdot \partial\psi'_t + \partial x_w \cdot \partial\psi''_t + \partial x_t,$$

9) $$0 = \partial y_u \cdot \partial\psi_t + \partial y_v \cdot \partial\psi'_t + \partial y_w \cdot \partial\psi''_t + \partial y_t,$$

10) $$0 = \partial z_u \cdot \partial\psi_t + \partial z_v \cdot \partial\psi'_t + \partial z_w \cdot \partial\psi''_t + \partial z_t,$$

11) $$\partial\varphi_t = \partial s_u \cdot \partial\psi_t + \partial s_v \cdot \partial\psi'_t + \partial s_w \cdot \partial\psi''_t + \partial s_t.$$

Integrirt man nun (in 6. zur Rechten) weiter nach z und verwechselt man die Ordnung des Integrirens, so daß nach z zuerst integrirt wird, so kann man statt z den neuen Veränderlichen w einführen, so daß man erhält

12) $$\int\left(\int f \cdot \partial\varphi_t \cdot dt\right) \cdot dz = \iint f \cdot \partial\varphi_t \cdot \partial\varphi'_w \cdot dw \cdot dt,$$

wenn

13) $\varphi'_{x,y,w,t} = z_{u,v,w,t}$

genommen und statt u und v die aus den Gleichungen 2.) und 3.) sich ergebenden Ausdrücke $\chi_{x,y,w,t}$ und $\chi'_{x,y,w,t}$, gesetzt werden, dieselben, welche die Gleichungen 2.) und 3.) zu identischen machen, so daß man hat (aus 2. und 3. und 13., wenn nach w differenziirt wird)

14) $0 = \partial x_u \cdot \partial \chi_w + \partial x_v \cdot \partial \chi'_w + \partial x_w$,

15) $0 = \partial y_u \cdot \partial \chi_w + \partial y_v \cdot \partial \chi'_w + \partial y_w$,

16) $\partial \varphi'_w = \partial z_u \cdot \partial \chi_w + \partial z_v \cdot \partial \chi'_w + \partial z_w$.

Integrirt man nun die 12.) zur Rechten weiter nach y, und kehrt man die Ordnung des Differenziirens um, so daß nach y zuerst integrirt wird, so kann man statt y den neuen Veränderlichen v einführen, so daß man dieses dreifache Integral erhält

17)... $= \iiint f \cdot \partial \varphi_t \cdot \partial \varphi'_w \cdot \partial \varphi''_v \cdot du \cdot dw \cdot dt$,

wenn

18) $\varphi''_{x,v,w,t} = y_{u,v,w,t}$

genommen, statt u aber die Funktion $\pi_{x,v,w,t}$ gesetzt wird, welche die Gleichung 2.) identisch macht, so daß man, wenn diese 2.) und 18.) nach v differenziirt werden, erhält

19) $0 = \partial x_u \cdot \partial \pi_v + \partial x_v$

20) $\partial \varphi''_v = \partial y_u \cdot \partial \pi_v + \partial y_v$.

Wird endlich dieses dreifache Integral 17.) noch nach x integrirt und die Ordnung des Differenziirens umgekehrt, so daß nach x zuerst integrirt wird, so kann man statt x den neuen Veränderlichen u einführen und man erhält unser gegebenes vierfaches Integral

21) $= \iiiint f \cdot \partial \varphi_t \cdot \partial \varphi'_w \cdot \partial \varphi''_v \cdot \partial x_u \cdot du \cdot dv \cdot dw \cdot dt$,

so daß es jetzt nur noch darauf ankommt das Produkt $\partial \varphi_t \cdot \partial \varphi'_w \cdot \partial \varphi''_v \cdot \partial x_u$ in lauter Differenzial-Koeffizienten der vier Funktionen

$x_{u,v,w,t}$, $y_{u,v,w,t}$, $z_{u,v,w,t}$ und $s_{u,v,w,t}$
auszudrücken.

Weil aber $\partial\varphi_t$, $\partial\varphi'_w$ und $\partial\varphi''_v$ bezüglich aus den Gleichungen 8.—11.), 14.—16.) und 19.) und 20.) hergestellt werden, wenn man aus ihnen bezüglich $\partial\psi_t$, $\partial\psi'_t$, $\partial\psi''_t$, ferner $\partial\chi_w$, $\partial\chi'_w$, endlich $\partial\pi_v$ eliminirt, so fällt sogleich in die Augen, wenn man die Theorie der einfachen Gleichungen in der Elementar-Algebra zu Hilfe nimmt, daß dieses Produkt $\partial\varphi_t \cdot \partial\varphi'_w \cdot \partial\varphi''_v \cdot \partial x_u$ genau der im §. 89. näher bezeichneten Determinante gleich werden muß.

So ist also die Behauptung des §. 89. erwiesen.

Anmerkung. Es ist aber nun sehr leicht einzusehen, daß wenn ein $n$faches Integral durch Einführung von n neuen Veränderlichen umgeformt werden soll, die zu integrirende Funktion f multiplicirt werden muß mit der Determinante D aus n einfachen Gleichungen, deren Koeffizienten bezüglich

$$\begin{matrix} \partial x_u, & \partial x_v, & \partial x_w, & \cdots \\ \partial y_u, & \partial y_v, & \partial y_w, & \cdots \\ \partial z_u, & \partial z_v, & \partial z_w, & \cdots \\ \text{2c.} & \text{2c.} & \text{2c.} & \end{matrix}$$

sind, wenn man nur diese Determinante D noch mit dem ($\pm$) Zeichen versieht, damit, weil bei unserer hiesigen Bezeichnungsweise der vielfachen Integrale, die Faktoren du, dv, dw, 2c. 2c. stets positiv gedacht werden, auch dieser Faktor $\pm D$ stets positiv genommen werden könne.

§. 91.

Wir wollen jetzt eine Anwendung des im §. 84. beschriebenen Verfahrens des Dirichlet auf die Umformung des Doppel-Integrals

$$K = \iint\limits_{f \gtreqless x+y \gtreqless g} x^{l-1} y^{m-1} \cdot e^{-(px+qy)} \cdot F_{x+y} \cdot dx \cdot dy$$

geben, in welchem l, m, p und q positiv gedacht sind, wäh-

rend f und g ebenfalls positiv vorausgesetzt werden, und auch x und y nur $=0$ oder positiv gedacht werden sollen *).

Setzt man, um diese Umformung zu bewirken, $x+y=s$, und multiplicirt man F_s mit dem Ausdruck in N. 3. des §. 84., nachdem man vorher daselbst F statt φ, ferner s statt x, und ν statt z geschrieben hat, so erhält man unser vorgelegtes Doppel-Integral

$$K=\frac{1}{\pi}\cdot\int_0^\infty\int_0^\infty x^{l-1}\cdot y^{m-1}\cdot e^{-(px+qy)}\cdot\left(\int_{-\infty}^{\infty}d\mu\cdot e^{-\mu s\cdot i}\cdot\right.$$
$$\left.\int_f^g F_\nu\cdot Cos\,\mu\nu\cdot d\nu\right)\cdot dx\cdot dy,$$

wo in den nach x und y genommenen Integralen die constanten Grenzen 0 und ∞ genommen werden, weshalb es auch nicht mehr nöthig ist, die Ordnung anzugeben, in welcher diese beiden Integrationen auf einander folgen sollen. Diese constanten Grenzen konnten aber an die Stelle der veränderlichen treten, eben weil der Faktor, womit die Differenzial-Funktion von K multiplicirt worden ist, allemal $=0$ ist, so oft s d. h. $x+y$ außerhalb des Raumes von f bis g liegt.

Setzen wir nun wieder $x+y$ statt s, integriren wir dann nach x und nach y zuerst, und nehmen wir §. 22. N. 65. zu Hilfe, nach welcher

$$\int_0^\infty x^{l-1}\cdot e^{-(p+\mu\cdot i)\cdot x}\cdot dx=\frac{\Gamma_l}{(p+\mu\cdot i)^l}$$

ist, so erhält man sogleich unser Doppel-Integral

---

*) Dieses Doppel-Integral stellt (nach §. 85.) die Summe aller unendlich-vielen unendlich-kleinen Produkte vor, welche alle aus

$$x^{l-1}y^{m-1}\cdot e^{-(px+qy)}\cdot F_{x+y}\cdot dx\cdot dy$$

hervorgehen, wenn man statt x und y nach und nach und unabhängig von einander alle, um die unendlich-kleinen positiven Werthe dx und dy wachsenden Werthe von x und y setzt, welche Null oder positiv und so sind, daß $x+y \geqq f$ aber $\leqq g$ wird.

$$K = \frac{\Gamma_1 \cdot \Gamma_m}{\pi} \cdot \int_f^g d\nu \cdot F_\nu \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \frac{Cos\,\mu\nu}{(p+\mu i)^l \cdot (q+\mu i)^m} \cdot d\mu,$$

wodurch das obige Doppel-Integral in ein anderes Doppel-Integral zwischen völlig constanten Grenzen umgeformt sich sieht.

§. 92.

Behandeln wir das dreifache Integral

$$K = \iiint_{f \overline{\gtrless} x+y+z \overline{\lessgtr} g} x^{l-1} y^{m-1} z^{n-1} \cdot e^{-(px+qy+rz)} \cdot F_{x+y+z} \cdot dx \cdot dy \cdot dz$$

ganz auf dieselbe Weise, während vorausgesetzt wird, daß x, y, z alle positiven oder Null-Werthe haben sollen, deren Summe $x+y+z \overline{\overline{>}} f$ und $\overline{\overline{<}} g$ ist, — so erhalten wir sogleich

$$K = \frac{\Gamma_1 \cdot \Gamma_m \cdot \Gamma_n}{\pi} \cdot \int_f^g d\nu \cdot F_\nu \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \frac{Cos\,\mu\nu}{(p+\mu i)^l (q+\mu i)^m (r+\mu i)^n} \cdot d\mu,$$

so daß jetzt ein dreifaches Integral mit veränderlichen Grenzen auf ein Doppel-Integral mit constanten Grenzen zurückgeführt sich sieht.

Man sieht leicht, wie das Integral K ein beliebig vielfaches seyn könnte, und doch auf ein analoges Doppel-Integral und dies noch mit constanten Grenzen zurückgeführt werden würde.

§. 93.

Setzt man im §. 91. pw, qw, rw, μw statt bezüglich p, q, r, μ, — multiplicirt man die aus der Gleichsetzung der beiden daselbst für K vorhandenen Ausdrücke entstehende Gleichung, mit $w^{l+m+n-1} e^{-\theta w} \cdot dw$ und integrirt man dann beide Seiten nach w, zwischen den Grenzen $w = 0$ und $w = \infty$, — nimmt man dabei zu Hilfe, daß (nach §. 22. N. 65. und §. 4. N. 9.)

$$\int_0^\infty w^{l+m+n-1} \cdot e^{-(\theta+px+qy+rz)w} \cdot dw = \frac{\Gamma_{l+m+n}}{(\theta+px+qy+rz)^{l+m+n}}$$

und $$\int_0^\infty e^{-\theta w} \cdot Cos\,\mu\nu w \cdot dw = \frac{\theta}{\theta^2+\mu^2\nu^2}$$

ist, wenn θ positiv vorausgesetzt wird, so erhält man sogleich noch:

$$\int\int\int_{f \overline{\gtrless} x+y+z \overline{\gtrless} g} \frac{x^{l-1} y^{m-1} z^{n-1} \cdot F_{x+y+z}}{(\theta+px+qy+rz)^{l+m+n}} \cdot dx \cdot dy \cdot dz$$

$$= \frac{\Gamma_l \cdot \Gamma_m \cdot \Gamma_n}{\Gamma_{l+m+n}} \cdot \int_f^g \frac{\nu^{l+m+n-1} \cdot F_\nu \cdot d\nu}{(\theta+p\nu)^l \cdot (\theta+q\nu)^m (\theta+r\nu)^n} \quad {}^{*)},$$

---

*) Das Integral nach μ ließ sich auswerthen. Multiplicirt man nämlich die bekannte Gleichung

$$1) \qquad \int_0^\infty x^{l-1} \cdot e^{-(p+\mu\cdot i)x} \cdot dx = \frac{\Gamma_l}{(p+\mu i)^l}$$

mit

$$\frac{d\mu}{\theta^2+\mu^2} \cdot e^{-h\mu\cdot i},$$

indem man h positiv voraussetzt, und integrirt man dann zwischen den Grenzen $\mu = -\infty$ und $\mu = +\infty$, so erhält man

$$\int_{-\infty}^\infty \frac{d\mu}{\theta^2+\mu^2} \cdot e^{-h\mu\cdot i} \cdot \int_0^\infty x^{l-1} \cdot e^{-(p+\mu\cdot i)x} \cdot dx$$

$$= \int_{-\infty}^\infty \frac{\Gamma_l}{(p+\mu\cdot i)^l} \cdot \frac{d\mu}{\theta^2+\mu^2} \cdot e^{-h\mu\cdot i}.$$

Kehrt man nun auf der linken Seite die Ordnung der Integration um, — integrirt man zuerst nach μ, so daß man zunächst (aus §. 23. III.)

$$x^{l-1} \frac{\pi}{\theta} \cdot e^{-px} \cdot e^{-(h+x)\theta} \cdot dx$$

erhält, — integrirt man dann weiter noch nach x, wodurch

$\frac{\pi}{\theta} \cdot e^{-h\theta} \cdot \frac{\Gamma_l}{(p+\theta)^l}$ hervorgeht, — und dividirt man auf beiden Seiten durch Γ_l, so findet sich

$$2) \qquad \int_{-\infty}^\infty \frac{e^{-h\mu\cdot i}}{(p+\mu\cdot i)^l} \cdot \frac{d\mu}{\theta^2+\mu^2} = \frac{\pi}{\theta} \cdot e^{-h\theta} \cdot \frac{1}{(p+\theta)^l},$$

welche Gleichung auch bereits im §. 23. IV. gefunden ist. — Aber ganz auf dieselbe Weise wie aus der Gleichung 1.) die Gleichung 2.) so eben abgeleitet worden ist, — eben so wird nun auch aus derselben 1.) ein weiteres analoges Integral abgeleitet, indem man die 1.), aber in der folgenden Form

$$\int_0^\infty x^{m-1} \cdot e^{-(q+\mu\cdot i)x} \cdot dx = \frac{\Gamma_m}{(q+\mu\cdot i)^m}$$

wenn nur l, m, n, p, q, r und θ positiv, und auch f und g positiv oder Null sind.

Es versteht sich, daß auch dieses Resultat auf jedes mehr als dreifache, also beliebig vielfache analoge Integral ausgedehnt werden kann, eben so wie es auch für jedes zweifache analoge Integral in die Augen fällt*).

---

genommen, mit $\frac{e^{-h\mu \cdot i}}{\theta^2+\mu^2} \cdot \frac{d\mu}{(p+\mu i)^l}$ multiplicirt und dann links und rechts nach μ integrirt, zwischen $\mu = -\infty$ und $\mu = +\infty$. Integrirt man nämlich links wieder zuerst nach μ und wendet man dabei die Gleichung 2.) an, so erhält man ohne weitere Schwierigkeit (nach Vertauschung der Seiten)

$$3)\quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-h\mu \cdot i}}{\theta^2+\mu^2} \cdot \frac{1}{(p+\mu \cdot i)^l \cdot (q+\mu \cdot i)^m} \cdot d\mu = \frac{\pi}{\theta} \cdot \frac{e^{-h\theta}}{(p+\theta)^l (q+\theta)^m},$$

sobald h positiv gedacht ist, wenn auch noch so klein.

Und auf ganz analogem Wege erhält man noch

$$4)\quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-h\mu \cdot i}}{\theta^2+\mu^2} \cdot \frac{1}{(p+\mu \cdot i)^l \cdot (q+\mu \cdot i)^m \cdot (r+\mu \cdot i)^n} \cdot d\mu = \frac{\pi}{\theta} \cdot \frac{e^{-h\theta}}{(p+\theta)^l (q+\theta)^m (r+\theta)^n}.$$

U. s. w. f., wo h positiv gedacht ist.

Multiplicirt man aber hier links unter dem Integralzeichen, Zähler und Nenner mit ν^2, so daß man im Nenner $\theta^2\nu^2+\mu^2\nu^2$ erhält, und setzt man dann überall $\frac{\theta}{\nu}$ statt θ, so erhält man aus der N. 4. sogleich noch

$$5)\quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-h\mu \cdot i}}{\theta^2+\mu^2\nu^2} \cdot \frac{1}{(p+\mu i)^l (q+\mu i)^m (r+\mu i)^n} \cdot d\mu = \frac{\nu^{l+m+n-1} \cdot e^{-h\theta:\nu}}{(\theta+p\nu)^l (\theta+q\nu)^m (\theta+r\nu)^n};$$

und diese Gleichung gilt auch noch für $h = \frac{1}{\infty}$.

*) Setzt man in dieser Gleichung $f = 0$, $g = 1$, ferner $\theta = 1$, $p = q = r = 0$, so erhält man ein von Liouville aufgestelltes Theorem.

§. 94.

Setzt man in dem Resultate des §. 92. $\theta+\tau$ statt θ, und, der Kürze wegen, noch

$\theta+px+qy+rz=\sigma$ und $l+m+n=k$, multiplicirt man dann mit $\tau^{k-\varrho-1}\cdot d\tau$ und wird zuletzt noch nach τ integrirt, zwischen den Grenzen $\tau=0$ und $\tau=\infty$, — bedenkt man ferner, daß, wenn $\tau=\sigma t$ gesetzt wird,

$$\int_0^\infty \frac{\tau^{k-\varrho-1}}{(\sigma+\tau)^k}\cdot d\tau = \frac{1}{\sigma^\varrho}\cdot\int_0^\infty \frac{t^{k-\varrho-1}}{(1+t)^k}\cdot dt = \frac{\Gamma_{k-\varrho}\cdot\Gamma_\varrho}{\Gamma_k}\cdot\frac{1}{\sigma^\varrho}$$

wird (nach §. 20. I.), wenn nur $k-\varrho$ positiv ist, — so findet sich

$$\iiint_{f \overline{\gtrless} x+y+z \overline{\gtrless} g} \frac{x^{l-1}\cdot y^{m-1}\cdot z^{n-1}\cdot F_{x+y+z}}{(\theta+px+qy+rz)^\varrho}\cdot dx\cdot dy\cdot dz$$

$$= \frac{\Gamma_l\cdot\Gamma_m\cdot\Gamma_n}{\Gamma_\varrho\cdot\Gamma_{l+m+n-\varrho}}\cdot\int_0^\infty \tau^{l+m+n-\varrho-1}d\tau\,\cdot$$

$$\int_f^g \frac{\nu^{l+m+n-1}\cdot F_\nu\cdot d\nu}{(\theta+\tau+p\nu)^l\cdot(\theta+\tau+q\nu)^m\cdot(\theta+\tau+r\nu)^n}.$$

Auch hier kann das Integral zur Linken statt eines dreifachen Integrals, ein analoges beliebig vielfaches seyn, oder auch ein bloßes Doppel-Integral, während, was dann rechts zu stehen kommen muß, leicht in die Augen fällt. Immer aber hat man zur Rechten ein bloßes Doppel-Integral und (was das wichtigste ist) zwischen constanten Grenzen genommen.

§. 95.

Sollte ein dreifaches Integral

$$\iiint \psi_{x,y,z}\cdot dx\cdot dy\cdot dz$$

mit der Bedingung ausgewerthet werden, daß x, y, z alle positiven oder Nullwerthe erhalten sollen, welche

$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c} \overline{>} f$ und $\overline{<} g$ machen *), so würde man

---

*) Dies wäre der Fall, wenn das obige 3fache Integral sich auf alle

$\frac{x^2}{a^2} = x'$, $\frac{y^2}{b^2} = y'$ und $\frac{z^2}{c^2} = z'$ setzen, dadurch

$$dx = \tfrac{1}{2} \cdot \frac{a}{x'^{\frac{1}{2}}} \cdot dx', \quad dy = \tfrac{1}{2} \frac{b}{y'^{\frac{1}{2}}} \cdot dy' \quad \text{und} \quad dz = \tfrac{1}{2} \frac{c}{z'^{\frac{1}{2}}} \cdot dz'$$

erhalten, und das vorgelegte Integral würde sich in ein anderes umwandeln, welches von der Form

$$\int\!\!\int\!\!\int \psi_{(x',y',z')} \cdot dx' \cdot dy' \cdot dz'$$

wäre, mit der Bedingung, daß x', y', z' nur Null oder positiv sind und $x'+y'+z' \overline{\overline{>}} f$ und $\overline{\overline{<}} g$ ist; und so wären wir dann wieder auf dreifache Integrale zurückgeführt, die vielleicht als besondere Fälle der in den vorhergehenden Paragraphen behandelten sich herausstellen, oder die doch vielleicht auf analoge Weise reducirt werden können.

So würde sich z. B. das Integral

$$1) \quad \int\!\!\int\!\!\int \frac{dx \cdot dy \cdot dz}{(\theta + x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}$$

mit der Bedingung, daß x, y, z alle positiven oder Null-Werthe erhalten sollen, für welche

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \overline{\overline{>}} f$ und $\overline{\overline{<}} g$ ist, — auf dem vorbezeichneten

---

Werthe von x, y, z erstrecken sollte, die allen Punkten entsprechen, welche zwischen zwei concentrischen ellipsoidischen Oberflächen oder in diesen selber gelegen sind, aber nur in demjenigen 8ten Theile dieser Schicht, dessen Punkte alle positive Koordinaten-Werthe haben. Diese Oberflächen sind gegeben durch die Gleichungen

$$\frac{x^2}{a^2 f} + \frac{y^2}{b^2 f} + \frac{z^2}{c^2 f} = 1 \quad \text{und} \quad \frac{x^2}{a^2 g} + \frac{y^2}{b^2 g} + \frac{z^2}{c^2 g} = 1,$$

so daß die halben Axen derselben bezüglich

$$a\sqrt{f}, \; b\sqrt{f}, \; c\sqrt{f} \quad \text{und} \quad a\sqrt{g}, \; b\sqrt{g}, \; c\sqrt{g}$$

sind, also bezüglich zu einander in einem und demselben constanten Verhältniß $\sqrt{f} : \sqrt{g}$ stehen.

Wege, und wenn man zuletzt wieder x, y, z statt bezüglich x', y', z' schreibt, verwandeln in

$$\tfrac{1}{8}abc \cdot \iiint \frac{dx \cdot dy \cdot dz}{x^{\frac{1}{2}} y^{\frac{1}{2}} z^{\frac{1}{2}} \cdot (\theta + a^2 x + b^2 y + c^2 z)^{\frac{3}{2}}}$$

mit der Bedingung, daß x, y, z Null oder positiv und so sind, daß stets $x+y+z \overline{\gtrless} f$ und $\overline{\gtrless} g$ ist, während hier $x^{\frac{1}{2}}$, $y^{\frac{1}{2}}$, $z^{\frac{1}{2}}$ deshalb ihre positiven Werthe vorstellen, weil wir uns im vorgelegten Integral x, y, z positiv oder Null gedacht haben.

Vergleicht man aber dieses dreifache Integral mit dem im §. 93. betrachteten, so findet man, daß es in dem letzteren als derjenige besondere Fall enthalten ist, den man hat, wenn daselbst

$$l = m = n = \tfrac{1}{2}, \qquad p = a^2, \quad q = b^2, \quad r = c^2$$

endlich $F_\nu = 1$ genommen wird, so daß auch $F_{x+y+z} = 1$ ist. Man erhält dann sogleich unser hier vorgelegtes Integral 1.)

$$= \tfrac{1}{8}abc \cdot \frac{(\Gamma_{\frac{1}{2}})^3}{\Gamma_{\frac{3}{2}}} \cdot \int_f^g \frac{\nu^{\frac{1}{2}} \cdot d\nu}{\sqrt{(\theta + a^2\nu)(\theta + b^2\nu)(\theta + c^2\nu)}}.$$

Weil aber $\Gamma_{\frac{1}{2}} = \sqrt{\pi}$ und $\Gamma_{\frac{3}{2}} = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}$ ist, so geht diese Gleichung, wenn man noch $\nu = u^2$, also $d\nu = 2u \cdot du$, auch $f = p^2$ und $g = q^2$ setzt, über in

$$\iiint_{p^2 \overline{\gtrless} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \overline{\gtrless} q^2} \frac{dx \cdot dy \cdot dz}{(\theta + x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$= \frac{abc}{2}\pi \cdot \int_p^q \frac{u^2 \cdot du}{\sqrt{(\theta + a^2u^2)(\theta + b^2u^2)(\theta + c^2u^2)}} \quad *),$$

---

*) Das dreifache Integral auf der linken Seite dieser Gleichung drückt z. B. die Masse des durch die 3 Koordinaten-Ebenen ausgeschnittenen 8ten Theils einer concentrischen ellipsoidischen Schicht aus, dessen beide Oberflächen gegeben sind durch die Gleichungen

$$\frac{x^2}{a^2p^2} + \frac{y^2}{b^2p^2} + \frac{z^2}{c^2p^2} = 1 \quad \text{und} \quad \frac{x^2}{a^2q^2} + \frac{y^2}{b^2q^2} + \frac{z^2}{c^2q^2} = 1,$$

wenn die Dichtigkeit an der Stelle (x, y, z) ausgedrückt ist durch

indem das Integral links, der obigen Voraussetzung zufolge, nur auf alle positiven Werthe von x, y, z sich erstreckend gedacht wird.

Anmerkung. Sollten in einem dreifachen Integral die Veränderlichen x, y, z alle positiven oder Null-Werthe erhalten, welche den Bedingungen

$$\left(\frac{x}{a}\right)^\alpha+\left(\frac{y}{b}\right)^\beta+\left(\frac{z}{c}\right)^\gamma \overline{\overline{>}} f \quad \text{aber} \quad \overline{\overline{<}} g$$

genügen, so würde man auch dies Integral durch Einführung der neuen Veränderlichen x', y', z' mittelst der Gleichungen

$$\left(\frac{x}{a}\right)^\alpha = x', \quad \left(\frac{y}{b}\right)^\beta = y', \quad \left(\frac{z}{c}\right)^\gamma = z'$$

auf ein anderes dreifaches Integral zurückführen, in welchem x', y', z' alle positiven oder Nullwerthe erhalten müssen, welche den Bedingungen

$$x'+y'+z' \overline{\overline{>}} f \quad \text{aber} \quad \overline{\overline{<}} g$$

genügen.

Und ganz dasselbe gilt von analogen vielfachen (mehr als dreifachen) Integralen, wie auch von nur zweifachen.

§. 96.

Soll das dreifache Integral

$$\iiint e^{-(p^2x^2+q^2y^2+r^2z^2)} \cdot F_{x+y+z} \cdot dx \cdot dy \cdot dz,$$

in welchem x, y, z alle reellen Werthe vorstellen, welche den Bedingungen

---

$(\vartheta+x^2+y^2+z^2)^{-\frac{3}{2}}$, während $x^2+y^2+z^2$ das Quadrat der Entfernung dieser Stelle (x, y, z) vom gemeinschaftlichen Mittelpunkte ist. — Dasselbe Integral hat aber auch eine Bedeutung in dem Problem der Anziehungen.

Für $\vartheta = 0$ findet sich übrigens aus obigem Resultate sogleich

$$\iiint_{p^2 \overline{\overline{<}} \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2} \overline{\overline{<}} q^2} \frac{dx \cdot dy \cdot dz}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{\pi}{2} \cdot log \frac{q}{p}.$$

$$x+y+z>f \text{ aber } <g$$

entsprechen, so wird man auf dieselbe Weise, wie im §. 91. zunächst daraus machen

$$\int\int\int e^{-(p^2x^2+q^2y^2+r^2z^2)}.dx.dy.dz.\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-s\mu i}d\mu.\int_f^g F_\nu.Cos\,\mu\nu.d\nu,$$

wo $s=x+y+z$ ist, während die drei erstern Integralzeichen jetzt zwischen den Grenzen $-\infty$ und $+\infty$ genommene Integrale vorstellen, in so ferne x, y, z jetzt nicht bloß positiv gedacht sind, sondern auch alle negativen Werthe erhalten sollen, welche der vorausgesetzten Bedingung entsprechen. Integrirt man nun nach x und nach y und nach z, so hat man zuerst

$$\int_{-\infty}^{\infty}e^{-p^2x^2}.e^{-\mu xi}.dx=\int_{-\infty}^{\infty}e^{-p^2x^2}.Cos\,\mu x.dx=\frac{\sqrt{\pi}}{p}.e^{-\left(\frac{\mu}{2p}\right)^2}$$

(nach §. 21. N. 63.); analoge Resultate bekommt man für die beiden andern Integrationen, so daß sich unser vorgelegtes Integral nun umformt in

$$\frac{\pi^{\frac{1}{2}}}{pqr}.\int_f^g F_\nu.d\nu.\int_{-\infty}^{\infty}Cos\,\mu\nu.e^{-\frac{1}{4}\varrho^2\mu^2}.d\mu$$

wenn $\frac{1}{p^2}+\frac{1}{q^2}+\frac{1}{r^2}=\varrho^2$

gesetzt wird. Führt man nun aber hier noch die Integration nach μ aus (nach §. 21. N. 63.), so erhält man unser vorgelegtes dreifaches Integral

$$=\frac{2\pi}{pqr}.\frac{1}{\varrho}\int_f^g F_\nu.e^{-\left(\frac{\nu}{\varrho}\right)^2}.d\nu,$$

wodurch das dreifache Integral auf ein einfaches zwischen bestimmten constanten Grenzen zurückgeführt sich sieht; dabei ist ϱ positiv gedacht.

Für ein vorgelegtes analoges vielfaches oder zweifaches Integral würde man auf demselben Wege ein analoges einfaches Integral erhalten.

§. 97.

Setzt man in der so eben erhaltenen Gleichung (zwischen dem vorgelegten dreifachen Integral und dem gefundenen End-resultat) $p\cdot\sqrt{w}$, $q\cdot\sqrt{w}$, $r\cdot\sqrt{w}$ bezüglich statt p, q, r, — setzt man ferner $\frac{\varrho}{\sqrt{w}}$ statt ϱ, so daß abermals

$$\varrho = \frac{1}{p^2}+\frac{1}{q^2}+\frac{1}{r^2}$$

bleibt, — multiplicirt man dann beide Seiten der Gleichung mit $w^{n-1}e^{-w}\cdot dw$, um nachher beide Seiten zwischen $w=0$ und $w=\infty$ zu integriren, so erhält man sogleich (nach §. 11. N. 30.)

$$\Gamma_n\cdot\underset{f \overline{\overline{<}} x+y+z \overline{\overline{<}} g}{\iiint}\frac{F_{x+y+z}\cdot dx\cdot dy\cdot dz}{(1+p^2x^2+q^2y^2+r^2z^2)^n}$$

$$=\frac{2\pi}{pq r\varrho}\cdot\Gamma_{n-1}\cdot\int_f^g\frac{F_\nu\cdot d\nu}{\left(1+\frac{\nu^2}{\varrho^2}\right)^{n-1}},$$

wenn das dreifache Integral zur Linken über alle positiven und negativen und Null-Werthe von x, y, z sich erstreckt, welche den Bedingungen

$$x+y+z \overline{\overline{>}} f \quad \text{aber} \quad \overline{\overline{<}} g$$

entsprechen, während $\varrho = +\sqrt{\frac{1}{p^2}+\frac{1}{q^2}+\frac{1}{r^2}}$ ist.

Daß sich ein ähnliches Resultat für analoge zweifache oder auch vielfache Integrale finden lasse, versteht sich von selbst.

Anmerkung. Ganz genau nach Anleitung des §. 95. erhält man noch als neues Beispiel

$$\iiint\frac{F_{x+y+z}\cdot dx\cdot dy\cdot dz}{(p^2+x^2)(q^2+y^2)(r^2+z^2)}=\frac{2\pi^2\varrho}{pqr}\cdot\int_f^g\frac{F_\nu}{\varrho^2+\nu^2}\cdot d\nu,$$

wenn das dreifache Integral links sich über alle reellen Werthe von x, y, z erstrecken soll, welche den Bedingungen

$$x+y+z \gtreqless f \quad \text{aber} \quad \lesseqgtr g$$

genügen und wenn $\varrho = p+q+r$ gedacht ist.

Analoges für 2fache oder mehr als 3fache Integrale.

§. 98.

In dem folgenden Beispiel ist das in den vorstehenden Paragraphen bereits mehrfach nachgewiesene Verfahren des Dirichlet zweimal angewandt.

Ist nämlich vorgelegt das dreifache Integral

1) $$K = \iiint F_{x+y+z} \cdot dx \cdot dy \cdot dz$$

mit der Bedingung, daß x, y, z alle reellen Werthe erhalten sollen, welche den Ungleichungen

2) $$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 + \left(\frac{z}{c}\right)^2 > 0 \quad \text{aber} < 1$$

genügen, so kann man zunächst von der Formel

3) $$\frac{2}{\pi} \cdot \int_0^\infty \frac{Sin\, w}{w} \cdot Cos\, \sigma w \cdot dw = \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \end{Bmatrix},$$

je nachdem $\sigma \begin{Bmatrix} \text{innerhalb} \\ \text{außerhalb} \end{Bmatrix}$ des Raumes von 0 bis 1 liegt, — ausgehen, — der bequemeren Rechnung wegen jedoch statt $\int_0^\infty \frac{Sin\, w}{w} \cdot Cos\, \sigma w \cdot dw$ lieber $\int_0^\infty \frac{Sin\, w}{w} \cdot e^{\sigma w \cdot i} \cdot dw$ schreiben, aber festhalten, daß von diesem letzteren Integral nur der reelle Theil genommen werden dürfe. Dadurch erhält man, wenn

4) $$\sigma = \left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 + \left(\frac{z}{c}\right)^2 \quad \text{und} \quad s = x+y+z$$

gesetzt wird,

5) $$K = \int_{-\infty}^\infty \int_{-\infty}^\infty \int_{-\infty}^\infty F_s \cdot dx \cdot dy \cdot dz \cdot \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{Sin\, w}{w} \cdot e^{\sigma w \cdot i} \cdot dw,$$

sobald rechts nur der reelle Theil genommen wird.

Setzt man nun noch (nach §. 80.) ein Fourier'sches Integral (indem man ν statt z schreibt), nämlich

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} d\mu \cdot \int_{-\infty}^{\infty} F_{\nu} \cdot e^{(s-\nu)\mu \cdot i} \cdot d\nu \quad \text{statt} \quad F_s,$$

so erhält man hieraus

$$6) \quad K = \frac{1}{\pi^2}\int_0^{\infty} \frac{Sin\, w}{w} dw \cdot \int_{-\infty}^{\infty} F_{\nu} \cdot d\nu \cdot \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\mu\nu \cdot i} \cdot d\mu \cdot$$
$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{(\sigma w + s\mu)\cdot i} \cdot dx \cdot dy \cdot dz,$$

sobald man zur Rechten des (=) Zeichens nur den reellen Theil nimmt, in so ferne das, was für den Faktor F_s gesetzt worden, auch nur reell ist, obgleich es die imaginäre Form i in sich enthält.

Setzt man nun für σ und s ihre Werthe und bedenkt man, daß (nach §. 25. N. 76.)

$$7) \quad \int_{-\infty}^{\infty} e^{\left[\left(\frac{x}{a}\right)^2 w + x\mu\right]\cdot i} \cdot dx = a \cdot \sqrt{\frac{\pi}{w}} \cdot e^{\frac{1}{4}\pi \cdot i - \frac{1}{4} \cdot \frac{a^2}{w} \cdot \mu^2 \cdot i}$$

ist, und daß danach auch die Werthe der nach y und nach z genommenen Integrale bestimmt werden, so erhält man jetzt, sobald noch der Kürze wegen

$$a^2 + b^2 + c^2 = r^2$$

gesetzt wird,

$$8) \quad K = \pi^{-\frac{1}{2}} \cdot e^{\frac{3}{4}\pi \cdot i} \cdot abc \cdot \int_0^{\infty} \frac{Sin\, w}{w^{\frac{5}{2}}} dw \cdot \int_{-\infty}^{\infty} F_{\nu} \cdot d\nu \cdot$$
$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\left[\frac{1}{4}\frac{r^2}{w}\mu^2 + \mu\nu\right]\cdot i} \cdot d\mu.$$

Weil aber das Integral nach μ, derselben N. 76. des §. 25. zufolge, auch ausgewerthet ist, so geht dies Resultat sogleich über in

$$9) \quad K = 2 \cdot e^{\frac{1}{2}\pi \cdot i} \cdot \frac{abc}{r} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} F_{\nu} \cdot d\nu \cdot \int_0^{\infty} \frac{Sin\, w}{w^2} \cdot e^{\frac{\nu^2}{r^2} w \cdot i} \cdot dw,$$

sobald man hiervon nur den reellen Theil nimmt.

Will man aber von $e^{p \cdot i} \cdot e^{q \cdot i}$ nur den reellen Theil nehmen, so hat man $Cos\,p \cdot Cos\,q - Sin\,p \cdot Sin\,q$ d. h. $Cos(p+q)$; deshalb geht die 9.) noch über in

$$10)\quad K = -\frac{2abc}{r} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} F_{\nu} \cdot d\nu \cdot \int_{0}^{\infty} \frac{dw}{w^2} \cdot Sin\,w \cdot Sin\,\frac{\nu^2}{r^2}\,w,$$

so daß nun das vorgelegte dreifache Integral (welches auch hätte ein analoges nfaches Integral seyn können) auf ein Doppel-Integral zurückgeführt sich sieht.

Diese Beispiele werden aber ausreichen, um die große Wichtigkeit dieser Umformung der Doppel- und der vielfachen Integrale entschieden nachgewiesen zu haben.


Druck von Gebr. Unger in Berlin.

[illegible]

10) [illegible]

[illegible]

Diese Beispiele werden aber ausreichen, um die große Nützlichkeit dieser Umformung der [illegible] zu lassen.


1.)
Y
C
E
M
A
F
O
P
B
D
X
2.)
C
M
B
F
O
E
A
X
P
D
3.)
Y
P'
P
M'
M
N'
N
Q
Q'
O
2'
1'
3'
X
4.)
Y
Z
O
X
5.)
Z
Y
M
Q
O
P
X
6.)
D
Y
C
M
O
A
F
P
B
X
7.)
C
D
Y
E
M
O
F
A
P
B
X
8.)
Y
D
C
M
E
O
A
P
B
F
X